ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται *κρίσιμα σημεία* της f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$

(μονάδες 2)

β) Αν μια συνάρτηση f είναι 1–1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

(μονάδες 2)

γ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = +\infty$

(μονάδες 2)

δ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

(μονάδες 2)

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση

$$2x^2 - |w-4-3i|x = -2|z|, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μια διπλή ρίζα, την $x=1$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο Κ(4,3) και ακτίνα $\rho_2 = 4$

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Μονάδες 5

Β3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος Β1 να αποδείξετε ότι:

$$|z-w| \le 10 \quad \text{και} \quad |z+w| \le 10$$

Μονάδες 6

Β4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει:

$$\left|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}\right| = 5$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x)-3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = \dfrac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 4

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f\left(5(x^2+1)^3 - 8\right) \le f\left(8(x^2+1)^2\right)$$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt = -\xi\left(3\xi^2 - 1\right) f\left(\xi^3 - \xi\right)$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = x + \displaystyle\int_1^x \left(\int_1^u \frac{\left(f'(t)\right)^2 - 1}{f(t)}\, dt\right) du$ για κάθε $x > 0$
- $f(x)\, f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(0) = 0$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{με} \quad x > 0 \quad \text{και} \quad h(x) = \left(f'(x)\right)^3 \quad \text{με} \quad x \ge 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)\,f''(x)+1=\left(f'(x)\right)^2 \quad \text{για κάθε } x>0$$

Μονάδες 4

Δ2. **α.** Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f' στο $(0,+\infty)$

(μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$

(μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

α. $g(x)\geq 2-x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

(μονάδες 2)

β. $\displaystyle\int_0^1 (2-x)\,f(x)\,dx<1$

(μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$

Μονάδες 8

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. <u>Στο εξώφυλλο</u> του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. <u>Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω</u> να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. <u>Στην αρχή των απαντήσεών σας</u> να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. <u>Να μην αντιγράψετε</u> τα θέματα στο τετράδιο και <u>**να μην γράψετε**</u> πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. <u>Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.</u> Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:00

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_0, β)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 2

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 6

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f

β) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Αν είναι 0<α<1, τότε $\lim_{x \to +\infty} α^x = +\infty$

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

Β1. $|z| = 1$

Μονάδες 7

Β2. Ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 6

Β3. $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2) \leq 4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 6

Β4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u - ui = \frac{i}{w} - w$, $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 1 = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1 & , \; x=0 \end{cases}$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(0,f(0)\right)$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2f(x)=x+2,\ x\in\mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x(\ell nx)\ell n\left(f(x)\right)\right]$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ με $A=(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(A)=\left(-\infty,0\right]$
- η παράγωγος της f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, και
- $2f(x)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\displaystyle\int_1^x e^{f(t)}f'(t)\left(t+\dfrac{1}{t}\right)dt+2$, για κάθε $x>0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$, $x>0$

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma\left(x_0, F(x_0)\right)$, $x_0>0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_0, \beta)$ με $\beta > x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $M\left(\xi, F(\xi)\right)$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\varepsilon: F(\beta)\, x-(\beta-1)y+2012\,(\beta-1)=0$$

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\beta>1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x^5}{x-1}+\frac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x, στο διάστημα (1,3)

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x t\,f(t)\,dt, \quad \text{για κάθε} \quad x>0$$

Μονάδες 6

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **<u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε</u>** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας</u>** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x)=συνx είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$

Μονάδες 10

Α2. Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z=α+βi, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$z-\bar{z}=2\beta$$

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

δ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z - i| = 1 + \operatorname{Im}(z) \qquad (1)$$

$$w(\overline{w} + 3i) = i(3\overline{w} + i) \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z = w.

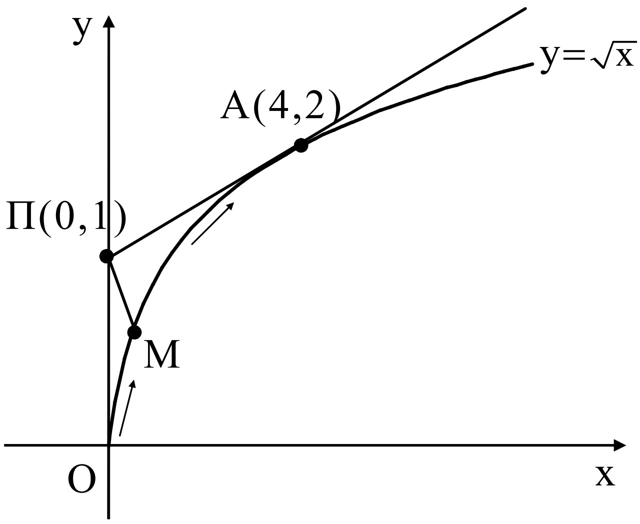
Μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ,Α,Λ,Β να είναι τετράγωνο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x\geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0,1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ είναι $x'(t)=16\text{m/min}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t)=16t$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4,2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$, κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

ii) $f'(0) < f(1) - f(0)$ και

iii) $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Αν επιπλέον $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x g(x)}$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > 2$

Μονάδες 5

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1 είναι $E(\Omega)=e-\frac{5}{2}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)dx$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi} f(t)dt = 2$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.00

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = ημx$, $x \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(ημx)' = συνx$

Μονάδες 8

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f(x) = α^x$, $α > 0$, τότε ισχύει $\left(α^x\right)' = xα^{x-1}$

β) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f \circ g = g \circ f$

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

ε) Για κάθε $z \in C$ ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$$z_1 + z_2 = -2 \text{ και } z_1 \cdot z_2 = 5$$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2

Μονάδες 5

Β2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$

Μονάδες 8

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει

$$2 \cdot \mathrm{Re}(w) + \mathrm{Im}(w) = 0$$

Μονάδες 6

Β4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος **Β2** με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3,\ x > 0$

Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος **Γ3** με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$

και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\int_0^1 f(xt)dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = +\infty$

Μονάδες 6

Αν επιπλέον δίνεται ότι

$$f'(x) + 2x = 2x\cdot\left(f(x)+x^2\right),\ x\in\mathbb{R},\ \text{τότε:}$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = e^{x^2} - x^2,\quad x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 8

Δ4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt\ ,\ x \geq 0$$

και να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt + \int_6^4 f(t)dt < 0$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 09.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,\,+\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Μονάδες 9

Β. Έστω μια συνάρτηση f και x_o ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o ;

Μονάδες 6

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\overline{(z^{\nu})} = \left(\overline{z}\right)^{\nu}$

Μονάδες 2

β. Η συνάρτηση f είναι 1−1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Μονάδες 2

γ. Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_o τότε

$$\lim_{x \to x_o} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

Μονάδες 2

δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) =$ εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{\, x \mid \text{συν}x = 0 \,\}$ και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\text{συν}^2 x}$$

Μονάδες 2

ε. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad x \in \Delta$$

όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)\,z + (2+i)\,\bar{z} - 8 = 0$$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x+yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 8

γ. Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2+x+1] - \ln(x+2), \quad x > -1$$

όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$

Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 5

Β. Έστω ότι $\lambda = -1$

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \neq 0$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f:[0,2]\to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x},\ \ 0\le x\le 2$$

$$f'(0)=2f(0),\ \ f'(2)=2f(2)+12e^4,\ \ f(1)=e^2$$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=3x^2-\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}},\ \ 0\le x\le 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,2]$.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι $k=6$ και ότι ισχύει $g(x)=0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3e^{2x},\ \ 0\le x\le 2$

Μονάδες 5

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx$$

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα. Να μη χρησιμοποιηθεί το μιλιμετρέ φύλλο του τετραδίου.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης**. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 10

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Μονάδες 2

β. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Μονάδες 2

γ. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες 2

δ. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \beta=0$$

Μονάδες 2

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι β=–1 και γ=1.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3=-1$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει:

$$|\,w\,| = \left|z_1 - \overline{z_1}\right|$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\ln x, \quad x>0$.

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

γ. Έστω η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)} & , \quad x>0 \\ k & , \quad x=0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

Μονάδες 6

ii. Αν $k=-\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0, e).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad x\in[0, +\infty),$$

$$h(x)=\frac{F(x)}{\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,dt}, \qquad x\in(0, +\infty).$$

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t)+F(t)]dt = F(1)$

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0, +∞).

Μονάδες 8

γ. Αν h(1)=2, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)\,dt < 2\int_0^2 tf(t)dt$

Μονάδες 6

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)\,dt = \frac{1}{2}F(1)$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α.2 Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

β. Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx.$$

Μονάδες 2

γ. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

Μονάδες 2

ε. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu 3x}{x}, & x<0 \\ x^2+\alpha x+\beta\sigma\upsilon\nu x, & x\geq 0. \end{cases}$$

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=3$.

Μονάδες 8

β. Αν $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = 3$.

Μονάδες 9

γ. Αν $\alpha = \beta = 3$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - e\ln x, \quad x > 0.$$

α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 10

β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \geq e$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

γ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt + \int_{2}^{4} f(t)dt$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha+\beta i$ και $z_2 = \dfrac{2-\bar{z}_1}{2+\bar{z}_1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.

Μονάδες 9

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 6

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta>0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι

$$(z_1+1+i)^{20} - (\bar{z}_1+1-i)^{20} = 0.$$

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδείξετε ότι: $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x,\ x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Α.2 Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2|.$$

Μονάδες 2

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f(x_o)\, g'(x_o) - f'(x_o)\, g(x_o)}{[g(x_o)]^2}\ .$$

Μονάδες 2

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $\left[\ell n|x|\right]' = \frac{1}{x}$.

Μονάδες 2

δ. Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

Μονάδες 2

ε. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \dfrac{1}{f(x)} dx$.

Μονάδες 9

γ. Για κάθε x<0 να αποδείξετε ότι:

$$f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x) .$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2+x+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία x=2.

Μονάδες 7

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x=2 τέμνει τον άξονα y΄y στο $y_o=-3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

Μονάδες 9

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x΄x και της ευθείας $x=\frac{3}{5}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ell n(x+1)-(x+1)\ell nx$ με $x>0$.

α. **i.** Να αποδείξετε ότι: $\ell n(x+1)-\ell nx<\frac{1}{x}$, $x>0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ell n(1+\frac{1}{x})$.

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha\in(0,+\infty)$ τέτοιος ώστε $(\alpha+1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha+1}$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Μονάδες 9

Α.2 Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται “1-1”;

Μονάδες 4

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

Μονάδες 2

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο $(α,x_o)$ και κοίλη στο $(x_o,β)$ ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_o,f(x_o))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 2

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

δ. Αν για δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά fog ≠ gof.

Μονάδες 2

ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών $z, \bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

Μονάδες 2

στ. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx .$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$z_1+z_2=4+4i$ και $2z_1 - \bar{z}_2 = 5+5i$,

να βρείτε τους z_1, z_2.

Μονάδες 10

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w ισχύουν $|z-1-3i| \le \sqrt{2}$ και $|w-3-i| \le \sqrt{2}$:

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z=w και

Μονάδες 10

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι “1-1”.

Μονάδες 7

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1),

να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004 + f(x^2 - 8)\right) = -2$.

Μονάδες 9

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία

(ε): $y = -\dfrac{1}{668}x + 2005$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005 .$$

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0)=0$

Μονάδες 4

ii. $f'(0)=1$.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + \lambda\left(f(x)\right)^2}{2x^2 + \left(f(x)\right)^2} = 3.$

Μονάδες 7

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

να δείξετε ότι:

i. $xf(x)>0$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

ii. $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$.

Μονάδες 4

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **<u>Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.</u>** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας σε όλα</u>** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10.30΄** πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 9

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

β. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

γ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 2

δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μονάδες 2

ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε

$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

Μονάδες 2

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 13

β. Αν m = 10, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 1.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα [α, β] με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $Re(z) \neq 0$, $Im(z) \neq 0$ και $|Re(z)| > |Im(z)|$.

Γ΄ ΤΑΞΗ

Αν $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z| = 1$

Μονάδες 11

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$

Μονάδες 5

γ. η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt)\,dt \,.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - (x + 1)$.

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Μονάδες 6

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \; .$$

Μονάδες 10

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Μονάδες 2

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Μονάδες 2

γ. Μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2) .$$

Μονάδες 2

δ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx \quad .$$

Μονάδες 2

Γ. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z| = 2 \quad \text{και} \quad \operatorname{Im}(z) \geq 0 .$$

Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι $f\,'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} + f(x) = 0$.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = -f(2-x) \text{ και } f\,'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 8

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{f\,'(x)}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^o .

Μονάδες 9

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

   Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μετά τη 10.00η πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $z_1 = \varrho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \varrho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε να αποδείξετε ότι:

$z_1 \cdot z_2 = \varrho_1\varrho_2\,[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)]$.

Μονάδες 15

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Μονάδες 2

β. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

δ. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,β] και σημείο $x_0 \in [α,β]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 2

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(α)\cdot f(β)<0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

Μονάδες 5

γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)\,dx$

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x) = \frac{|x-z|^2 - |x+\overline{z}|^2}{x^2+|z|^2}$$

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός z=α+βi, α,β $\in\mathbb{R}$, με $\alpha\neq 0$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f, εάν $|z+1| > |z-1|$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x)\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

και $f(0) = 2f'(0) = 1$.

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.

Μονάδες 12

β. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα [0,1], να δείξετε ότι η εξίσωση

$$2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)}\,dt = 1$$

έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα [0,1].

Μονάδες 13

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

$$G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 6,5

Α.2. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α. $\int_{\alpha}^{\beta}\lambda f(x)dx = ...$

β. $\int_{\alpha}^{\beta}\big(f(x)+g(x)\big)dx = ...$

γ. $\int_{\alpha}^{\beta}[\lambda f(x)+\mu g(x)]\,dx = ...$

όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και f,g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

Β.1. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(x)=6x+4$, $x\in\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της Α(0,3) έχει κλίση 2.

Μονάδες 6,5

Β.2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 \left(e^x + x\right)dx$

Μονάδες 2

β. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}\,dx$

Μονάδες 2

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)\,dx$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z+16| = 4|z+1|$$

Μονάδες 9

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-1| = |z-i|$$

Μονάδες 9

γ. Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β).

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x+\alpha, & x\le 1 \\ \left(1-e^{-x+1}\right)\ln(x-1), & x\in(1,2] \end{cases}$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{-x+1}}{x-1}$$

Μονάδες 7

β. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_o=1$.

Μονάδες 11

γ. Για $\alpha=-1$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\int_1^x\frac{t\,f(t)}{x^2}dt \quad \text{με } x>0$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x},\ x>0$$

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 4

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=e.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ