Κεφάλαιο

13

ΣΤΕΡΕΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Εισαγωγή

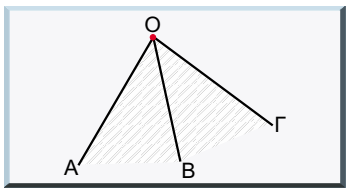
ΣΤΕΡΕΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Για καλύτερη μελέτη και κατανόηση των στερεών σχημάτων κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια σύντομη αναφορά στις πολύεδρες στερεές γωνίες και ειδικότερα στις τρίεδρες.

Μια πρώτη "ιδέα" τρίεδρης γωνίας μπορούμε να πάρουμε παρατηρώντας στην αίθουσα το σχήμα που δημιουργείται από την οροφή και τους δύο τοίχους.

Ορισμός τρίεδρης γωνίας

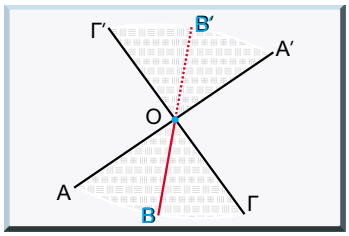
Θεωρούμε στο χώρο τρεις μη ομοεπίπεδες ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ με κοινή αρχή Ο. Το σχήμα που απαρτίζουν οι τρεις κυρτές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}Γ$ και $Γ\hat{O}A$ καλείται **τρίεδρη γωνία** (και συμβολίζεται με Ο.ΑΒΓ).



Κορυφή της τρίεδρης γωνίας καλείται το Ο, **ακμές** οι ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ και **έδρες** οι επίπεδες γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}Γ$ και $Γ\hat{O}A$.

Για να είναι ίσες δύο τρίεδρες γωνίες να μπορούν δηλαδή να ταυτιστούν με κατάλληλη μετατόπιση απαιτείται εκτός των άλλων να έχουν και τον ίδιο προσανατολισμό. Αυτός μπορεί να είναι δεξιόστροφος ή αριστερόστροφος. Ένας πρακτικός τρόπος προσδιορισμού του προσανατολισμού μιας τρίεδρης γωνίας γίνεται με τον κανόνα των τριών δακτύλων, τον οποίο περιγράφουμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Θεωρούμε την τρίεδρη γωνία Ο.ΑΒΓ και παίρνουμε τις αντικείμενες ημιευθείες των ακμών της τις ΟΑ΄, ΟΒ΄ και ΟΓ΄. Η νέα τρίεδρη Ο.Α΄Β΄Γ΄ που προκύπτει λέγεται **κατακορυφήν** της Ο.ΑΒΓ. Αν διατάξουμε τις ακμές της Ο.ΑΒΓ κατά σειρά ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, οι αντίστοιχες ακμές της κατακορυφήν της διατάσσονται κατά τη σειρά ΟΑ΄, ΟΒ΄, ΟΓ΄. Αν θελήσουμε να τοποθετήσουμε τα τρία πρώτα δάκτυλα του χεριού (αντίχειρας-δείκτης-μεσαίος) κατά την ίδια σειρά στις ακμές της γωνίας θα διαπιστώσουμε ότι στη μια γωνία αυτό μπορεί να γίνει μόνο με το δεξί χέρι και στην άλλη μόνο με το αριστερό. Έτσι καθορίζεται το δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο κάθε γωνίας.

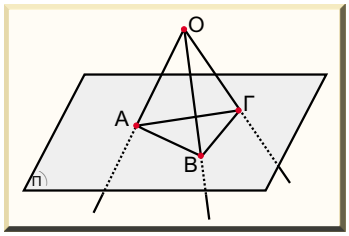


Παρατήρηση

Αν δύο τρίεδρες γωνίες έχουν τις έδρες τους ίσες μία προς μία, θα είναι ίσες αν έχουν και τον ίδιο προσανατολισμό ή η μία θα είναι ίση με την κατακορυφήν της άλλης αν έχουν αντίθετους προσανατολισμούς.

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

Ας θεωρήσουμε μια τρίεδρη με κορυφή Ο και ας πάρουμε τρία σημεία Α, Β και Γ ένα σε κάθε ακμή της. Αυτά τα σημεία ορίζουν ένα επίπεδο Π. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι μεταξύ του επιπέδου Π και των επιπέδων των εδρών της τρίεδρης περιέχεται ένα μέρος του χώρου και σχηματίζεται έτσι ένα στερεό σώμα. Το στερεό αυτό σώμα μάλιστα ανήκει σε μια κατηγορία στερεών που ονομάζονται **πολύεδρα** και που είναι το αντικείμενο μελέτης των επόμενων παραγράφων. Για τον ορισμό του πολύεδρου θα στηριχτούμε και σε έννοιες γνωστές από την εμπειρία μας και θα δείξουμε και κάποια "ανεκτικότητα" στην αυστηρή λογική της Γεωμετρίας, για να αποφύγουμε αρκετούς σύνθετους επιμέρους ορισμούς εννοιών.



Ορισμός

Πολύεδρο λέγεται ένα στερεό σώμα που καταλήγει από παντού σε επίπεδες επιφάνειες.

Επειδή η τομή δύο επιπέδων είναι ευθεία γραμμή, συμπεραίνουμε ότι οι επίπεδες επιφάνειες του πολυέδρου είναι πολυγωνικά χωρία. Η τομή ενός πολύεδρου με ένα επίπεδο είναι επίσης πολυγωνικό χωρίο.

Τα πολυγωνικά χωρία που περικλείουν ένα πολύεδρο καλούνται **έδρες**, οι πλευρές αυτών των εδρών καλούνται **ακμές** του πολυέδρου, και οι κορυφές των εδρών καλούνται **κορυφές** του. Ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δυο κορυφές, όχι της ίδιας έδρας, καλείται **διαγώνιος** του πολυέδρου. Θα εξειδικεύσουμε ακόμη περισσότερο το ενδιαφέρον μας και θα περιοριστούμε στη μελέτη των λεγόμενων κυρτών πολυέδρων.

Ορισμός

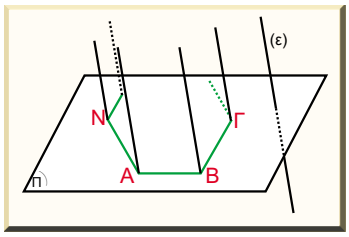
Ένα πολύεδρο καλείται κυρτό, όταν το επίπεδο κάθε έδρας του αφήνει το πολύεδρο ολόκληρο στον ίδιο ημιχώρο.

Σε ένα κυρτό πολύεδρο όλες οι έδρες του είναι κυρτά πολύγωνα, όπως επίσης και κάθε τομή του με επίπεδο είναι πολύγωνο κυρτό ή ευθύγραμμο τμήμα ή σημείο. Ακόμη η τομή μιας ευθείας και της επιφάνειας ενός κυρτού πολύεδρου είναι σημείο (μια κορυφή) ή ευθύγραμμο τμήμα (μια ακμή) ή δύο σημεία.

13.1 Πρίσματα

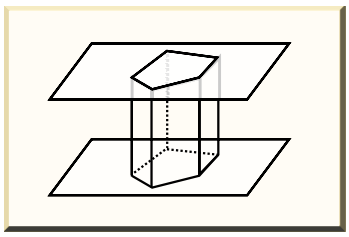
Απ' όλες τις κατηγορίες πολυέδρων θα επιλέξουμε για μελέτη δύο: των πρισμάτων και των πυραμίδων. Για να δώσουμε τον ορισμό του πρίσματος θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε την πρισματική επιφάνεια.

Σε ένα επίπεδο Π θεωρούμε μια πολυγωνική γραμμή ΑΒΓ...Ν και μια ευθεία ε που τέμνει το Π. Αν θεωρήσουμε από κάθε σημείο της πολυγωνικής γραμμής και μια ευθεία παράλληλη προς την ε σχηματίζεται μια επιφάνεια απ' αυτές τις ευθείες. Η επιφάνεια αυτή ονομάζεται **πρισματική** επιφάνεια. Κάθε μια από τις παράλληλες ευθείες ονομάζεται **γενέτειρα**, η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓ...Ν ονομάζεται **οδηγός**, ενώ κάθε γενέτειρα που περνά από κορυφή του οδηγού ονομάζεται **ακμή** της πρισματικής επιφάνειας. Αν θεωρήσουμε όλες τις γενέτειρες που περνούν από τα σημεία μιας πλευράς του οδηγού, αυτές αποτελούν μια επίπεδη ζώνη, η οποία καλείται **έδρα** της πρισματικής επιφάνειας. Αν ένα επίπεδο τέμνει μια ακμή, θα τέμνει και όλες τις άλλες. Αν ο οδηγός είναι πολύγωνο, τότε και η τομή της πρισματικής επιφάνειας και ενός τέτοιου επιπέδου είναι πολύγωνο. Αν ο οδηγός είναι κυρτό πολύγωνο, θα είναι κυρτό πολύγωνο και αυτό που προκύπτει από την τομή και η πρισματική επιφάνεια θα καλείται **κυρτή**. Μια τομή που προκύπτει από επίπεδο κάθετο στις ακμές καλείται **κάθετη τομή** πρισματικής επιφάνειας.



Στο εξής θα αναφερόμαστε μόνο σε κυρτές πρισματικές επιφάνειες.

Θεωρούμε μια πρισματική επιφάνεια με οδηγό ένα κυρτό πολύγωνο και δυο παράλληλα επίπεδα που τέμνουν τις ακμές της. Μεταξύ αυτών των παράλληλων επιπέδων και των εδρών της πρισματικής επιφάνειας περιέχεται ένα στερεό το οποίο καλείται **πρίσμα**. Διακρίνουμε τα εξής στοιχεία του πρίσματος:



Ορισμοί

Βάσεις πρίσματος καλούνται οι τομές των δυο παράλληλων επιπέδων με την πρισματική επιφάνεια.

Παράπλευρες έδρες είναι τα τμήματα των εδρών της πρισματικής επιφάνειας, που περιέχονται μεταξύ των βάσεων.

Παράπλευρες ακμές είναι τα τμήματα των ακμών της πρισματικής επιφάνειας, που περιέχονται μεταξύ των βάσεων.

Έδρες πρίσματος είναι οι βάσεις και οι παράπλευρες έδρες.

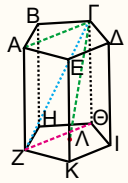
Ακμές πρίσματος είναι οι πλευρές της βάσης και οι παράπλευρες ακμές.

Κορυφές πρίσματος είναι οι κορυφές των βάσεων.

Ύψος πρίσματος είναι η απόσταση των βάσεων.

Διαγώνιος πρίσματος είναι κάθε ευθύγραμμο τμήμα που τα άκρα του δεν είναι κορυφές της ίδιας έδρας.

Διαγώνιο επίπεδο πρίσματος είναι κάθε επίπεδο που ορίζεται από δυο παράπλευρες ακμές, που δεν ανήκουν στην ίδια παράπλευρη έδρα.



ΑΒΓΔΕ βάση
ΑΕΚΖ παράπλευρη έδρα
ΑΖ παράπλευρη ακμή
Α,Β ...κορυφές
ΓΛ ύψος
ΓΖ διαγώνιος
ΑΓΘΖ διαγώνιο επίπεδο

Ειδικές κατηγορίες πρισμάτων

Ορισμοί

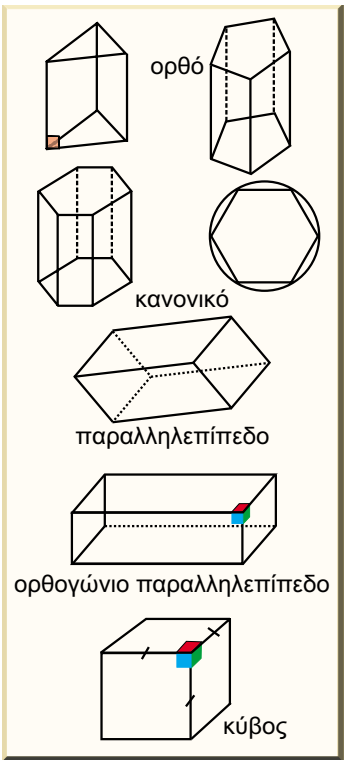
Ορθό καλείται ένα πρίσμα, όταν οι παράπλευρες ακμές είναι κάθετες στις βάσεις.

Κανονικό καλείται ένα πρίσμα, όταν είναι ορθό και επιπλέον οι βάσεις είναι κανονικά πολύγωνα.

Παραλληλεπίπεδο καλείται ένα πρίσμα, όταν οι βάσεις του είναι παραλληλόγραμμα.

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο καλείται ένα πρίσμα, όταν είναι ορθό και οι βάσεις του είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

Κύβος ονομάζεται ένα πρίσμα, όταν είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και έχει όλες τις ακμές του ίσες.



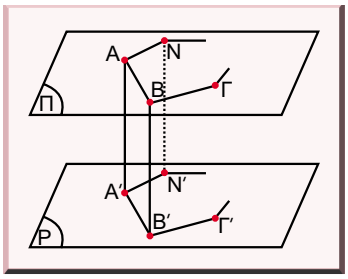
Η ειδικότερη ονομασία ενός πρίσματος προσδιορίζεται από το πλήθος των πλευρών της βάσης. Πενταγωνικό πρίσμα, τριγωνικό πρίσμα, εξαγωνικό πρίσμα κλπ.

Από την παραλληλία των βάσεων και την παραλληλία των παράπλευρων ακμών στα πρίσματα προκύπτει:

Οι παράπλευρες έδρες κάθε πρίσματος είναι παραλληλόγραμμα.

Οι παράπλευρες έδρες ορθού πρίσματος είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

Οι βάσεις ενός πρίσματος είναι ίσες.

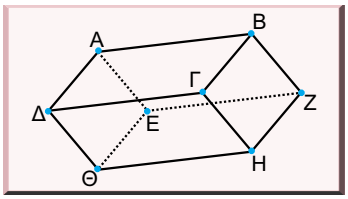


Θεώρημα 13.1

Οι απέναντι έδρες ενός παραλληλεπιπέδου είναι παραλληλόγραμμα ίσα και παράλληλα.

Απόδειξη

Έστω το παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ, με βάσεις ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ. Οι βάσεις αυτές εξ ορισμού είναι παράλληλα παραλληλόγραμμα, για τα οποία γνωρίζουμε ότι είναι ίσα. Οι απέναντι έδρες ΑΒΖΕ και ΔΓΗΘ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμων) και τις γωνίες τους ίσες (πλευρές παράλληλες και ομόρροπες). Άρα οι έδρες ΑΒΖΕ και ΔΓΗΘ είναι ίσες και παράλληλες.



Ομοίως αποδεικνύεται ότι και οι έδρες ΑΕΘΔ και ΒΖΗΓ είναι ίσες και παράλληλες. ■

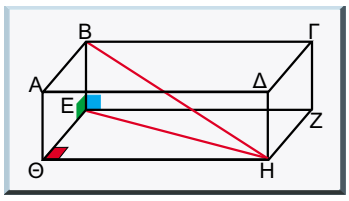
Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το παραλληλεπίπεδο μπορεί να θεωρηθεί πρίσμα με βάσεις δυο οποιεσδήποτε απέναντι έδρες. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε τρία ζεύγη βάσεων, τρία ύψη, και τρεις τετράδες ίσων παράπλευρων ακμών.

Διαστάσεις στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι τα μήκη τριών ακμών, που ξεκινούν από την ίδια κορυφή.

Θεώρημα 13.2

Αν α, β, γ οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ, τότε κάθε διαγώνιος δ αυτού έχει μήκος $\delta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$.

Απόδειξη



Θεωρούμε τη διαγώνιο ΒΗ=δ του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και τη διαγώνιο ΕΗ της ορθογώνιας βάσης ΕΖΗΘ του πρίσματος.

Αν (ΘΑ,ΘΕ,ΘΗ)=(α,β,γ), τότε και ΕΒ=ΘΑ=α.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΘΗ από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα πάρουμε: $ΕΗ^2=ΘΕ^2+ΘΗ^2=β^2+γ^2$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΗ πάλι από το ίδιο θεώρημα θα πάρουμε: $ΒΗ^2=ΕΒ^2+ΕΗ^2$ ή $δ^2=α^2+β^2+γ^2$ ή

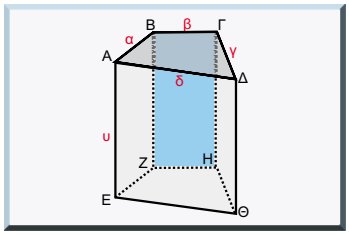
$δ=\sqrt{α^2+β^2+γ^2}$

Ομοίως αποδεικνύεται και για τις άλλες διαγώνιες. ■

Πόρισμα 13.1

Η διαγώνιος δ ενός κύβου ακμής α είναι ίση με $δ=α\sqrt{3}$.

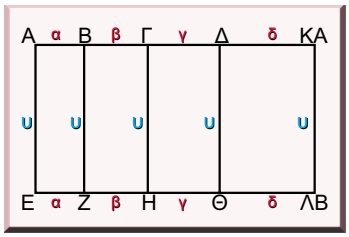
Μέτρηση πρίσματος



Στο πρώτο σχήμα έχουμε ένα ορθό τετραπλευρικό πρίσμα το ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ, με ύψος υ και πλευρές βάσης ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ και ΔΑ=δ.

Στο δεύτερο σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο ΑΚΛΕ με πλευρές (διαστάσεις) ΑΕ=υ και ΑΚ=α+β+γ+δ. Αυτή τη δεύτερη πλευρά τη χωρίζουμε σε τμήματα ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ, συνεπώς ΔΑ=δ. Με παράλληλες ευθείες από τα σημεία Β, Γ, Δ, χωρίζουμε το ορθογώνιο ΑΚΛΕ σε τέσσερα ορθογώνια που έχουν κοινό ύψος υ και οι διαστάσεις για των άλλων πλευρών είναι α, β, γ και δ. Προφανώς κάθε ένα από τα νέα ορθογώνια είναι ίσο με μια παράπλευρη έδρα του αρχικού πρίσματος. Το ορθογώνιο ΑΚΛΕ ονομάζεται

ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ.



Επειδή τα τέσσερα ορθογώνια μπορούν με κατάλληλη μετατόπιση να ταυτιστούν με τις παράπλευρες έδρες του πρίσματος, είναι λογικό να δεχτούμε ότι και η συνολική επιφάνειά τους εκφράζει την παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος. Η επιφάνεια αυτή έχει εμβαδόν υ(α+β+γ+δ). Η περίμετρος της βάσης του πρίσματος είναι α+β+γ+δ που τη συμβολίζουμε με $Π_β$. Συμβολίζουμε με $Ε_Π$ το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας. Καταλήγουμε στη σχέση:

$$Ε_Π=Π_β \cdot υ$$

Το ολικό εμβαδό της επιφάνειας του πρίσματος είναι:

$$Ε_{ολ}=Ε_Π+2Ε_β$$

Πόρισμα 13.2

Το ολικό εμβαδό ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ είναι $Ε_{ολ}=2(αβ+βγ+γα)$.

Πόρισμα 13.3

Το ολικό εμβαδό κύβου ακμής α είναι ίσο με $Ε_κ=6α^2$.

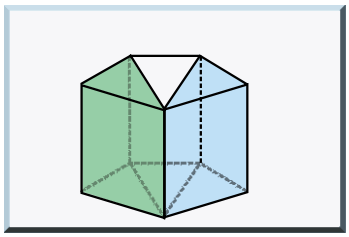
Ο όγκος για τα στερεά είναι το αντίστοιχο του εμβαδού για τα επίπεδα σχήματα.

Μέτρηση του όγκου ενός στερεού σημαίνει συγκριση με τον όγκο ενός στερεού, που το θεωρούμε σαν προτυπη μονάδα μέτρησης. Για πρακτικούς λόγους έχει καθιερωθεί σαν μονάδα μέτρησης να θεωρείται ο κύβος με ακμή 1. Έτσι ο όγκος ενός στερεού εκφράζεται με έναν θετικό αριθμό V. Όταν λέμε ότι ο όγκος ενός στερεού σώματος είναι V, εννοούμε ότι είναι ίσος με V φορές τον όγκο ενός κύβου ακμής 1.

Όπως στα εμβαδά έτσι και στους όγκους πρέπει να κάνουμε μερικές προτάσεις δεκτές χωρίς απόδειξη για να στηριχτούμε σ' αυτές και να προχωρήσουμε στα θεωρήματα τα σχετικά με τον όγκο. Θα περιοριστούμε στα πολύεδρα που είναι και τα πρώτα στερεά των οποίων τους όγκους θα υπολογίσουμε.

- Δύο ίσα πολύεδρα έχουν ίσους όγκους.
- Αν ένα πολύεδρο χωριστεί σε πεπερασμένο πλήθος πολυέδρων χωρίς εσωτερικά κοινά σημεία, ο όγκος του ισούται με το άθροισμα των όγκων των πολυέδρων αυτών.

  Δύο πολύεδρα με ίσους όγκους ονομάζονται **ισοδύναμα**.



Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη δύο θεωρήματα σημαντικά στη μέτρηση του όγκου των πρισμάτων.

Ο όγκος ενός πρίσματος είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού της κάθετης τομής του επί το μήκος της παράπλευρης ακμής.

Ο όγκος ενός παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος του.

Άμεση συνέπεια της δεύτερης πρότασης είναι τα πορίσματα.

Πόρισμα 13.4

Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τη σχέση V=α·β·γ.

Πόρισμα 13.5

Ο όγκος V κύβου με ακμή α δίνεται από τη σχέση με $V=α^3$.

Θα ολοκληρώσουμε τη μελέτη μας για τον όγκο των πρισμάτων με τις αποδείξεις τριών ακόμη θεωρημάτων.

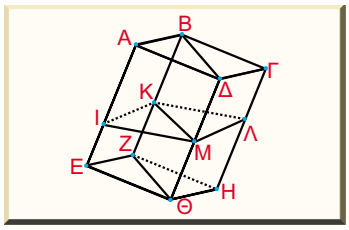
Θεώρημα 13.3

Κάθε διαγώνιο επίπεδο ενός παραλληλεπιπέδου το χωρίζει σε δύο πρίσματα που είναι ισοδύναμα ή και ίσα.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ ένα παραλληλεπίπεδο, ΙΚΛΜ μια κάθετη τομή του και ΒΔΘΖ ένα διαγώνιο επίπεδο αυτού.

Η κάθετη τομή ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο και τέμνεται από το διαγώνιο επίπεδο ΒΔΘΖ κατά την ΚΜ η οποία το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα τα ΙΚΜ και ΚΛΜ που έχουν και ίσα εμβαδά.



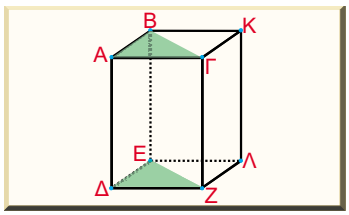
Το παραλληλεπίπεδο χωρίζεται από το διαγώνιο επίπεδο σε δύο τριγωνικά πρίσματα τα ΑΒΔ.ΕΖΘ και ΒΓΔ.ΖΗΘ. Αυτά έχουν ίσες παράπλευρες ακμές και ισοδύναμες κάθετες τομές. Άρα θα έχουν ίσους όγκους, δηλαδή θα είνα ισοδύναμα.

Τα τριγωνικά αυτά πρίσματα που έχουν όλα τους τα στοιχεία ένα προς ένα ίσα, δε σημαίνει ότι οπωσδήποτε είναι και ίσα. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει και οι αντίστοιχες τρίεδρες να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, όπως ισχύει στο ορθό παραλληλεπίπεδο με βάση ρόμβο. ■

Θεώρημα 13.4

Ο όγκος τριγωνικού πρίσματος ΑΒΓ.ΔΕΖ είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης επί το ύψος του.

Απόδειξη



Με παράλληλες από τα σημεία Β και Γ προς τις ΑΓ και ΑΒ σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΚΓ. Με παρόμοιο τρόπο σχηματίζουμε το ΔΕΛΖ.

Έχουμε ΓΚ=//ΑΒ=//ΔΕ=//ΖΛ, άρα το ΓΚΛΖ είναι παραλληλόγραμμο και ΚΛ=//ΓΖ. Συνεπώς το ΑΒΚΓ.ΔΕΛΖ είναι ένα τετραπλευρικό πρίσμα και το επίπεδο ΒΓΖΕ είναι ένα διαγώνιο επίπεδο, που το χωρίζει σε δυο τριγωνικά πρίσματα πιθανόν ίσα και οπωσδήποτε ισοδύναμα.

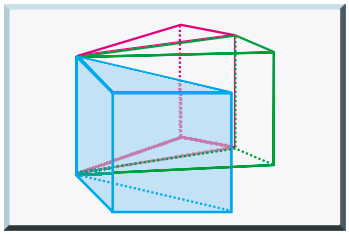
Για τον όγκο του τετραπλευρικού πρίσματος V έχουμε $V=(ΔΕΛΖ)\cdot υ_β$. Λόγω της προηγούμενης παρατήρησης, αν $V_τ$ ο όγκος του ΑΒΓ.ΔΕΖ τότε:

$$2V_τ=(ΔΕΛΖ)\cdot υ \quad ή \quad V_τ=\frac{(ΔΕΛΑ)}{2}υ \quad ή \quad V_τ=(ΔΕΖ)\cdot υ=E_β\cdot υ$$ ■

Θεώρημα 13.5

Ο όγκος κάθε πρίσματος είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης επί το ύψος του.

Απόδειξη



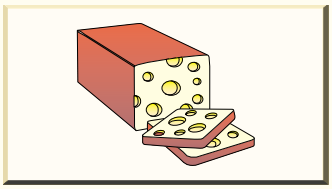
Οποιοδήποτε πρίσμα μη τριγωνικό με διαγώνια επίπεδα που περνούν από μία παράπλευρη ακμή χωρίζεται σε τριγωνικά πρίσματα με κοινό ύψος το ύψος του αρχικού πρίσματος. Τα ίδια επίπεδα χωρίζουν τις βάσεις του αρχικού πρίσματος σε τρίγωνα που είναι οι βάσεις των νέων πρισμάτων. Αν, λοιπόν, έχουμε ν τριγωνικά πρίσματα με εμβαδά βάσεων E_1, E_2,..., $E_ν$, οι όγκοι τους είναι $V_1=E_1\cdot υ$, $V_2=E_2\cdot υ$, ..., $V_ν=E_ν\cdot υ$ και ο συνολικός όγκος τους (όγκος του αρχικού πρίσματος):

$$V=E_1\cdot υ+E_2\cdot υ+E_3\cdot υ+...+E_ν\cdot υ=(E_1+E_2+E_3+...+E_ν)\cdot υ=E_β\cdot υ,$$

όπου $E_β$ το εμβαδόν βάσης του αρχικού πρίσματος. ■

13.1 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας υπάλληλος super market πουλά κασέρι σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 10 cm, 10 cm και 50 cm, το οποίο κόβει σε φέτες 10×10 cm. Κάποιος πελάτης ζήτησε κασέρι σε φέτες με διάσταση 10×20 cm. Με ποια γωνία πρέπει να ρυθμίσει ο υπάλληλος το μαχαίρι κοπής για να το πετύχει αυτό, αν δεν έχει τη δυνατότητα να κόψει το κομμάτι κατά μήκος;

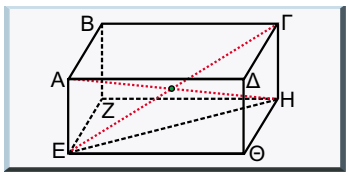


1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι διαγώνιες ενός παραλληλεπιπέδου περνούν από το ίδιο σημείο και διχοτομούνται.

Απόδειξη

Έστω το παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ και δύο διαγώνιες αυτού, οι ΑΗ και ΓΕ. Το τετράπλευρο ΑΓΗΕ είναι παραλληλόγραμμο, εφόσον ΑΕ//=ΓΗ. Οι διαγώνιές του που είναι οι ΑΗ και ΓΕ έχουν κοινό μέσο.



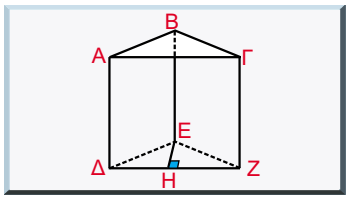
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και κάθε άλλη διαγώνιος έχει το ίδιο μέσο μ' αυτές.

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογίσετε τον όγκο κανονικού τριγωνικού πρίσματος όταν η ακμή της βάσης έχει μήκος α και το ύψος του πρίσματος είναι ίσο με το ύψος της βάσης.

Λύση

Η βάση του πρίσματος είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α, εμβαδού $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ και ύψους $ΕΗ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.



Άρα και το ύψος του πρίσματος είναι ίσο με $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Ο όγκος $V_Π$ του πρίσματος, λοιπόν, θα δοθεί από τη σχέση:

$$V_Π = E_β υ \quad ή \quad V_Π = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4} \quad ή \quad V_Π = \frac{3\alpha^2}{16}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Οι διαγώνιες διχοτομούνται σε κάθε παραλληλεπίπεδο ή μόνο στα ορθογώνια;

2 Γιατί ένα πρίσμα δεν μπορεί να έχει 9 κορυφές;

3 Πώς από τη διαγώνιο ενός κύβου μπορούμε να υπολογίσουμε την ακμή του, τον όγκο του και το εμβαδόν της επιφάνειάς του;

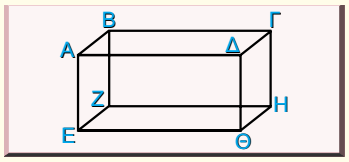
4 Ένα δοχείο σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει τις δυο διαστάσεις 8 cm και 4 cm και τη διαγώνιό του 9 cm. Πώς θα βρούμε τον όγκο του;

5 Πόσες έδρες έχει ένα πρίσμα όταν έχει 5 παράπλευρες ακμές;

6 Υπάρχουν πρίσματα χωρίς διαγώνια επίπεδα;

7 Ένα ορθό πρίσμα με ίσες τις παράπλευρες έδρες είναι κανονικό;

8 Στο παραλληλεπίπεδο του σχήματος να προσδιορίσετε τις ακμές που κάθε μία είναι ασύμβατη με την ακμή ΑΔ.



9 Η τομή ενός πρίσματος με ένα επίπεδο παράλληλο με τις παράπλευρες ακμές, τι σχήμα είναι;

10 Σε ένα πρίσμα ορθό οι δίεδρες γωνίες, που σχηματίζονται από δυο γειτονικές παράπλευρες έδρες, έχουν το ίδιο μέτρο;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Η βάση ορθού τριγωνικού πρίσματος είναί ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 12 m και 9 m. Αν το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι 360 m^2, να βρείτε το ύψος, το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του πρίσματος.

2 Αν σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι $\alpha=6$, $\beta=3$ και η διαγώνιος $\delta=7$, να βρείτε το εμβαδόν του.

3 Η παράπλευρη ακμή πρίσματος σχηματίζει με τη βάση γωνία 60°. Να δείξετε ότι $E_K^2 = \frac{3}{4} E_\beta^2$.

4 Δίνεται ένα κανονικό ορθό πρίσμα με τριγωνική βάση. Έστω α η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου της βάσης και $\beta = \alpha\sqrt{12}$ το ύψος του πρίσματος. Αν ο όγκος του πρίσματος είναι $V=96$, να βρεθούν τα α και β.

5 Σε οθρογώνιο παραλληλεπίπεδο το μήκος είναι διπλάσιο από το πλάτος και η διαγώνιος τετραπλάσια από το ύψος. Αν ο όγκος του είναι $V=1296$, να βρεθούν οι διαστάσεις του.

6 Να δείξετε ότι η τομή ενός πρίσματος από επίπεδο παράλληλο προς μια παράπλευρη ακμή του είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Στις παράπλευρες ακμές ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ τετραπλευρικού πρίσματος με βάση τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και ΑΒ=12, ΓΔ=8 θεωρούμε τα σημεία Κ, Λ και Μ αντίστοιχα, ωστε ΑΚ=10, ΒΛ=6, ΓΜ=4. Αν Ν το σημείο τομής της ακμής ΔΔ΄ με το επίπεδο (Κ,Λ,Μ) να βρεθεί το μήκος του ΔΝ.

2 Να δείξετε ότι οι ευθείες που συνδέουν τις κορυφές μιας βάσης τριγωνικού πρίσματος με τα κέντρα των απέναντι εδρών συντρέχουν.

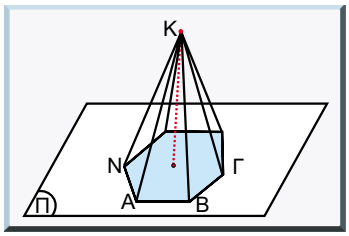
3 Σε ένα ορθό τριγωνικό πρίσμα η βάση είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 9α και 12α. Να βρεθεί η επιφάνεια και ο όγκος του πρίσματος, αν το ύψος είναι ίσο με την υποτείνουσα της τριγωνικής βάσης.

4 Ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις απέναντι έδρες και διέρχεται από το κέντρο του παραλληλεπιπέδου, διχοτομείται από αυτό.

5 Να δείξετε ότι το γινόμενο του εμβαδού μιας παράπλευρης έδρας ενός τριγωνικού πρίσματος επί την απόσταση της έδρας αυτής από την απέναντι ακμή είναι ίσο με το διπλάσιο του όγκου του.

13.2 Πυραμίδες

Σε επίπεδο Π θεωρούμε ένα πολύγωνο ΑΒΓ...Ν με ν πλευρές και εκτός του επιπέδου αυτού ένα σημείο Κ. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήμα ΚΑ, ΚΒ,...,ΚΝ. Σχηματίζεται κατ' αυτόν τον τρόπο ένα στερεό που περιέχεται μεταξύ των τριγώνων ΚΑΒ, ΚΒΓ,...,ΚΝΑ και του αρχικού πολυγώνου ΑΒΓ...Ν. Το στερεό αυτό καλείται **πυραμίδα** και το συμβολίζουμε Κ.ΑΒΓ...Ν.



Στοιχεία της πυραμίδας:

Κορυφή λέγεται το σημείο Κ.

Βάση λέγεται το πολύγωνο ΑΒΓ...Ν.

Παράπλευρες ακμές λέγονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΑ,ΚΒ,...,ΚΝ..

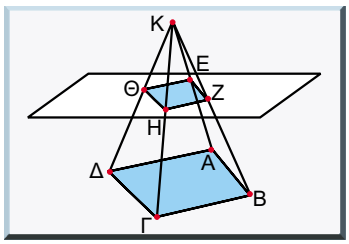
Παράπλευρες έδρες λέγονται τα τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ,...,ΚΝΑ.

Ύψος λέγεται η απόσταση της κορυφής από τη βάση.

Μια πυραμίδα καλείται **κανονική**, όταν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και η κορυφή της προβάλλεται στο κέντρο της βάσης.

Στις κανονικές πυραμίδες ορίζουμε ένα ακόμα στοιχείο, το **παράπλευρο ύψος** ή απόστημα. Είναι η απόσταση της κορυφής της πυραμίδας από κάθε πλευρά της βάσης και συμβολίζεται με h.

Θεωρούμε μια πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔΝ και ένα επίπεδο Π παράλληλο προς το επίπεδο της βάσης της που τέμνει τις παράπλευρες ακμές στα σημεία Α΄Β΄...Ν΄. Το κομμάτι της πυραμίδας που περιέχεται ανάμεσα στα δυο παράλληλα επίπεδα είναι ένα νέο στερεό σώμα, γέννημα της πυραμίδας που καλείται **κόλουρη πυραμίδα**.



Βάσεις της κόλουρης πυραμίδας καλούνται οι δυο παράλληλες έδρες της, ύψος η απόσταση των βάσεων, **παράπλευρες** έδρες όλες οι έδρες εκτός των δυο βάσεων και παράπλευρες ακμές οι **ακμές** του στερεού, που δεν ανήκουν σε καμία βάση.

Αν η αρχική πυραμίδα είναι κανονική, τότε και η κόλουρη πυραμίδα ονομάζεται **κανονική**. **Παράπλευρο ύψος** στην κόλουρη κανονική πυραμίδα καλείται το ύψος ενός ισοσκελούς τραπεζίου

παράπλευρης έδρας.

Η ονομασία μιας πυραμίδας καθορίζεται κατ' αρχάς από το πλήθος των πλευρών της βάσης, π.χ. εξαγωνική πυραμίδα, κανονική πενταγωνική πυραμίδα, τετραγωνική κόλουρη πυραμίδα, κανονική εξαγωνική κόλουρη πυραμίδα κτλ.

Ειδικά για την τριγωνική πυραμίδα χρησιμοποιείται και ο όρος **τετράεδρο** επειδή είναι ένα στερεό με τέσσερις συνολικά έδρες. **Κανονικό τετράεδρο** όμως, καλείται ένα τετράεδρο που όλες του οι έδρες είναι ισόπλευρα τρίγωνα.

Οι ιδιότητες των πυραμίδων καθορίζονται από τα θεωρήματα που ακολουθούν, μερικά από τα οποία παρουσιάζουμε χωρίς απόδειξη, επειδή αυτή είναι σχεδόν προφανής.

Θεώρημα 13.6

Σε κάθε κανονική πυραμίδα οι παράπλευρες ακμές είναι ίσες.

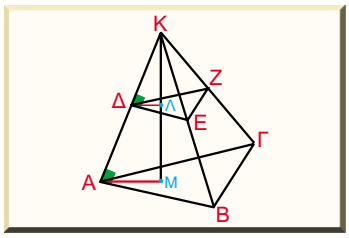
Θεώρημα 13.7

Σε κάθε κανονική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες είναι ίσα ισοσκελή τρίγωνα.

Θεώρημα 13.8

Η τομή πυραμίδας με επίπεδο παράλληλο προς τη βάση της είναι πολύγωνο όμοιο προς τη βάση με λόγο ομοιότητας ίσο με το λόγο των αποστάσεων της κορυφής από τα δυο επίπεδα.

Απόδειξη



Έστω Κ.ΑΒΓ μια τριγωνική πυραμίδα και ΔΕΖ μια τομή αυτής παράλληλη στη βάση. ΔΕ//ΑΒ (τομές παράλληλων επιπέδων από τρίτο) και επομένως τα τρίγωνα ΚΑΒ και ΚΔΕ είναι όμοια με

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{KA}{K\Delta} \qquad (1)$$

Από την κορυφή Κ η κάθετη στα δύο παράλληλα επίπεδα τα τέμνει στα Λ και Μ ΔΛ//ΑΜ (τομές παράλληλων επιπέδων από το ΚΑΜ). Άρα τα τρίγωνα ΚΑΜ και ΚΔΛ είναι όμοια με

$$\frac{KM}{K\Lambda} = \frac{KA}{K\Delta} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{KM}{K\Lambda}$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται $\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{\Gamma A}{Z\Delta} = \frac{KM}{K\Lambda}$

και τελικά $$\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΓΑ}{ΖΔ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}$$

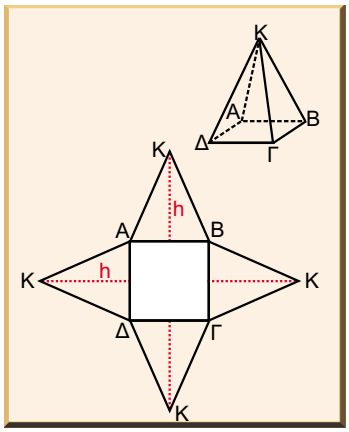
δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{ΚΜ}{ΚΛ}$. ■

Η απόδειξη για μη τριγωνικές πυραμίδες είναι ανάλογη.

Εμβαδό επιφάνειας πυραμίδας

Το εμβαδόν της επιφάνειας οποιουδήποτε πολυέδρου μπορεί να υπολογιστεί με πρόσθεση των εμβαδών όλων των εδρών. Αυτό ισχύει και για τις πυραμίδες. Η διαδικασία όμως διαφέρει από πυραμίδα σε πυραμίδα ανάλογα με τη μορφή της βάσης και το είδος των τριγώνων των παράπλευρων εδρών. Για τις κανονικές, όμως, πυραμίδες μπορούμε να καθορίσουμε ενιαίο τρόπο υπολογισμού του εμβαδού. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του αναπτύγματος της επιφάνειας της πυραμίδας.

Στα διπλανά σχήματα έχουμε μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ και το ανάπτυγμά της. Αυτό αποτελείται από το τετράγωνο της βάσης, ΑΒΓΔ πλευράς α και από τέσσερα ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΚΑΒ κτλ., που είναι οι παράπλευρες έδρες της πυραμίδας. Αυτά έχουν ίσες βάσεις ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΑ=α και ίσα ύψη h.



Το ολικό εμβαδόν της πυραμίδας είναι ίσο:

$$E_{ολ}=E_β+E_Π=(ΑΒΓΔ)+4(ΚΑΒ)=E_β+4\frac{1}{2}ΑΒ\cdot h=$$

$$=E_β+\frac{1}{2}4ΑΒ\cdot h=E_β+\frac{1}{2}Π_β\cdot h$$

όπου $E_β$ το εμβαδό της βάσης και $Π_β$ η περίμετρος της βάσης.

Ο τύπος $E_{ολ}=E_β+\frac{1}{2}Π_β\cdot h$ αναφέρεται μόνο για τις κανονικές πυραμίδες.

Για τις κανονικές κόλουρες πυραμίδες έχουμε για το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας $E_Π$ τη σχέση:

$$E_Π=\frac{1}{2}(Π_1+Π_2)h,$$

όπου $Π_1$, $Π_2$ οι περίμετροι των βάσεων και h το παράπλευρο ύψος. Για το ολικό εμβαδό τη σχέση $E_{ολ}=E_{β_1}+E_{β_2}+E_Π$ όπου $E_{β_1}$ και $E_{β_2}$ τα εμβαδά των βάσεων.

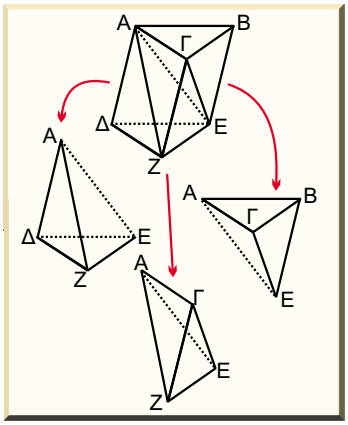
Οι βάσεις και τα ύψη είναι τα στοιχεία που καθορίζουν το εμβαδό των επέπεδων σχημάτων. Είδαμε στην επιπεδομετρία ότι ομοειδή σχήματα (τρίγωνα, τραπέζια, κτλ.) με ίσες βάσεις και ίσα ύψη έχουν ίσα εμβαδά Στη στερεομετρία επίσης πρίσματα με ισοδύναμες βάσεις και ίσα ύψη έχουν ίσους όγκους. Δεχόμαστε χωρίς απόδειξη ότι δύο τριγωνικές πυραμίδες με ισοδύναμες βάσεις και ίσα ύψη έχουν ίσους όγκους.

Θεώρημα 13.9

Κάθε τριγωνικό πρίσμα μπορεί να διαιρεθεί με επίπεδο σε τρία ισοδύναμα τετράεδρα (τριγωνικές πυραμίδες).

Απόδειξη

Θεωρούμε το τριγωνικό πρίσμα ΑΒΓ.ΔΕΖ και φέρουμε τις ΑΖ και ΑΕ. Ορίζονται έτσι τα επίπεδα ΑΕΖ και ΑΓΕ τα οποία χωρίζουν το πρίσμα στα τετράεδρα ΕΑΔΖ, ΕΓΑΖ και ΑΒΓΕ. Αυτά δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία.



Τα δυο πρώτα έχουν ίσες τις βάσεις ΑΔΖ και ΑΓΖ (λόγω του παραλληλόγραμμου ΑΓΖΔ) και κοινό ύψος από την κοινή κορυφή Ε. Σύμφωνα με την παραδοχή που κάναμε είναι ισοδύναμα.

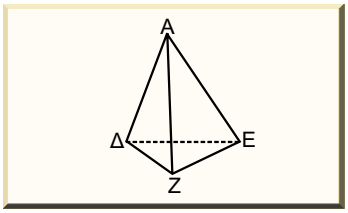
Τα δυο τελευταία έχουν ίσες τις βάσεις ΓΖΕ και ΒΓΕ και κοινό ύψος από την κοινή κορυφή Α. Άρα και αυτά είναι ισοδύναμα. Τελικά τα τρία τετράεδρα είναι ισοδύναμα.

Πόρισμα 13.6

Ο όγκος V τριγωνικής πυραμίδας με εμβαδό βάσης $E_β$ και ύψος υ είναι ίσος με $V=\frac{1}{3}E_β \cdot υ$.

Απόδειξη

Για την πυραμίδα Α.ΔΖΕ του προηγούμενου σχήματος συμπεραίνουμε ότι έχει όγκο το 1/3 του πρίσματος ΑΒΓ.ΔΕΖ που έχει την ίδια βάση ΔΕΖ μ' αυτήν και το ίδιο ύψος.



Κάθε τριγωνική πυραμίδα συνεπώς μπορεί να αποτελέσει το 1/3 ενός αντίστοιχου πρίσματος, με κατάλληλες προσθήκες επιπέδων . ■

Πόρισμα 13.7

Ο όγκος V κάθε πυραμίδας με εμβαδό βάσης $E_β$ και ύψος υ είναι ίσος με $V=\frac{1}{3}E_β \cdot υ$

Απόδειξη

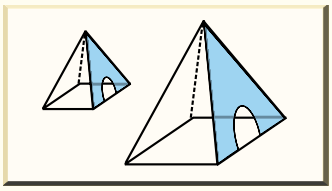
Είναι απλή και στηρίζεται στο προηγούμενο πόρισμα και στη δυνατότητα να χωριστεί η βάση της σε τρίγωνα.

Τέλος, ο όγκος Ε μιας κόλουρης πύραμίδας με ύψος υ και εμβαδά βάσεων Β και β δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{3}(B + \beta + \sqrt{B \cdot \beta})\upsilon$$ ■

13.2 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας μπογιατζής χρωμάτισε το σπίτι του σκύλου του που έχει σχήμα τετραγωνικής πυραμίδας σε διάστημα 3 ωρών. Χρειάστηκε για το λόγο αυτό ένα ολόκληρο κουτί μπογιά σε σχήμα κανονικού εξαγωνικού πρίσματος. Την επόμενη μέρα έπρεπε να βάψει ένα εντελώς όμοιο σκυλόσπιτο με διαστάσεις διπλάσιες απ' ότι το προηγούμενο. Υπολόγισε ότι χρειάζονται για τη δουλειά αυτή 6 ώρες και ένα κουτί μπογιά όμοιο με το προηγούμενο αλλά με διπλάσιες διαστάσεις. Να ελέξτε αν οι υπολογισμοί του είναι ορθοί.

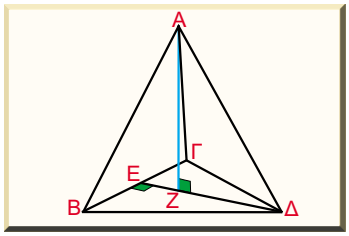


1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί ο όγκος και το εμβαδόν της επιφάνειας κανονικού τετραέδρου ακμής α.

Λύση

Αν ΔΕ ένα ύψος της βάσης και ΑΖ το ύψος του τετραέδρου, το Ζ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΓΔ. Έτσι



$$\Delta Z = \frac{2}{3}\Delta E = \frac{2}{3}\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$$

Επομένως

$$AZ^2 = A\Delta^2 - Z\Delta^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6\alpha^2}{9} \quad \text{ή} \quad AZ = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}$$

Άρα ο όγκος V του τετραέδρου είναι

$$V = \frac{1}{3}E_\beta\upsilon = \frac{1}{3}\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\frac{\alpha\sqrt{6}}{3} = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}$$

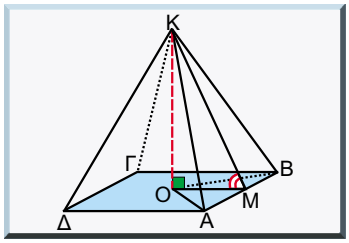
Το εμβαδόν της επιφάνειας είναι

$$E_{ολ} = 4E_{ΒΓΔ} \quad \text{ή} \quad E_{ολ} = 4\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \alpha^2\sqrt{3}$$

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν οι παράπλευρες έδρες μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας σχηματίζουν με το επίπεδο της βάσης γωνία 60°, τότε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι διπλάσιο από το εμβαδόν της βάσης.

Απόδειξη



Έστω Κ.ΑΒΓΔ η κανονική τετραγωνική πυραμίδα, ΚΟ το ύψος της, ΚΜ το παράπλευρο ύψος και ΟΜ το απόστημα της βάσης. Η γωνία της παράπλευρης έδρας ΚΑΒ με τη βάση έχει αντίστοχη επίπεδη γωνία την $K\hat{M}O$, άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΜ έχουμε

$$K\hat{M}O = 60^\circ \quad \text{άρα} \quad O\hat{K}M = 30^\circ \quad \text{οπότε} \quad OM = \frac{1}{2}KM$$

Το εμβαδόν της βάσης από τον τύπο του εμβαδού κανονικού πολυγώνου είναι $E_{\beta} = \frac{1}{2}\Pi_{\beta} \cdot OM$

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι

$$E_{\Pi} = \frac{1}{2}\Pi_{\beta} \cdot KM = \frac{1}{2}\Pi_{\beta} \cdot 2OM = \Pi_{\beta} \cdot OM$$

δηλαδή διπλάσιο του εμβαδού της βάσης.

(Η πρόταση ισχύει και χωρίς την προϋπόθεση να είναι η πυραμίδα τετραγωνική).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Σε μια κανονική πυραμίδα, ποια σχέση συνδέει το ύψος της, το παράπλευρο ύψος της και το απόστημα της βάσης;

2 Σε μια κανονική πυραμίδα να συγκρίνετε την παράπλευρη ακμή της με το ύψος της και την ακτίνα της βάσης της.

3 Σε ένα κανονικό τετράεδρο ΑΒΓΔ να εξηγήσετε γιατί το μεσοκάθετο επίπεδο της ΑΒ περιέχει τη ΓΔ.

4 Ένα κανονικό τετράεδρο είναι κανονική τετραγωνική πυραμίδα;

5 Σε μια κανονική πυραμίδα το ύψος είναι ίσο με το απόστημα της βάσης. Ποια είναι η δίεδρη γωνία που σχηματίζει κάθε παράπλευρη έδρα με τη βάση;

6 Σε μια πυραμίδα μπορεί το ύψος να είναι ίσο με μια παράπλευρη ακμή; Με μία ακμή της βάσης;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Να υπολογιστεί το εμβαδό της επιφάνειας και ο όγκος μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, η οποία έχει πλευρά βάσης 8 cm και ύψος 12 cm.

2 Σε κανονική εξαγωνική πυραμίδα η ακτίνα του περιγεγραμμένου στη βάση κύκλου είναι R. Αν το ύψος της είναι το μισό της πλευράς της βάσης, να βρεθεί η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει το παράπλευρο ύψος με τη βάση, το εμβαδόν και ο όγκος της πυραμίδας.

3 Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα με πλευρά βάσης α και ύψος υ ισχύει $α^2=12υ^2$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η παράπλευρη έδρα της με τη βάση.

4 Σε μία κανονική εξαγωνική πυραμίδα με πλευρά βάσης $α\sqrt{2}$ το παράπλευρο ύψος είναι ίσο με $α\sqrt{6}$. Να υπολογιστεί το εμβαδό της επιφάνειας της πυραμίδας και ο όγκος της.

5 Κανονική τετραγωνική πυραμίδα με παράπλευρες έδρες ισόπλευρα τρίγωνα έχει πλευρά α. Να βρείτε: α) το εμβαδό της ολικής επιφάνειάς της και β) τον όγκο της.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Κανονική τετράπλευρη πυραμίδα έχει εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας 18 και οι παράπλευρες έδρες της σχηματίζουν με τη βάση γωνία 60°. Να βρεθεί το εμβαδόν και ο όγκος της κόλουρης πυραμίδας, που ορίζεται, αν φέρουμε επίπεδο παράλληλο στη βάση από το μέσο του ύψους της.

2 Θεωρούμε τετραπλευρική πυραμίδα Σ·ΑΒΓΔ με βάση τετράγωνο πλευράς α και παράπλευρη ακμή $\frac{α\sqrt{3}}{2}$. Να δείξετε ότι τα επίπεδα (Σ,Α,Β) και (Σ,Γ,Δ) είναι κάθετα.

3 Να βρεθεί το εμβαδόν κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, όταν είναι γνωστός ο όγκος της V και η πλευρά της βάσης της α.

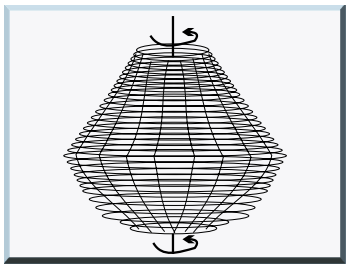
4 Να βρεθεί ο όγκος κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας, που η παράπλευρη ακμή της είναι 12α και σχηματίζει γωνία 30° με τη βάση.

5 Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ΑΒΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ με βάση ΑΒΓΔ τράγωνο πλευρά α. Τέμνουμε το παραλληλεπίπεδο με ένα επίπεδο που διέρχεται από τις κορυφές Β, Δ, Α΄. Να βρείτε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας ΑΒΔΑ΄.

6 Μια τριγωνική πυραμίδα έχει για βάση ισόπλευρο τρίγωνο και οι παράπλευρες έδρες είναι ορθογώνια τρίγωνα με υποτείνουσες τις πλευρές της βάσης. Να αποδείξετε ότι είναι κανονική. Αν α το μήκος της παράπλευρης ακμής να υπολογίσετε τον όγκο της και το εμβαδόν της επιφάνειάς της.

Στερεά εκ περιστροφής

Στο σχήμα έχουμε ένα διακοσμητικό χάρτινο φαναράκι που αποτελείται από πολλά ίσα επίπεδα κομμάτια χαρτονιού τοποθετημένα συμμετρικά γύρω από ένα άξονα. Το "στερεό" που σχηματίζουν φαίνεται να προκύπτει από την περιστροφή ενός από αυτά κατά 360° γύρω από τον άξονα αυτού. Ένα στερεό που παράγεται μ' αυτόν τον τρόπο ονομάζεται στερεό εκ περιστροφής. Θα μελετήσουμε αμέσως τώρα τρία στερεά εκ περιστροφής που παράγονται κατά στροφή 360°:



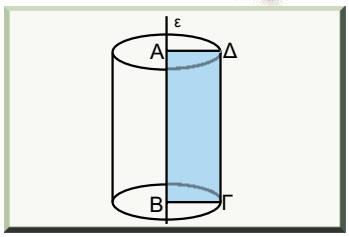
α) ενός ορθογωνίου γύρω από τη μια πλευρά του,

β) ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μία κάθετη πλευρά και

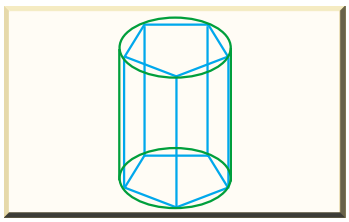
γ) ενός ημικυκλικού δίσκου γύρω από τη διάμετρό του.

13.3 Κύλινδρος

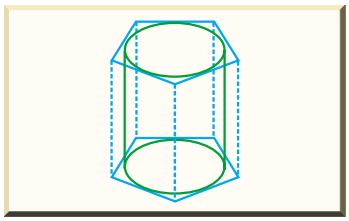
Όταν το ορθογώνιο ΑΒΓΔ στραφεί κατά 360° γύρω από την πλευρά του ΑΒ παράγεται το στερεό που βλέπουμε στο σχήμα, το οποίο ονομάζεται **ορθός κύλινδρος** ή απλά κύλινδρος. Σε μια σύντομη περιγραφή του στερεού, θα παρατηρήσουμε: Η ευθεία ΑΒ ονομάζεται **άξονας** του κυλίνδρου· οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ γράφουν δυο παράλληλους ίσους κυκλικούς δίσκους που ονομάζονται **βάσεις** του κυλίνδρου· επιπλέον αποτελούν και αυτών ακτίνες των κύκλων. Η πλευρά ΓΔ παράγει μια μη επίπεδη επιφάνεια η οποία καλείται **κυλινδρική** επιφάνεια ή **κυρτή** επιφάνεια ή **παράπλευρη** επιφάνεια του κυλίνδρου. Ύψος κυλίνδρου ονομάζουμε την απόσταση των βάσεων.



Ένα πρίσμα λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύλινδρο όταν οι βάσεις του είναι εγγεγραμμένα πολύγωνα στις βάσεις του κυλίνδρου και οι παράπλευρες ακμές του ανήκουν στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.



Ένα πρίσμα λέγεται **περιγεγραμμένο** σε κύλινδρο όταν οι βάσεις του είναι περιγεγραμμένα πολύγωνα στις βάσεις του κυλίνδρου και οι παράπλευρες έδρες του εφάπτονται στην παράπλευρη επιφάνεια αυτού.



Μέτρηση κυλίνδρου

Θεωρούμε έναν κύλινδρο ύψους υ και ακτίνας βάσης R και δύο κανονικά πρίσματα το ένα εγγεγραμμένο και το άλλο περιγεγραμμένο σ' αυτόν. Τα δυο πρίσματα έχουν ύψος υ, ίσο μ' αυτό του κυλίνδρου.

Ακόμη, υποθέτουμε ότι το πλήθος των πλευρών των βάσεων από τα δύο κανονικά πρίσματα διπλασιάζεται απεριόριστες φορές.

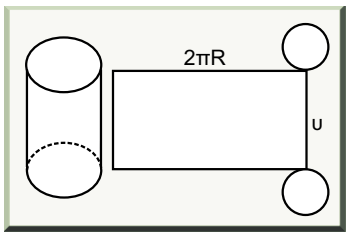
Με παραδοχές και συλλογισμούς αντίστοιχους μ' αυτούς που κάναμε στον προσδιορισμό του εμβαδού του κύκλου καταλήγουμε στις ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Ο όγκος και το εμβαδόν της επιφάνειας του εγγεγραμμένου πρίσματος αυξάνουν αλλά σε κάθε περίπτωση είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα μεγέθη του περιγεγραμμένου πρίσματος, τα οποία με τη σειρά τους ελαττώνονται.
- Οι όγκοι των δυο πρισμάτων τείνουν να εξισωθούν σε μια τιμή V την οποία θεωρούμε **όγκο** του κυλίνδρου. Δεδομένου ότι οι όγκοι των πρισμάτων δίνονται από τη σχέση $V_{\Pi}=E_{\beta}\cdot\upsilon$ και το εμβαδό της βάσης θα πάρει σχεδόν την τιμή του εμβαδού της βάσης του κυλίνδρου που είναι πR^2, επομένως ο όγκος V του κυλίνδρου θα ορίζεται από τη σχέση $V=\pi R^2\cdot\upsilon$.
- Τα εμβαδά των παράπλευρων επιφανειών των πρισμάτων τείνουν να εξισωθούν σε μία τιμή E_{Π}, την οποία θεωρούμε εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου. Τα εμβαδά αυτών των επιφανειών δίνονται από τον τύπο $E_{\Pi}=\Pi_{\beta}\cdot\upsilon$ και καθώς η περίμετρος της βάσης Π_{β} θα τείνει στην τιμή του μήκους του κύκλου της βάσης, άρα το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου, ορίζεται από τη σχέση $E_{\Pi}=2\pi R\cdot\upsilon$.

  Το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου είναι:

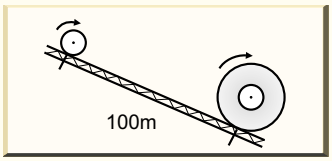
$$E_{ολ}=E_{\Pi}+2E_{\beta} \quad ή \quad E_{ολ}=2\pi R\upsilon+2\pi R^2=2\pi R(\upsilon+R)$$

Θεωρούμε έναν κύλινδρο κενό, αποκολλούμε τις δυο βάσεις του από την παράπλευρη επιφάνεια και με μια ευθεία κάθετη στις βάσεις "κόβουμε" αυτήν και ξεδιπλώνουμε όλη την επιφάνεια του κυλίνδρου σε ένα επίπεδο. Τότε, θα πάρει τη μορφή του διπλανού σχήματος που ονομάζεται **ανάπτυγμα** του κυλίνδρου. Το ορθογώνιο με διαστάσεις υ (ύψος κυλίνδρου) και 2πR (μήκος της βάσης του κυλίνδρου) είναι ισοδύναμο με την παράπλευρη επιφάνεια αυτού.



13.3 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας κύλινδρος με διάμετρο 10 cm κατρακυλά στην πλαγιά ενός χιονισμένου λόφου και σε απόσταση 100 m. Σε κάθε περιστροφή επικολάται στην επιφάνεια του κυλίνδρου ένα στρώμα χιονιού πάχους 1 cm. Ποια θα είναι η διάμετρος του κυλίνδρου στο τέλος της διαδρομής;

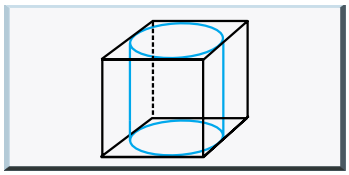


1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί ο όγκος και το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κυλίνδρου, που είναι εγγεγραμμένος σε κύβο ακμής α.

Λύση

Το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με α και η ακτίνα της βάσης ίση με $\frac{\alpha}{2}$. Έχουμε, λοιπόν, για το εμβαδόν της επιφάνειας



$$E_{ολ}=2\pi R(\upsilon+R) \quad ή \quad E_{ολ}=2\pi\frac{\alpha}{2}\left(\alpha+\frac{\alpha}{2}\right) \quad ή \quad E_{ολ}=\frac{3\pi\alpha^2}{2}$$

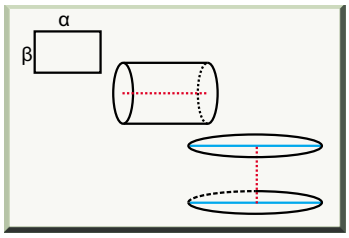
Για τον όγκο $V=\pi R^2\upsilon$ ή $V=\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot\alpha$ ή $V=\frac{\pi\alpha^3}{4}$

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις α και β με α>β στρέφεται κατά 360° μία φορά γύρω από τη μεγάλη και μία φορά γύρω από τη μικρή διάσταση. Σε κάθε περίπτωση σχηματίζεται ένας κύλινδρος. Σε ποια από τις δύο περιπτώσεις έχουμε μεγαλύτερο όγκο; Τι έχετε να παρατηρήσετε για τα εμβαδά των κυλινδρικών επιφανειών;

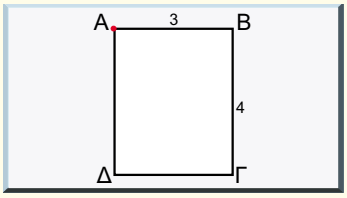
Λύση

Στην περίπτωση που έχουμε στροφή γύρω από τη διάσταση α ο σχηματιζόμενος κύλινδρος έχει ύψος $\upsilon=\alpha$ και ακτίνα βάσης $R=\beta$. Ο όγκος του V είναι $V_1=\pi R^2\upsilon=\pi\beta^2\alpha$ και το εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας $E_1=2\pi R\upsilon=2\pi\alpha\beta$. Στη δύτερη περίπτωση έχουμε εναλλαγή των τιμών της ακτίνας και του ύψους, άρα για τον όγκο θα έχουμε $V_2=\pi\alpha^2\beta$ και $E_2=2\pi\alpha\beta$. Προφανώς ο όγκος στη δεύτερη περίπτωση είναι μεγαλύτερος απ' ότι στην πρώτη ενώ τα εμβαδά των κυλινδρικών επιφανειών είναι ίσα.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Γύρω από ποια πλευρά από τις ΑΒ και ΒΓ πρέπει να στραφεί το ορθογώνιο ΑΒΓΔ για να πάρουμε τον κύλινδρο με το μεγαλύτερο όγκο;



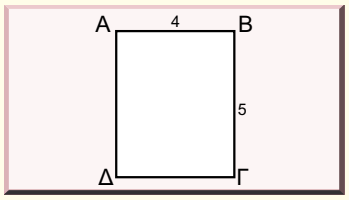
2 Τέμνουμε έναν κύλινδρο με ένα επίπεδο παράλληλο προς τις βάσεις του στο $\frac{1}{3}$ του ύψους. Ποιος είναι ο λόγος των όγκων των δυο κυλίνδρων που προκύπτουν; Ποιος ο λόγος των παράπλευρων επιφανειών; Τι έχετε να παρατηρήσετε για το λόγο των ολικών επιφανειών τους;

3 Ένας κύλινδρος έχει ακτίνα ίση με το ύψος και όγκο ίσο με π. Ποιο είναι το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας;

4 Η τομή ενός κυλίνδρου με επίπεδο παράλληλο προς τον άξονά του, τι σχήμα είναι;

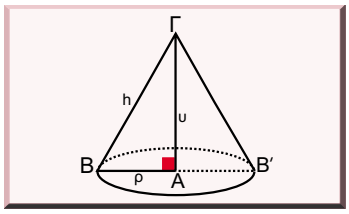
5 Η ακτίνα ενός κυλίνδρου είναι 10 cm και το ύψος του 5 cm. Πόσο διαφέρει ο όγκος του από τον όγκο του κανονικού τετραγωνικού πρίσματος, που είναι εγγεγραμμένο σ' αυτόν.

6 Περιστρέφουμε κατά 360° το ορθογώνιο ΑΒΓΔ γύρω από την πλευρά ΑΒ και μετά γύρω από την πλευρά ΒΓ.Από τους δυο κυλίνδρους που σχηματίζονται ποιος έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια; Τι έχετε να παρατηρήσετε για τις παράπλευρες επιφάνειές τους;



13.4 Κώνος

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή γωνία την $\widehat{A}$. Αν στραφεί αυτό κατά μία πλήρη στροφή 360° γύρω από την κάθετη πλευρά του ΑΓ, θα σχηματίζει ένα στερεό. Το στερεό αυτό ονομάζεται **ορθός κώνος** εκ περιστροφής ή απλά **κώνος**.

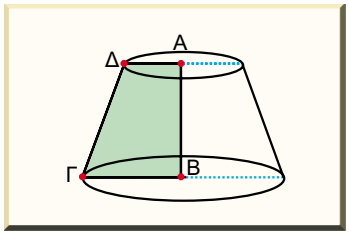


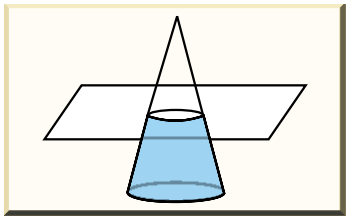
Η πλευρά ΑΒ καθώς στρέφεται γύρω από την ΑΓ είναι πάντα κάθετη σ' αυτή, άρα βρίσκεται σ' ένα επίπεδο κάθετο στην ΑΓ. Το τμήμα ΑΒ γράφει έναν κυκλικό δίσκο ο οποίος καλείται **βάση** του κώνου. Η ευθεία ΑΓ καλείται **άξονας** του κώνου, το σημείο Γ **κορυφή** και κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα την **κορυφή** και ένα σημείο του κύκλου της βάσης καλείται **γενέτειρα** του κώνου, επειδή αυτό το τμήμα γεννά την επιφάνεια του κώνου.

Ύψος του κώνου είναι η απόσταση της κορυφής από τη βάση. Η επιφάνεια του κώνου, εκτός της βάσης καλείται **κωνική** ή **παράπλευρη** επιφάνεια. Αν h η γενέτειρα του κώνου, υ το ύψος του και ρ η ακτίνα της βάσης του, τότε προφανώς $h^2=\upsilon^2+\rho^2$.

Κόλουρος κώνος

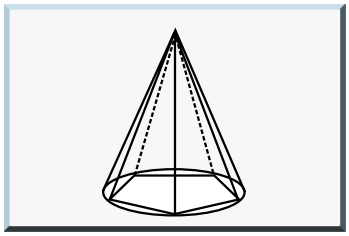
Θεωρούμε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\widehat{A}=\widehat{B}=90°$, το οποίο στρέφεται κατά 360° γύρω από την πλευρά ΑΒ. Το στερεό που διαγράφεται μ' αυτόν τον τρόπο καλείται **κόλουρος** κώνος. Η επιφάνεια του κόλουρου κώνου αποτελείται από δυο κύκλους άνισους που γράφονται από τις βάσεις του τραπεζίου και ονομάζονται **βάσεις** αυτού και από την παράπλευρη επιφάνεια που γράφεται από την πλευρά ΓΔ. **Ύψος** του κόλουρου κώνου καλείται η απόσταση των βάσεων, ενώ **γενέτειρά** του καλείται η πλευρά ΓΔ.





Ένας άλλος τρόπος σχηματισμού ενός κόλουρου κώνου είναι αυτός που γίνεται με την τομή ενός κώνου από επίπεδο παράλληλο προς τη βάση του.

Από τα δύο στερεά που προκύπτουν το ένα είναι κώνος και το άλλο κολουρος κώνος.

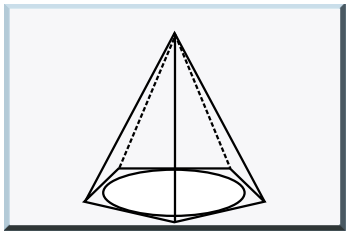


Εγγεγραμμένη πυραμίδα σε κώνο λέγεται μια πυραμίδα που έχει την ίδια κορυφή μ' αυτόν και η βάση της είναι πολύγωνο

εγγεγραμμένο στη βάση του. Οι παράπλευρες ακμές της πυραμίδας αναγκαστικά θα είναι γενέτειρες του κώνου.

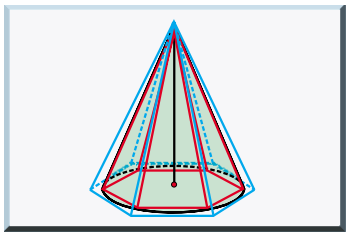
Περιγεγραμμένη πυραμίδα σε κώνο λέγεται μια πυραμίδα που έχει την ίδια κορυφή μ' αυτόν και η βάση της είναι πολύγωνο περιγεγραμμένο στη βάση του.

Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε την εγγεγραμμένη και περιγεγραμμένη κόλουρη πυραμίδα και κόλουρο κώνο. Οι πυραμίδες αυτές είναι απαραίτητες για τον ορισμό και υπολογισμό των όγκων και των επιφανειών των στερεών αυτών. Αυτό γίνεται με τρόπο ανάλογο μ' αυτόν του κυλίνδρου.



Μέτρηση κώνου και κόλουρου κώνου

Σ' έναν κώνο θεωρούμε μία εγγεγραμμένη και μια περιγεγραμμένη κανονική πυραμίδα και ότι το πλήθος των πλευρών των βάσεών τους διπλασιάζεται απεριόριστες φορές. Ο όγκος και η παράπλευρη επιφάνεια της εγγεγραμμένης πυραμίδας συνεχώς αυξάνουν, είναι όμως μικρότεροι από τον όγκο και την παράπλευρη επιφάνεια της περιγεγραμμένης πυραμίδας, που με τη σειρά τους ελαττώνονται.



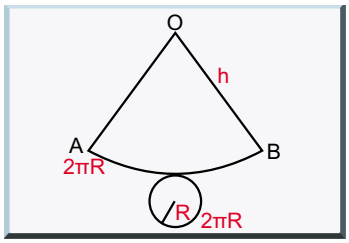
Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένας αριθμός V στον οποίο τείνουν οι όγκοι των δυο πυραμίδων κι αυτός ο αριθμός καλείται **όγκος του κώνου**. Έτσι, ο τύπος του όγκου για τις πυραμίδες $V=\frac{1}{3}E_{β}\cdot υ$, θα πάρει τη μορφή $V=\frac{1}{3}πρ^2\cdot υ$ για τον κώνο, διότι τα εμβαδά των βάσεων των πυραμίδων τείνουν στο εμβαδόν της βάσης του κώνου που είναι $πρ^2$ ενώ το ύψος υ είναι σταθερό.

Αντίστοιχες παρατηρήσεις για τις παράπλευρες επιφάνειες των δύο πυραμίδων μας οδηγούν στον τύπο $E_{Π}=π\cdot ρ\cdot λ$ για την παράπλευρη επιφάνεια του κώνου, διότι οι περίμετροι των βάσεών τους τείνουν στο μήκος του κύκλου που είναι 2πρ, ενώ τα αποστήματά τους στη γενέτειρα h του κώνου.

Για το ολικό εμβαδόν του κώνου θα έχουμε τελικά τη σχέση:

$$E_{ολ}=E_{Π}+E_{β} \quad ή \quad E_{ολ}=πρh+πρ^2=πρ(h+ρ)$$

Ας θεωρήσουμε έναν κενό κώνο. Αποκολλάμε τη βάση του και με μια γενέτειρα "κόβουμε" την παράπλευρη επιφάνεια και ξεδιπλώνουμε όλη την επιφάνεια του κώνου σ' ένα επίπεδο. Θα πάρουμε



έτσι το διπλανό σχήμα, το οποίο καλείται **ανάπτυγμα του κώνου** και αποτελείται από έναν κύκλο και τον κυκλικό τομέα ΟΑΒ. Το μήκος του τόξου του κυκλικού τομέα είναι ίσο με το μήκος του κύκλου δηλαδή $S_{\overset{\frown}{AB}} = 2\pi R$ οπότε $E_{\Pi} = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot h = \pi R h$.

Σ' έναν κόλουρο κώνο θεωρούμε μια εγγεγραμμένη και μια περιγεγραμμένη κόλουρη κανονική πυραμίδα και ότι το πλήθος των πλευρών των βάσεών τους διπλασιάζεται συνεχώς. Ο όγκος και η παράπλευρη επιφάνεια της εγγεγραμμένης κόλουρης κανονικής πυραμίδας θα αυξάνεται, θα είναι όμως μικρότερη από τον όγκο και την επιφάνεια της περιγεγραμμένης κόλουρης κανονικής πυραμίδας, που με τη σειρά τους ελαττώνονται. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένας αριθμός V στον οποίο τείνουν οι όγκοι των δύο κόλουρων κανονικών πυραμίδων. Έτσι, ο τύπος του όγκου της κόλουρης κανονικής πυραμίδας θα πάρει τη μορφή:

$$V = \frac{1}{3}(\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \pi \rho^2} + \pi \rho^2)\upsilon = \ldots = \frac{1}{3}\pi(R^2 + R\rho + \rho^2)\upsilon$$

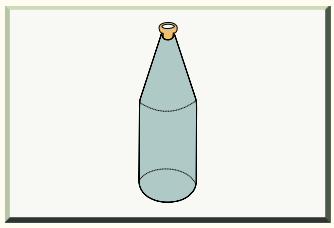
Αντίστοιχα με τις προηγούμενες παρατηρήσεις θα πάρουμε τον τύπο:

$$E_{\Pi} = \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi\rho)h = \pi(R + \rho)h$$

$$E_{ολ} = \pi(R + \rho)h + \pi R^2 + \pi\rho^2 = \pi(R^2 + \rho^2 + Rh + \rho h)$$

όπου R και ρ οι ακτίνες των βάσεων και h η γενέτειρα.

13.4 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ



Ένα αντιβιοτικό κυκλοφορεί σε συσκευασία φιάλης που το μισό πάνω μέρος της είναι κωνικό και το μισό κάτω μέρος κυλινδρικό.

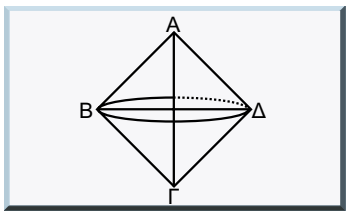
Ένας ασθενής έχει εντολή γιατρού να παίρνει για 1 εβδομάδα το αντιβιοτικό αυτό. Ο ασθενής διαπίστωσε ότι μετά από δύο ημέρες είχε καταναλώσει το περιεχόμενο της φιάλης ακριβώς στο μισό ύψος. Η ποσότητα που απέμεινε αρκεί για το υπόλοιπο της εβδομάδας ή θα πρέπει να αγοράσει και δεύτερη φιάλη;

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α στρέφεται κατά 180° γύρω από τη διαγώνιο ΑΓ. Να περιγράψετε το στερεό που διαγράφεται και να υπολογίσετε τον όγκο του και το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

Λύση

Το στερεό που διαγράφεται αποτελείται από δύο ίσους κώνους με κοινή βάση. Το ύψος του κάθε κώνου είναι ίσο με την ακτίνα της βάσης του και ίσο με το μισό της διαγωνίου του τετραγώνου, δηλαδή



$$\upsilon = \rho = \frac{\delta}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$$

Ο όγκος του στερεού είναι διπλάσιος από τον όγκο ενός κώνου.

Άρα: $V = 2\frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon$ ή $V = \frac{\pi\alpha^2\sqrt{2}}{6}$

Η επιφάνεια του στερεού αποτελείται μόνο από τις παράπλευρες επιφάνειες των δύο κώνων.

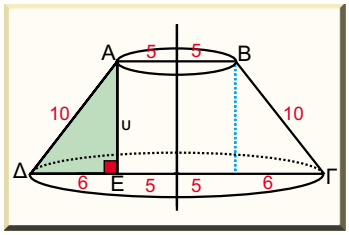
Άρα: $E_{\Pi} = 2\pi\rho h = 2\pi\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\alpha = \pi\alpha^2\sqrt{2}.$

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένα ισοσκελές τραπέζιο στρέφεται κατά 180° γύρω από την κοινή μεσοκάθετο των βάσεων. Αν η μεγάλη του βάση έχει μήκος 22 cm και όλες οι άλλες πλευρές έχουν μήκος από 10 cm, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που σχηματίζεται κατά την περιστροφή.

Λύση

Το στερεό που σχηματίζεται είναι κόλουρος κώνος με ακτίνες βάσεων R=11 και ρ=5 και απόστημα h=10. Για το ύψος ισχύει:



$$AE^2 = A\Delta^2 - \Delta E^2 \quad \text{ή} \quad \upsilon^2 = 10^2 - 6^2 \quad \text{ή τέλος} \quad \upsilon = 8$$

Για τον όγκο του:

$$V = \frac{1}{3}h(R^2 + R\cdot\rho + \rho^2)\upsilon = 5\cdot 360\pi \text{ cm}^2$$

και για την ολική επιφάνεια:

$$E_{ολ} = \pi(R^2 + \rho^2 + R\cdot h + \rho\cdot h) = 306\pi \text{ cm}^2 .$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

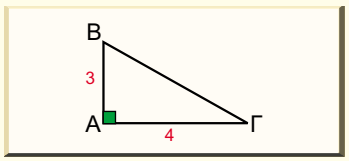
1 Πώς θα περιγράφατε το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή κατά 360° ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από την υποτείνουσα;

2 Τέμνοντας έναν κώνο με το μεσοκάθετο επίπεδο του ύψους του, ο κόλουρος κώνος τι ποσοστό του αρχικού όγκου έχει;

3 Πότε θα έχουμε μεγαλύτερη αύξηση του όγκου ενός κώνου; Όταν τριπλασιάσουμε το ύψος του ή όταν διπλασιάσουμε την ακτίνα της βάσης του;

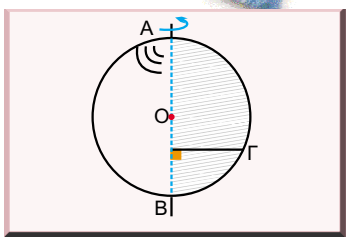
4 Η τομή ενός κώνου με ένα επίπεδο, που περιέχει το ύψος του, τι σχήμα είναι;

5 Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) το στρέφουμε κατά 360° μια φορά γύρω από την πλευρά ΑΒ και μια φορά γύρω από την πλευρά ΑΓ. Σε ποια περίπτωση σχηματίζεται κώνος με το μεγαλύτερο όγκο; Τι παρατηρείτε για τα εμβαδά των παράπλευρων επιφανειών στις δυο περιπτώσεις;



6 Ένα κανονικό πεντάγωνο περιστρέφεται κατά 360° γύρω από το φορέα μιας ακτίνας του. Να περιγράψετε από ποια γνωστά στερεά αποτελείται το στερεό που σχηματίζεται.

13.5 Σφαίρα

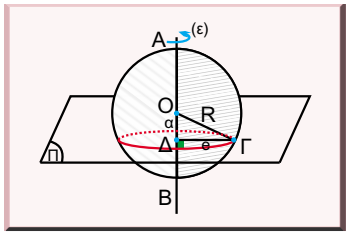


Αν πάρουμε ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και το στρέψουμε κατά 360° γύρω από την ΑΒ, τότε θα πάρουμε ένα στερεό που καλείται **σφαίρα**. **Κέντρο** και **ακτίνα** της σφαίρας καλούμε το κέντρο και την ακτίνα αντίστοιχα του ημικυκλίου. Μία σφαίρα με κέντρο Ο και ακτίνα R συμβολίζεται (Ο,R). **Σφαιρική** επιφάνεια καλείται η επιφάνεια που γράφει το ημικύκλιο. Κάθε σημείο αυτής της επιφάνειας απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση ίση με την ακτίνα της. Αυτή ακριβώς η ιδιότητα μας επιτρέπει να ορίσουμε τη σφαιρική επιφάνεια, όπως και την ίδια τη σφαίρα και με τον ακόλουθο τρόπο.

Σφαιρική επιφάνεια καλείται το σύνολο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από ένα ορισμένο σημείο.

Σφαίρα κέντρου Ο και ακτίνας ρ καλείται το σύνολο των σημείων Μ του χώρου για τα οποία ΜΟ≤ρ.

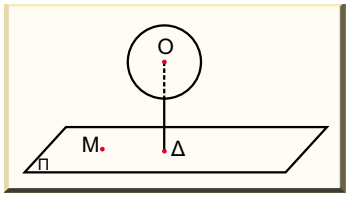
Το γεγονός ότι η σφαίρα παράγεται από ένα κύκλο έχει ως συνέπεια να δανείζεται στοιχεία και χαρακτηρισμούς απ' αυτόν. Εκτός από το κέντρο και την ακτίνα που αναφέραμε παραπάνω, έχουμε και τα εξής:



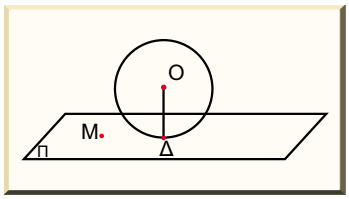
Χορδή σφαίρας καλείται κάθε ευθύγραμμο τμήμα που τα άκρα του είναι σημεία της επιφάνειας της σφαίρας.

Διάμετρος σφαίρας καλείται κάθε χορδή που περνά από το κέντρο της. Κάθε διάμετρος έχει μήκος διπλάσιο από την ακτίνα της.

Τη συσχέτιση σφαίρας-κύκλου μπορούμε να τη διακρίνουμε και στα παρακάτω.



Έστω μια σφαίρα (Ο,R) και ένα επίπεδο Π. Θεωρούμε μια διάμετρο ΑΒ της σφαίρας κάθετη στο επίπεδο στο σημείο Δ. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με τη σχέση της απόστασης ΟΔ=α και της ακτίνας R.

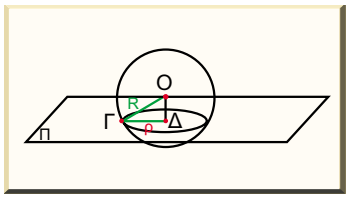


α) Αν α>R, τότε για κάθε σημείο Μ του επιπέδου Π ισχύει ΟΜ>α (ΟΜ πλάγιο, ΟΔ κάθετος) άρα το Μ όπως και το Δ θα είναι εξωτερικά σημεία της σφαίρας. Η σφαίρα και το επίπεδο δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

β) Αν α=R, τότε το Δ θα είναι και σημείο της σφαιρικής επιφάνειας. Για κάθε άλλο σημείο Μ του επιπέδου Π, θα είναι

ΟΜ>ΟΔ, άρα η σφαίρα και το επίπεδο θα έχουν μόνο ένα κοινό σημειο το Δ και θα λέμε οτι **εφάπτονται**.

γ) Αν α<R, τότε θεωρούμε στο επίπεδο Π ένα κύκλο (Δ,ρ) με $\rho = \sqrt{R^2 - \alpha^2}$. Αν Γ ένα τυχαίο σημείο του κύκλου αυτού, τότε $ΓΟ = \sqrt{ΓΔ^2 + ΟΔ^2} = ... = R$, δηλαδή το Γ ανήκει στη σφαίρα. Σ' αυτή την περίπτωση τα κοινά σημεία της σφαίρας και του επιπέδου είναι τα σημεία του κύκλου που προαναφέραμε. Λέμε τότε ότι η σφαίρα και το επίπεδο **τέμνονται**.



Στην ειδική περίπτωση όπου α=0, τότε το κέντρο και η ακτίνα αυτού του κύκλου είναι τα αντίστοιχα της σφαίρας και ο κύκλος καλείται **μέγιστος κύκλος** της σφαίρας, διότι σε κάθε άλλη περίπτωση ρ<R.

Πόρισμα 13.8

Από τρία σημεία μιας σφαιρικής επιφάνειας περνά ένας κύκλος.

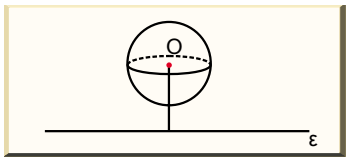
Θεώρημα 13.9

Από δύο σημεία μιας σφαιρικής επιφάνειας περνά μόνο ένας μέγιστος κύκλος.

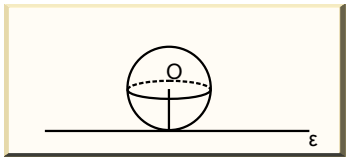
Θεώρημα 13.10

Το μικρότερο σε μήκος τόξο, που έχει άκρα δυο σημεία μιας σφαιρικής επιφάνειας, είναι τόξο μέγιστου κύκλου.

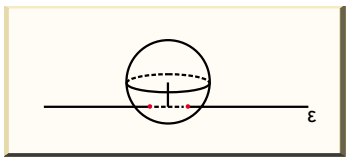
Για τη θέση μιας σφαίρας (Ο,R) και μιας ευθείας (ε) παρατηρούμε ότι η (ε) και το Ο ορίζουν επίπεδο που τέμνει την επιφάνεια της σφαίρας κατά μέγιστο κύκλο. Τα κοινά σημεία της σφαίρας και της ευθείας θα αναζητηθούν στον κύκλο αυτό.



Αν επομένως α είναι η απόσταση του Ο από την (ε) τότε:



- Για α>R, η ευθεία και η σφαίρα δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Για α=R, η ευθεία και η σφαίρα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο (**εφάπτονται**).
- Για α<R, έχουν δυο μόνο κοινά σημεία (**τέμνονται**).
- Στην ειδική περίπτωση όπου α=0 η ευθεία ορίζει μια διάμετρο της σφαίρας.

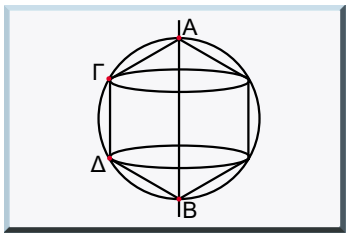


Μέτρηση σφαίρας

Για τον υπολογισμό του όγκου της σφαίρας και του εμβαδού της

επιφάνειάς της θα ακολουθήσουμε μια διαδικασία με διαδοχικές προσεγγίσεις, όπως και στη μέτρηση του κύκλου.

Θεωρούμε, λοιπόν, ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και το "μισό" ενός κανονικού πολυγώνου, κατά προτίμηση με άρτιο πλήθος πλευρών π.χ. εξάγωνο. Όταν το σύστημα στρέφεται κατά 360°, τότε το ημικύκλιο δημιουργεί, τη σφαίρα και το μέρος του κανονικού αυτού πολυγώνου ένα στερεό.



Στη συγκεκριμένη περίπτωση το στερεό αποτελείται από έναν κύλινδρο και δυο κώνους. Με συνεχή διπλασιασμό του πλήθους των πλευρών του κανονικού πολυγώνου το παραγόμενο στερεό (που θα αποτελίται από κώνους, κόλουρους κώνους και ίσως από έναν κύλινδρο) θα προσεγγίσει πολύ ικανοποιητικά τη σφαίρα και το ίδιο θα συμβαίνει με τον όγκο του και την επιφάνειά του.

Με τη σειρά αυτή των συλλογισμών μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο και το εμβαδό της σφαίρας.

Ένας δεύτερος τρόπος υπολογισμού των ίδιων μεγεθών μπορεί να γίνει με τη βοήθεια δυο θεωρημάτων, που διατύπωσε ο Έλληνας μαθηματικός Πάππος ο Αλεξανδρινός ($4^{ος}$ αιώνας μ.Χ.), τα οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 13.11

Αν ένα επίπεδο σχήμα στραφεί κατά 360° γύρω από έναν άξονα του επιπέδου του, που δεν έχει κοινά εσωτερικά σημεία μ' αυτό, τότε ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού του σχήματος επί το μήκος του κύκλου που γράφει κατά την περιστροφή το κέντρο βάρους του σχήματος.

Θεώρημα 13.12

Αν μια επίπεδη γραμμή στραφεί κατά 360° γύρω από μια ευθεία του επιπέδου της, που δεν έχει κοινά σημεία μαζί της, τότε το εμβαδό της επιφάνειας που γράφει η γραμμή αυτή ισούται με το γινόμενο του μήκους της επί το μήκος του κύκλου, που γράφει το κέντρο βάρους της κατά την περιστροφή της.

Στη διατύπωση των δυο θεωρημάτων εμφανίζεται η έννοια του κέντρου βάρους ενός σχήματος. Στο τρίγωνο συναντήσαμε το κέντρο βάρους σαν το σημείο που συντρέχουν οι τρεις διάμεσοι. Δε θα δώσουμε εδώ τον ορισμό του κέντρου βάρους ενός γεωμετρικού

σχήματος, αλλά θα αρκεστούμε σε μερικές παρατηρήσεις.

Παρατηρήσεις

α) Στη φυσική σαν κέντρο βάρους σώματος ορίζεται ένα σημείο στο οποίο μπορεί το σώμα να ισορροπήσει αν στηριχτεί πάνω σ' αυτό με οποιονδήποτε προσανατολισμό.

β) Αν ένα σώμα είναι από ομογενοποιημένο υλικό, τότε το γεωμετρικό κέντρο βάρους του ταυτίζεται με το φυσικό κέντρο βάρους.

γ) Αν ένα σώμα ισορροπεί κρεμασμένο από οποιοδήποτε σημείο του με ένα νήμα, η προέκταση του νήματος περνά από το κέντρο βάρους του (εμπειρικός τρόπος εύρεσης του κέντρου βάρους).

Για τη μέτρηση της σφαίρας, θα αποδείξουμε τους τύπους όγκου και εμβαδού με τη βοήθεια των θεωρημάτων του Πάππου.

Για τον ημικυκλικό δίσκο ακτίνας R αποδεικνύεται ότι το κέντρο βάρους του είναι ένα σημείο πάνω στον άξονα συμμετρίας του που απέχει από το κέντρο απόσταση ίση με $\frac{4R}{3\pi}$.

Για το ημικύκλιο ακτίνας R αποδεικνύεται ότι το κέντρο βάρους βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας του και σε απόσταση $\frac{2R}{\pi}$ από το κέντρο του.

Για τον όγκο της σφαίρας ακτίνας R ισχύουν: η σφαίρα παράγεται από την περιστροφή του ημικυκλικού δίσκου ακτίνας R.

Το κέντρο βάρους του ημικυκλικού δίσκου γράφει κύκλο ακτίνας $\rho = \frac{4R}{3\pi}$.

Το μήκος του κύκλου αυτού είναι $L = 2\pi\rho = \frac{8R}{3}$.

Άρα, ο όγκος της σφαίρας είναι $V = \frac{1}{2}\pi R^2 \frac{8}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Για την επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R ισχύουν: η σφαιρική επιφάνεια παράγεται από την περιστροφή ημικυκλίου ακτίνας R.

Το κέντρο βάρους του ημικυκλίου γράφει κύκλο ακτίνας $\rho = \frac{2R}{\pi}$.

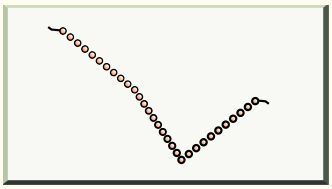
Το μήκος του κύκλου αυτού είναι $L=4R$.

Το μήκος του ίδιου του ημικυκλίου είναι $\frac{1}{2}2\pi R = \pi R$.

Άρα, η επιφάνεια της σφαίρας ισούται με $E=4R\cdot\pi R=4\pi R^2$.

13.5 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας κοσμηματοποιός έχει παραγγελία να κατασκευάσει ένα κολιέ μήκους 40 cm με χάντρες από άργυρο σε σχήμα σφαίρας. Η επιθυμία του πελάτη του είναι να περιέχει το κολιέ 40 χάντρες διαμέτρου 1 cm ή 80 χάντρες διαμέτρου 0,5 cm. Σε ποια περίπτωση θα χρησιμοποιήσει ο κοσμηματοποιός περισσότερο άργυρο;

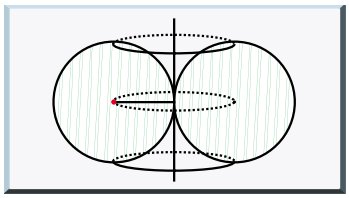


1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένας κύκλος ακτίνας R στρέφεται κατά 360° γύρω από μία εφαπτομένη του ευθεία. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

Λύση

Το εμβαδόν του κύκλου είναι πR^2. Κέντρο βάρους του είναι το κέντρο του, το οποίο γράφει έναν κύκλο ακτίνας R και μήκους $L=2\pi R$.



Σύμφωνα με το θεώρημα του Πάππου, ο όγκος του στερεού θα είναι ίσος με

$$V=\pi R^2\cdot 2\pi R=2\pi^2R^3$$

Το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού είναι

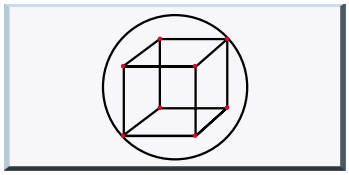
$$E=2\pi R\cdot 2\pi R=4\pi^2R^2.$$

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μία σφαίρα είναι περιγεγραμμένη σ' έναν κύβο ακμής α. Να υπολογίσετε το λόγο του όγκου της σφαίρας προς τον όγκο του κύβου.

Λύση

Η διαγώνιος του κύβου είναι $\alpha\sqrt{3}$. Το ίδιο μήκος έχει και η διάμετρος της σφαίρας.



Άρα, η ακτίνα της είναι $R=\frac{1}{2}\alpha\sqrt{3}$.

Ο όγκος της σφαίρας είναι $V_{σφ} = \frac{4}{3}πR^3 = \frac{πα^3\sqrt{3}}{2}$

Ο όγκος του κύβου είναι $V_κ = α^3$

Άρα ο ζητούμενος λόγος είναι $\frac{V_{σφ}}{V_κ} = \frac{\frac{πα^3\sqrt{3}}{2}}{α^3} = \frac{π\sqrt{3}}{2}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Γιατί όταν ένα επίπεδο είναι κάθετο στο άκρο μιας ακτίνας μιας σφαίρας έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τη σφαίρα;

2 Αν ΑΒ μια διάμετρος σφαίρας και Γ ένα τυχαίο σημείο της σφαίρας, γιατί η γωνία $\widehat{ΑΓΒ}$ είναι ορθή;

3 Δύο ίσοι κύκλοι μιας σφαίρας τέμνονται κατά μια διάμετρό τους;

4 Η ακτίνα ΟΑ μιας σφαίρας έχει μήκος ρ. Το μεσοκάθετο επίπεδο της ΟΑ τέμνει τη σφαίρα κατά έναν κύκλο. Ποια είναι η ακτίνα του κύκλου αυτού;

5 Με διαμέτρους τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, γράφουμε τρεις σφαίρες. Ποια σχέση έχουν οι επιφάνειές τους;

6 Πόσα κοινά σημεία έχουν δυο σφαίρες (Ο,R) και (Κ,ρ) αν $|R-ρ| < OK < R+ρ$. Πού βρίσκονται τα σημεία αυτά;

7 Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι δυνατόν μια σφαίρα και μια ευθεία να έχουν τρία κοινά σημεία.

13.6 Τα κανονικά στερεά

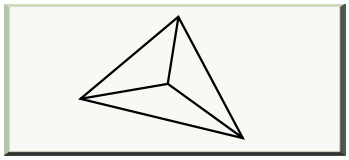
Στο 10ο κεφάλαιο της επιπεδομετρίας μελετήσαμε τα κανονικά πολύγωνα και τις ιδιότητές τους. Αντίστοιχα αυτών, στη στερεομετρία είναι τα κανονικά πολύεδρα.

Ορισμός

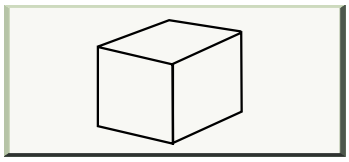
Κανονικό πολύεδρο ονομάζουμε ένα πολύεδρο του οποίου όλες οι έδρες είναι ίσα κανονικά πολύγωνα και όλες οι πολύεδρες γωνίες είναι ίσες.

Γνωρίζουμε μόνο πέντε κανονικά πολύεδρα.

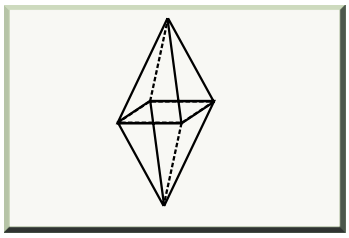
- Το κανονικό τετράεδρο με έδρες 4 ισόπλευρα τρίγωνα που ανά τρία έχουν κοινή κορυφή.



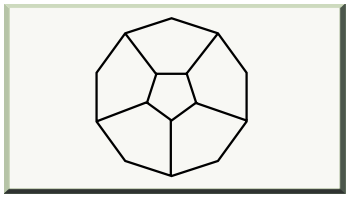
- Το κανονικό εξάεδρο (ο κύβος) με έδρες 6 τετράγωνα που ανά τρία έχουν κοινή κορυφή.



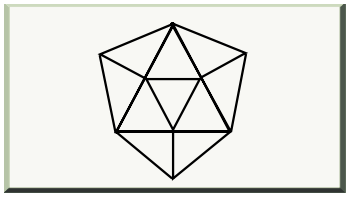
- Το κανονικό οκτάεδρο με έδρες 8 ισόπλευρα τρίγωνα που ανά τέσσερα έχουν κοινή κορυφή.



- Το κανονικό δωδεκάεδρο με έδρες 12 κανονικά πεντάγωνα που ανά τρία έχουν κοινή κορυφή.



- Το κανονικό εικοσάεδρο με έδρες 20 ισόπλευρα τρίγωνα που ανά πέντε έχουν κοινή κορυφή.



Το πλήθος των ακμών και των κορυφών για τα πολύεδρα αυτά δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

	ακμές	κορυφές
τετράεδρο	6	4
εξάεδρο	12	8
οκτάεδρο	12	6
δωδεκάεδρο	30	20
εικοσάεδρο	30	12

Κάθε κανονικό πολύεδρο ορίζει τρεις σφαίρες. Μια που περνά από όλες τις κορυφές του, μια άλλη που εφάπτεται σ' όλες τις έδρες του και μία τρίτη που εφάπτεται σ' όλες τις ακμές του. Οι τρεις αυτές σφαίρες είναι ομόκεντρες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται κύλινδρος ύψους 7 m. Η βάση του είναι περιγεγραμμένος κύκλος σε τετράγωνο πλευράς $α=3\sqrt{2}$ m. Να βρεθεί ο όγκος του κυλίνδρου.

2. Μία εταιρία παράγει 1000 κουτιά κονσέρβας την ημέρα ύψους 12 cm και διαμέτρου 8 cm. Η παράπλευρη επιφάνεια του κουτιού καλύπτεται από χάρτινη ετικέτα. Το χαρτί για την ετικέντα κοστίζει 1200 δρχ/m^2. Πόσα χρήματα ξοδεύει η εταιρία για τις ετικέτες κάθε μέρα;

3 Να βρεθεί ο όγκος και το εμβαδό του στερεού που παράγονται, όταν ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ=6, ΒΓ=4, περιστραφεί κατά 360° γύρω από άξονα παράλληλο της ΑΒ, ο οποίος απέχει από την ΑΒ απόσταση 3.

4 Δύο κύλινδροι θα λέγονται όμοιοι, αν προκύπτουν από όμοια ορθογώνια που περιστράφηκαν γύρω από μια ομόλογη πλευρά τους. Να δείξετε ότι:

α) Δύο όμοιοι κύλινδροι έχουν τις ακτίνες τους ανάλογες προς τα ύψη τους.

β) Τα εμβαδά των κυρτών επιφανειών δύο όμοιων κυλίνδρων είναι ανάλογα των τετραγώνων των ακτίνων τους.

γ) Οι όγκοι δύο όμοιων κυλίνδρων είναι ανάλογοι προς τους κύβους των ακτίνων τους.

5 Να υπολογίσετε το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας κώνου που έχει όγκο V=324π cm^3 και ακτίνα βάσης R=9 cm.

6 Αν η εγγεγραμμένη σε κώνο κανονική τριγωνική πυραμίδα έχει όγκο $\sqrt{3}$, να βρεθεί το εμβαδό της κυρτής επιφάνειας του κώνου, όταν το ύψος έχει μήκος 1.

7 Περιστρέφουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90°$) κατά 360° γύρω από τις δύο κάθετες πλευρές του και παίρνουμε δύο κώνους με αντίστοιχους όγκους $V_β$, $V_γ$. Στη συνέχεια περιστρέφουμε το τρίγωνο γύρω από την υποτείνουσά του και παίρνουμε ένα στερεό με όγκο $V_α$. Να δείξετε ότι: $\frac{1}{V_α^2}=\frac{1}{V_β^2}+\frac{1}{V_γ^2}$.

8 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ=ΑΔ=4 cm και μεγάλη βάση ΓΔ=7 cm. Αν αυτό περιστραφεί γύρω από την ευθεία ΑΔ, να υπολογιστεί ο όγκος και το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του στερεού που προκύπτει.

9 Να βρεθεί το εμβαδό επιφάνειας σφαίρας όγκου $V=\frac{256}{3}\pi\ cm^3$.

10 Έστω ΑΒΓ ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ΒΓ=α και κάθετες πλευρές ΑΓ=β, ΑΒ=γ. Κατασκευάζουμε τις σφαίρες με διαμέτρους α, β, γ. Αν V_α, V_β, V_γ είναι οι όγκοι των σφαιρών αυτών, να δείξετε ότι: $\frac{V_\alpha}{\alpha}=\frac{V_\beta}{\beta}+\frac{V_\gamma}{\gamma}$.

11 Θεωρούμε δύο διαδοχικά τμήματα ΑΓ=2α, ΒΓ=α και τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ, ΓΒ, ΑΒ προς το ίδιο μέρος της ΑΒ. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται κατά την περιστροφή του καμπυλόγραμμου τριγώνου που ορίζεται από τα τρία ημικύκλια, γύρω από την ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Από χορδή $AB=R\sqrt{3}$ της βάσης κυλίνδρου με ακτίνα R θεωρούμε επίπεδο παράλληλο στο ύψος του. Να βρεθεί ο όγκος των δύο μερών στα οποία διαιρείται ο κύλινδρος.

2 Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις α και β, όπου α<β. Γύρω από ποια πλευρά του πρέπει να στραφεί το ορθογώνιο, ώστε ο κύλινδρος που προκύπτει να έχει: i) τη μεγαλύτερη επιφάνεια, ii) το μεγαλύτερο όγκο;

3 Δίνεται ορθογώνιο, το οποίο στρέφεται γύρω από άξονα του επιπέδου του, παράλληλο μιας πλευράς του και ο οποίος δεν τέμνει το ορθογώνιο. Να δείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στρεού ισούται με το εμβαδό του ορθογωνίου επί το μήκος του κύκλου, που διαγράφει το κέντρο του ορθογωνίου.

4 Σε κώνο με ακτίνα R=9 και γενέτειρα με μήκος 15 εγγράφεται κανονική τριγωνική πυραμίδα. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που τα σημεία του είναι εξωτερικά της πυραμίδας και εσωτερικά του κώνου, καθώς και τα μήκη των τομών των δύο στερεών με επίπεδο παράλληλο στη βάση σε απόσταση από αυτή ίση με το $\frac{1}{3}$ του μήκους του ύψους.

5 Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ=3, ΑΔ=4 και ΔΓ=6. Από την κορυφή Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ η οποία τέμνει τη ΔΓ στο Ε. Να βρεθούν ο όγκος και το εμβαδό του σχήματος που διαγράφει το τρίγωνο ΒΕΓ, καθώς περιστρέφεται γύρω από την ΑΔ.

6 Να προσδιοριστεί η τομή κώνου i) με επίπεδο παράλληλο στη βάση του και ii) με επίπεδο που διέρχεται από το ύψος του.

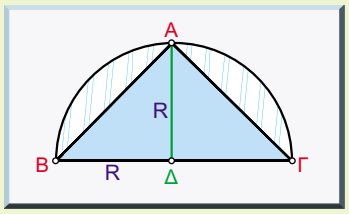
7 Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου τέτοιων, ώστε $MA^2+MB^2=\alpha^2$, όπου Α, Β είναι σταθερά σημεία και α σταθερό ευθύγραμμο τμήμα, είναι σφαίρα.

8 Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και το εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ από το σημείο Α, τέτοιο, ώστε ΟΑ=10. Να προσδιοριστεί το R, ώστε το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται κατά την πλήρη περιστροφή του ΑΒ περί την ΟΑ, να είναι ίσο με το εμβαδό της σφαίρας (Ο,R).

9 Το διπλανό σχήμα στρέφεται κατά 180° γύρω

από τον άξονα ΑΔ. Να βρεθεί για το σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή του γραμμοσκιασμένου τμήματος, ο όγκος και το εμβαδό

.



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 13ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Αν ένα επίπεδο έχει με ένα κύλινδρο κοινά σημεία μόνο αυτά μιας γενέτειρας, τότε ονομάζεται εφαπτόμενο επίπεδο. Να κατασκευάσετε το εφαπτόμενο επίπεδο κυλίνδρου σε σημείο Α, όταν:

α) Το Α είναι σημείο της επιφάνειάς του.

β) Το Α είναι εκτός του κυλίνδρου.

2 Σε ένα τετραπλευρικό πρίσμα, οι τρεις διαγώνιοι διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να δείξετε ότι και η τέταρτη διαγώνιος διέρχεται από το ίδιο σημείο και ότι το πρίσμα είναι παραλληλεπίπεδο.

3 Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του χώρου, που ο λόγος $\lambda = \frac{MA}{MB}$ των αποστάσεών τους από δύο σταθερά σημεία Α, Β είναι σταθερό ($\lambda \neq 1$), είναι σφαίρα.

4 Δίνεται ένας κώνος με ακτίνα βάσης $\rho = 2\alpha$ και ύψος $\upsilon = 4\alpha$ και ένας κύλινδρος ακτίνας $\rho' = \alpha$ και ύψους $\upsilon' = 4\alpha$ που τοποθετούνται, ώστε να έχουν τον ίδιο άξονα και η μία βάση του κυλίνδρου να είναι στο ίδιο επίπεδο με τη βάση του κώνου. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που περιλαμβάνεται μεταξύ του κώνου και του κυλίνδρου.

5 Ένα επίπεδο παράλληλο στο ύψος κυλίνδρου τέμνει μία βάση κατά χορδή ΑΒ και το παράλληλο προς αυτό επίπεδο που διέρχεται από το ύψος τέμνει τη βάση κατά τη διάμετρο ΓΔ. Αν ο λόγος των εμβαδών των τομών του κυλίνδρου με τα δύο επίπεδα είναι $\frac{1}{2}$, να βρεθεί ο όγκος και το εμβαδό του εγγεγραμμένου στο κύλινδρο πρίσματος με βάση το τραπέζιο που έχει βάσεις ΑΒ, ΓΔ.

6 Να δείξετε ότι κάθε τετράεδρο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε σφαίρα.

7 Δίνεται τριγωνικό πρίσμα ΑΒΓ.Α΄Β΄Γ΄ με βάσεις ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς α και ύψος $\upsilon = 2\alpha$. Αν η προβολή του Α΄ στο επίπεδο (Α,Β,Γ) είναι το μέσο της ΒΓ, να βρεθεί το εμβαδό του.

8 Σε σφαίρα (Ο,R) να περιγράψετε κώνο με όγκο $\frac{49}{9}\pi R^3$.

9 Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα Α.ΒΓΔΕ με παράπλευρο ύψος $h = 18$ και πλευρά βάσης $\alpha = 18$. Φέρουμε δύο παράλληλα προς τη βάση επίπεδα σε αποστάσεις 4 και 8 αντίστοιχα από τη βάση. Τα επίπεδα αυτά τέμνουν την πυραμίδα κατά ΖΗΘΙ και ΚΛΜΝ. Αν V_1 είναι ο όγκος της πυραμίδας Α.ΒΓΔΕ, V_2 ο όγκος της Α.ΖΗΘΙ και V_3 ο όγκος της Α.ΚΛΜΝ, να δείξετε ότι $\frac{V_1}{27} = \frac{V_2}{8} = V_3$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 13ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

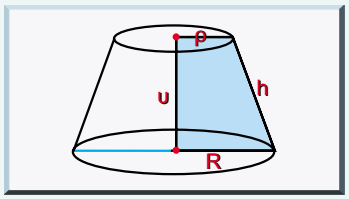
1 Ένα δοχείο σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις βάσης 30 cm και 40 cm και ύψος 50 cm είναι πανταχόθεν κλειστό και περιέχει νερό σε ύψος 20 cm. Αν το στηρίξουμε σε μια άλλη έδρα έτσι ώστε η διάσταση των 30 cm να γίνει ύψος, σε ποιο ύψος θα φτάσει το νερό;

2 Σε μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα όλες οι ακμές έχουν μήκος ίσο με α. Να υπολογίσετε τον όγκο της και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.

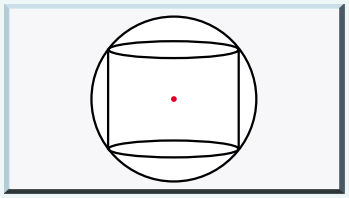
3 Σε έναν κύλινδρο διπλασιάζουμε το ύψος του και υποδιπλασιάζουμε την ακτίνα του. Ο όγκος του διπλασιάζεται; Υποδιπλασιάζεται; Μένει αμετάβλητος;

4 Ένας κώνος και ένας κύλινδρος έχουν ίσες ακτίνες ρ και ίσα ύψη υ. Τι μεταβολή πρέπει να δώσουμε στο ύψος του κυλίνδρου ώστε να έχουν τον ίδιο όγκο; Για το ίδιο αποτέλεσμα, πόση πρέπει να γίνει η ακτίνα του κώνου;

5 Σε έναν κόλουρο κώνο, ποια σχέση συνδέει τις ακτίνες ρ και R των βάσεων, το ύψος του υ και το παράπλευρο ύψος του h;



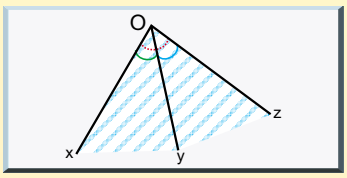
6 Στο παρακάτω σχήμα η σφαίρα είναι περιγεγραμμένη στον κύλινδρο. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι 8 και η ακτίνα της βάσης του 3, να υπολογίσετε τον όγκο της σφαίρας και την επιφάνειά της.



ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Το 13ο και τελευταίο κεφάλαιο το αφιερώσαμε στη μελέτη των στερεών σχημάτων. Ταξινομούνται σε δύο μεγάλες ομάδες. Τα πολύεδρα και τα στερεά εκ περιστροφής. Από τα πολύεδρα μελετήσαμε τα πρίσματα και τις πυραμίδες και από τα στερεά εκ περιστροφής τον κύλινδρο, τον κώνο και τη σφαίρα.

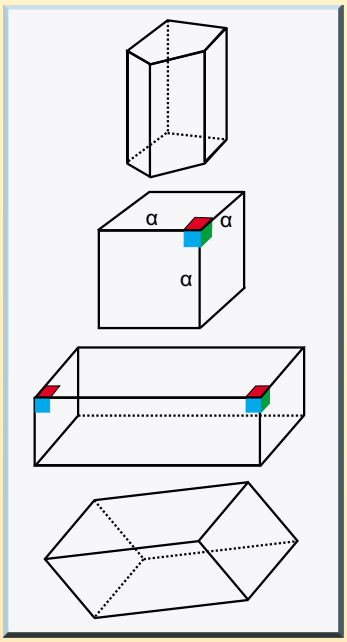
Αρχικά δώσαμε τον ορισμό της τρίεδρης γωνίας.



Στη συνέχεια μελετήσαμε το πρίσμα, και κυρίως το ορθό πρίσμα. Καθορίσαμε και ονομάσαμε τα στοιχεία του (βάσεις, παράπλευρες έδρες, παράπλευρες ακμές, κορυφές, ύψος, διαγώνιες, διαγώνιο επίπεδο).

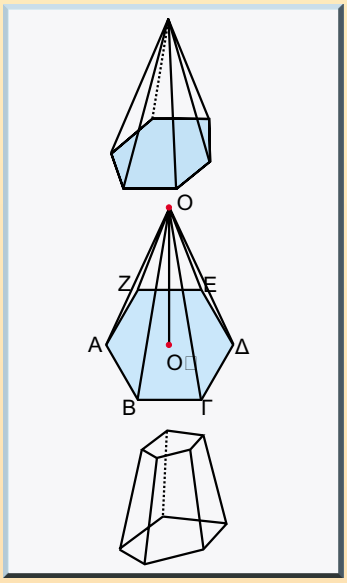
Μια ειδική κατηγορία πρισμάτων είναι τα παραλληλεπίπεδα, τα οποία πραγματευτήκαμε σε ξεχωριστή ενότητα. Στην ίδια ενότητα συμπεριλάβαμε το ορθό πρίσμα και κυρίως το κανονικό (ορθό με βάσεις κανονικά πολύγωνα), όπως επίσης το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (όλες οι έδρες ορθογώνια) και τον κύβο, τα οποία έτυχαν ιδιαίτερης προσοχής.

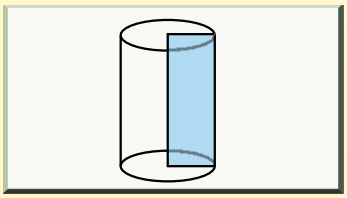
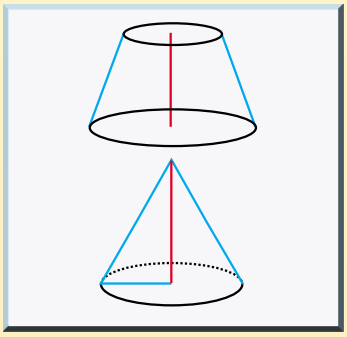
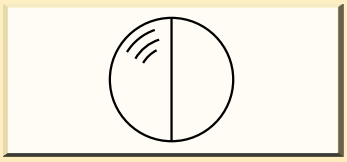
Για τη μέτρηση των πρισμάτων καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι ο όγκος είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης επί το ύψος και ότι το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας ορθού πρίσματος είναι ίσο με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης επί το ύψος.



Στην επόμενη παράγραφο εξετάσαμε την πυραμίδα και ορίσαμε τα στοιχεία της (κορυφή, βάση, παράπλευρες έδρες, ακμές και ύψος). Μελετήσαμε ακόμη την κανονική πυραμίδα (η βάση είναι κανονικό πολύγωνο και η κορυφή της προβάλλεται στο κέντρο της βάσης) και την κόλουρη πυραμίδα.

Τέλος, δώσαμε τύπους για τον όγκο της πυραμίδας και για το εμβαδόν της επιφάνειάς της.



Επόμενο στερεό, που εξετάσαμε, ήταν ο κύλινδρος (στερεό που προκύπτει από περιστροφή ορθογωνίου γύρω από μία του πλευρά). Δώσαμε τα στοιχεία του (βάση, κυλινδρική επιφάνεια, ύψος, ανάπτυγμα) καθώς και τους τύπους για τον όγκο του και το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.	
Δύο άλλα στερεά εκ περιστροφής είναι ο κώνος (προκύπτει από περιστροφή ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μία κάθετη πλευρά) και το παράγωγό του, ο κόλουρος κώνος. Και για τα στερεά αυτά δώσαμε τα στοιχεία τους, την περιγραφή τους και τους τύπους για τη μέτρηση του όγκου και εμβαδού της επιφάνειάς τους.	
Τελευταίο στη σειρά στερεό ήταν η σφαίρα, (προκύπτει από περιστροφή ημικυκλίου γύρω από τη διάμετρό του). Δόθηκαν κι εδώ τα στοιχεία της (κέντρο, ακτίνα, διάμετρος, χορδή, μέγιστος κύκλος) και οι τύποι για το εμβαδόν της επιφάνειάς της και του όγκου της. Επιπλέον παραθέσαμε και μερικές προτάσεις θεωρητικής σημασίας.	
Αναφέραμε ακόμη, ως εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού του όγκου και του εμβαδού ενός στερεού εκ περιστροφής τα θεωρήματα του Πάππου. Το κεφάλαιο ολοκληρώθηκε με μια σύντομη παρουσίαση των κανονικών πολυέδρων.	