Κεφάλαιο 8

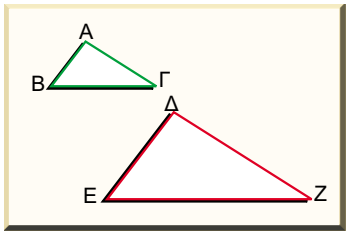
ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

8.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

8.1.1 Σμίκρυνση - Μεγέθυνση και ομοιότητα

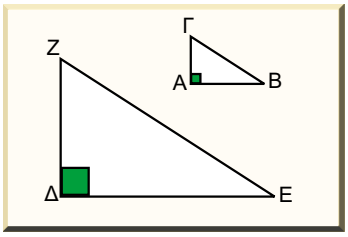
Μελετώντας την ισότητα γεωμετρικών σχημάτων χρησιμοποιήσαμε τη διαδικασία της μετατόπισης και τοποθέτησης του ενός σχήματος πάνω στο άλλο. Διαπιστώσαμε, λοιπόν, ότι το δεύτερο σχήμα προκύπτει από μετατόπιση του πρώτου, δηλαδή το δεύτερο σχήμα αποτελεί πιστό αντίγραφο του πρώτου. Τα δύο αυτά σχήματα έχουν το ίδιο μέγεθος και τα στοιχεία του ενός είναι ίσα ένα προς ένα με τα αντίστοιχα στοιχεία του άλλου. Υπάρχουν, όμως, και αντίγραφα σχημάτων που δεν έχουν το ίδιο μέγεθος με το αρχικό σχήμα. Τα αντίγραφα αυτά προκύπτουν με τη διαδικασία της σμίκρυνσης ή της μεγέθυνσης, έννοιες που μας είναι γνωστές από γεωγραφικούς χάρτες, παιδικά παιχνίδια, φωτογραφίες, φωτοαντίγραφα, σχέδια κλπ.

Παρατηρώντας τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος διαπιστώνουμε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ αποτελεί μεγέθυνση του τριγώνου ΑΒΓ κατά δύο φορές. Τα μήκη των πλευρών ΔΕ, ΕΖ και ΖΔ του τριγώνου ΔΕΖ είναι προφανές ότι είναι διπλάσια των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ αντίστοιχα. Ποια σχέση όμως συνδέει τις γωνίες $\widehat{Δ}$, $\widehat{Ε}$ και $\widehat{Ζ}$ του τριγώνου ΔΕΖ με τις γωνίες $\widehat{Α}$, $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ αντίστοιχα; Η σχέση όμως του διπλασιασμού δεν μπορεί να ισχύει και για τα μέτρα των γωνιών τους, δεδομένου ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι πάντοτε 180°. Υπάρχει

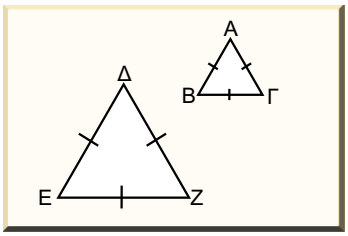


άραγε κάποιου άλλου είδους μεταβολή;

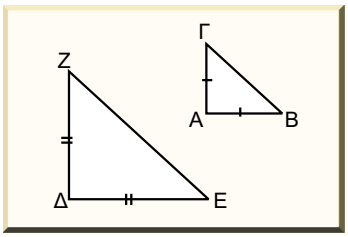
Μεγεθύνουμε τώρα ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^\circ$ κατά τρεις φορές και το τρίγωνο ΔΕΖ αποτελεί τη συγκεκριμένη μεγέθυνση του τριγώνου ΑΒΓ. Παρατηρούμε ότι τα μήκη των πλευρών ΔΕ, ΕΖ και ΖΔ του τριγώνου ΔΕΖ είναι τριπλάσια των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ και η γωνία $\widehat{\Delta} = 90^\circ$, οπότε $\widehat{\Delta} = \widehat{A} = 90^\circ$.



Ομοίως μεγεθύνουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ κατά δύο φορές και παρατηρούμε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι επίσης ισόπλευρο. Άρα $\widehat{E} = \widehat{B} = 60^\circ$.



Τέλος, μεγεθύνουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 45^\circ$ κατά δύο φορές. Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ που προέκυψε με τη διαδικασία της μεγέθυνσης είναι και αυτό ορθογώνιο και ισοσκελές με $\widehat{\Delta} = 90^\circ$ και $\widehat{E} = \widehat{Z} = 45^\circ$.



Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, με τη διαδικασία της μεγέθυνσης, δημιουργούμε ένα αντίγραφο ενός ευθύγραμμου σχήματος που δεν είναι αναγκαστικά ίσο προς αυτό. Οι πλευρές του αντίγραφου σχήματος είναι ανάλογες με τις πλευρές του αρχικού σχήματος και οι γωνίες του ίσες με τις γωνίες του αρχικού. Οι παρατηρήσεις αυτές αποτελούν τη βάση για να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός

Δύο ευθύγραμμα σχήματα ονομάζονται όμοια όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Όπως φαίνεται από τον ορισμό στα όμοια ευθύγραμμα σχήματα υπάρχει μία αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους έτσι, ώστε αν αυτά είναι γωνίες να είναι ίσες, ενώ αν είναι πλευρές να έχουν σταθερό λόγο. Ο λόγος δύο αντίστοιχων πλευρών σε δύο όμοια σχήματα καλείται **λόγος ομοιότητας** και συνήθως συμβολίζεται με λ.

Συμπεράσματα που απορρέουν από τον ορισμό:

1) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια μεταξύ τους.
2) Δύο τετράγωνα είναι πάντοτε όμοια μεταξύ τους.
3) Δύο τρίγωνα όμοια προς τρίτο είναι όμοια και μεταξύ τους.
4) Δύο ίσα τρίγωνα είναι και όμοια, με λόγο ομοιότητας ίσο με 1.

8.1.2 Κατασκευή όμοιων τριγώνων

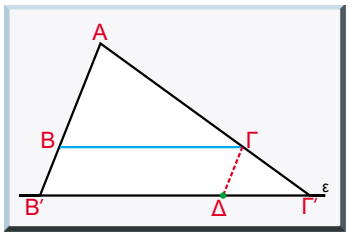
Στις καθημερινές μας δραστηριότητες η παραγωγή όμοιων σχημάτων είναι κάτι το συνηθισμένο και πολύ εύκολο (φωτοαντίγραφα σε σμίκρυνση ή μεγέθυνση, φωτογραφίες κλπ). Εδώ όμως μας ενδιαφέρει η γεωμετρική Κατασκευή όμοιων σχημάτων.

Μια εύκολη κατασκευή τριγώνου όμοιου προς δεδομένο τρίγωνο μπορούμε να πετύχουμε με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 8.1

Κάθε ευθεία παράλληλη προς μία πλευρά ενός τριγώνου που τέμνει τις δύο άλλες σε διαφορετικά σημεία, ορίζει τρίγωνο όμοιο με το αρχικό.

Απόδειξη



Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο και μία ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, η οποία τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Β΄ και Γ΄ αντίστοιχα. Τα δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ΄Γ΄ έχουν $\widehat{A}$ κοινή, $A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{B'}\Gamma'$ (εντός εκτός και επί τα αυτά) και $A\widehat{\Gamma}B = A\widehat{\Gamma'}B'$ (εντός εκτός και επί τα αυτά), δηλαδή τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Ακόμη από το θεώρημα του Θαλή ισχύει $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{A\Gamma}{A\Gamma'}$ (1)

Αν φέρουμε ΓΔ//ΑΒ΄, τότε από το θεώρημα του Θαλή θα έχουμε $\dfrac{B'\Delta}{B'\Gamma'} = \dfrac{A\Gamma}{A\Gamma'}$ (2)

και επειδή το ΒΓΔΒ΄ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε Β΄Δ=ΒΓ η σχέση (2) γίνεται $\dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{A\Gamma}{A\Gamma'}$ (3)

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{A\Gamma}{A\Gamma'} = \dfrac{B\Gamma}{B\Gamma'}$ δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν και τις πλευρές τους ανάλογες, άρα είναι όμοια. ■

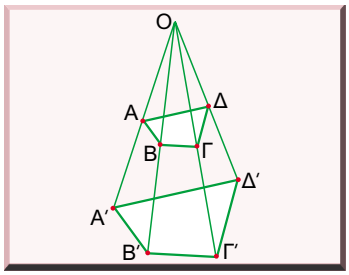
Για να συμβολίσουμε την ομοιότητα των δύο τριγώνων ΑΒΓ και ΑΒ΄Γ΄ γράφουμε ΑΒΓ~ΑΒ΄Γ΄.

Προοπτική κατασκευή δύο όμοιων σχημάτων

Ένας άλλος τρόπος κατασκευής όμοιων πολυγώνων, γνωστός σαν προοπτική κατασκευή όμοιων πολυγώνων είναι ο παρακάτω:

Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα τετράπλευρο όμοιο με το δεδομένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ και με λόγο ομοιότητας λ.

Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Ο και φέρουμε τις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ και ΟΔ. Πάνω σ' αυτές παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα ΟΑ΄=λ·ΟΑ, ΟΒ΄=λ·ΟΒ, ΟΓ΄=λ·ΟΓ και ΟΔ΄=λ·ΟΔ και σχηματίζουμε το νέο τετράπλευρο Α΄Β΄Γ΄Δ΄.



Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι

$$\frac{ΟΑ}{ΟΑ'} = \frac{ΟΒ}{ΟΒ'} = \frac{ΟΓ}{ΟΓ'} = \frac{ΟΔ}{ΟΔ'} = λ$$

και με το αντίστροφο θεώρημα του Θαλή θα έχουμε ΑΒ//Α΄Β΄, ΒΓ//Β΄Γ΄ κτλ.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα (θεώρημα 8.1) τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑ΄Β΄ θα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας

$$\frac{ΟΑ}{ΟΑ'} = \frac{ΟΒ}{ΟΒ'} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = λ$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και

$$\frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{ΔΑ}{Δ'Α'} = λ$$

δηλαδή τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Θα δείξουμε τώρα ότι έχουν ίσες και τις γωνίες τους. Πράγματι εφόσον ΑΒ//Α΄Β΄ θα ισχύουν

$\widehat{ΑΒΟ} = \widehat{Α'Β'Ο}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)

$\widehat{ΟΒΓ} = \widehat{ΟΒ'Γ'}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)

άρα $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΒ'Γ'}$

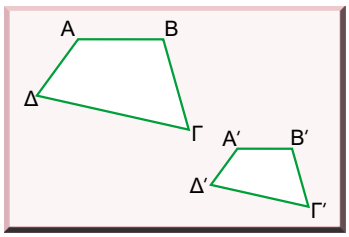
Το ίδιο ισχύει και για τις άλλες γωνίες τους. Άρα τα τετράπλευρα έχουν και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, επομένως είναι όμοια. ■

Η σχέση που έχουν οι πλευρές και οι γωνίες δύο όμοιων πολυγώνων καθορίστηκε από τον ορισμό. Τι συμβαίνει, όμως, με τα άλλα στοιχεία τους όπως είναι οι περίμετροι των πολυγώνων, τα ύψη των τριγώνων κλπ.;

Θεώρημα 8.2

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.

Απόδειξη



Θα αποδείξουμε το θεώρημα για δύο τετράπλευρα. Ανάλογη απόδειξη έχουμε για όλα τα ευθύγραμμα σχήματα.

Αν τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, ισχύει

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta' A'} = \lambda \qquad (1)$$

Από τη γνωστή ιδιότητα των αναλογιών έχουμε

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta' A'} = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta' A'} \qquad (2)$$

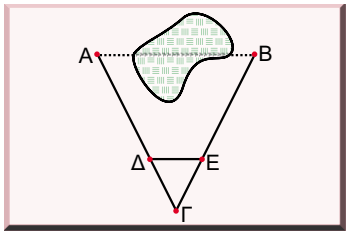
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta' A'} = \lambda$$

■

Χρήση ομοιότητας για μέτρηση μηκών ευθυγράμμων τμημάτων που είναι απρόσιτα

Η θεωρητική μελέτη των όμοιων σχημάτων μας εξασφαλίζει μεθόδους για επίλυση πρακτικών προβλημάτων.



Έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε την απόσταση των σημείων Α και Β μεταξύ των οποίων παρεμβάλεται ένα έλος που δεν είναι προσπελάσιμο. Για τη μέτρηση της ΑΒ κάνουμε χρήση ομοιότητας. Επιλέγουμε ένα σημείο Γ σε τέτοια θέση ώστε να έχουμε ευθεία πρόσβαση σ' αυτό από τα Α και Β. Πάνω στα τμήματα ΓΑ και ΓΒ θεωρούμε δύο σημεία Δ και Ε έτσι, ώστε

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta} = \lambda = \frac{\Gamma B}{\Gamma E} \quad (\lambda \text{ οποιοσδήποτε θετικός αριθμός})$$

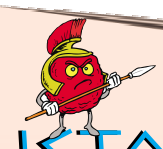
Από τη σχέση $\frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma B}{\Gamma E}$ προκύπτει ότι ΔΕ//ΑΒ. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα 8.1 τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta} = \lambda \quad \text{άρα} \quad AB = \lambda \cdot \Delta E.$$

Γνωρίζοντας το λ (δικής μας επιλογή) και μετρώντας την απόσταση ΔΕ υπολογίζουμε και την ΑΒ.

8.1 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Θέλουμε μία φωτογραφία διαστάσεων 12×18 cm να την τοποθετήσουμε σε ένα κάδρο με ωφέλιμες διαστάσεις 20×40 cm. Πόσο πρέπει να είναι το μέγιστο ποσοστό μεγέθυνσης της φωτογραφίας έτσι, ώστε να χωρέσει ολόκληρη στην κορνίζα;



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ 1

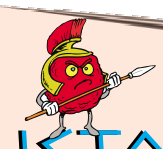
Ο μεγάλος Αλεξανδρινός γεωμέτρης Ευκλείδης στο έργο του "Οπτικά" ξεκινώντας από την αρχή ότι το φως διαδίδεται ευθύγραμμα, αποκαθιστά μια σειρά θεωρημάτων. Μεταξύ των προτάσεων που απέδειξε ο Ευκλείδης περιοριζόμαστε να αναφέρουμε εκείνη που παρέχει εξήγηση στο γεγονός ότι ευθείες παράλληλες φαίνονται συντρέχουσες. Ισχυρό κίνητρο σ' αυτές τις έρευνες υπήρξε για τους Έλληνες η στιγμή, κατά την οποία ενεπλάκησαν στο πρόβλημα της δια χρωμάτων διακόσμησης των σκηνών στα θέατρα, διακόσμησης που έπρεπε να παράγει στους θεατές μια ψευδαίσθηση πραγματικότητας.

Έρευνες προς αυτή την κατεύθυνση εξακολούθησαν και κατά τη Ρωμαϊκή περίοδο, ακόμη και κατά το σκοτεινό Μεσαίωνα. Δημιουργήθηκε τότε στην Ευρώπη ένας κλάδος, ο οποίος ονομάστηκε "Προοπτική". Σε μια πραγματεία του Άραβα Ibn Aitham ή Alhazen, απαντάται για πρώτη φορά η γόνιμη αρχή, ότι ο οφθαλμός του παρατηρητή αποτελεί ένα κέντρο δέσμης φωτεινών ακτίνων που εκπέμπονται από τα διάφορα σημεία του θεωρούμενου σώματος.

Με την πάροδο του χρόνου και την εξέλιξη των ιδεών η λέξη "προοπτική" άλλαξε σημασία. Αφού εμπεδώθηκε η ιδέα, ότι η όραση λειτουργεί μέσω φωτεινών ακτίνων που εκπορεύονται από όλα τα σημεία του διαστήματος και συγκλίνουν στον οφθαλμό του παρατηρητή, η κόρη του οφθαλμού θεωρήθηκε ως κέντρο ενός οπτικού κώνου.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μεταξύ του οφθαλμού και του αντικειμένου παρεμβάλλεται μια επίπεδη επιφάνεια (πίνακας), στην οποία λαμβάνονται όλα τα σημεία τομής της με κάθε ακτίνα, και μάλιστα τα σημεία αυτά διατηρούν το χρώμα της ακτίνας. Θα παραχθεί τότε στον πίνακα ένα ποικιλόχρωμο σύνολο φυσικών σημείων, το οποίο θα προκαλέσει στον παρατηρητή την ίδια ακριβώς εντύπωση που προκαλεί και το παρατηρούμενο αντικείμενο. Ακριβώς η κατασκευή του περιγράμματος του εν λόγω σχήματος θεωρείται σήμερα ως σκοπός της προοπτικής, η οποία αποτελεί το θεμέλιο της ζωγραφικής.

Διάσημοι Ιταλοί ζωγράφοι και αρχιτέκτονες (Alberti, Pier della Francesca) επιδόθηκαν στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού της Γεωμετρίας. Τελευταίος κατά χρονολογική σειρά, αλλά πρώτος ως προς τη δόξα και το πνευματικό ανάστημα έρχεται ο Leonardo da Vinci, ο οποίος δήλωσε ότι "η προοπτική είναι ο χαλινός και το πηδάλι της ζωγραφικής".



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ 2

Τη μέθοδο μέτρησης της απόστασης απρόσιτων σημείων με τη χρήση της ομοιότητας περιγράφει ο Έλληνας μαθηματικός και μηχανικός Ήρων ο Αλεξανδρεύς στο έργο του που φέρει τον τίτλο "Διόπτρα". Ο Ήρων έζησε κατά τον 1ο αιώνα π.Χ. και παρά την έμφυτη κλίση του στην εφαρμοσμένη φυσική είχε και μια ιδιαίτερη δεξιότητα σε καθαρά γεωμετρικές έρευνες. Στο έργο του "Διόπτρα", στο οποίο εκτίθεται η χρήση της διόπτρας (όργανο δικής του εφευρέσεως), ο Ήρων πραγματεύεται 36 προβλήματα μέγιστης χρησιμότητας για τον τοπογράφο, αφού περιλαμβάνει μεθόδους μέτρησης αποστάσεων, υψομέτρων και βαθυμέτρων, μεθόδους διάτρησης βουνών κλπ. Τα συμπεράσματά του ο Ήρων τα κατοχυρώνει με αποδείξεις που στηρίζονται σε ορισμούς, θεωρήματα και μεθόδους, που ανάγονται στον Ευκλείδη.

8.2 Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

Στο κεφάλαιο 3 χρησιμοποιήσαμε για τη μελέτη της ισότητας των τριγώνων τα κριτήρια ισότητας. Ομοίως για τη μελέτη της ομοιότητας τριγώνων θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω τρία κριτήρια ομοιότητας.

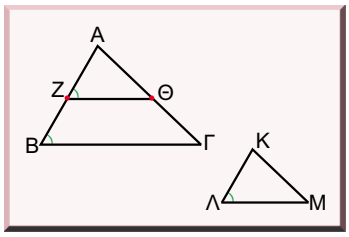
Θεώρημα 8.3

1ο κριτήριο ομοιοτητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ για τα οποία ισχύει $\widehat{A} = \widehat{K}$, $\widehat{B} = \widehat{\Lambda}$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{M}$. Στην ημιευθεία ΑΒ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε ΑΖ=ΚΛ και στην ημιευθεία ΑΓ σημείο Θ τέτοιο, ώστε ΑΘ=ΚΜ. Τα τρίγωνα ΑΖΘ και ΚΛΜ είναι ίσα σύμφωνα με το 1° κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π), άρα $\widehat{AZ\Theta} = \widehat{\Lambda}$, οπότε $\widehat{AZ\Theta} = \widehat{B}$.



Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι ΖΘ//ΒΓ.

Άρα ΑΖΘ~ΑΒΓ και επειδή ΑΖΘ~ΚΛΜ (με λόγο ομοιότητας 1) συμπεραίνουμε ότι ΚΛΜ~ΑΒΓ. ■

Πόρισμα 8.1

Αν δύο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες μία προς μία, θα είναι όμοια.

Πόρισμα 8.2

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν από μία οξεία γωνία ίση, θα είναι όμοια.

Θεώρημα 8.4

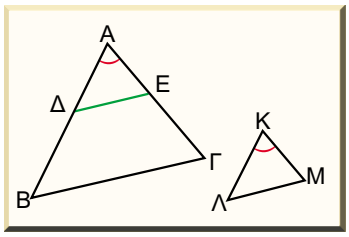
2ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ για τα οποία ισχύει $\widehat{A} = \widehat{K}$ και

$$\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{A\Gamma}{KM} \qquad (1)$$



Στην ημιευθεία ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε ΑΔ=ΚΛ και στην ημιευθεία ΑΓ σημείο Ε τέτοιο, ώστε ΑΕ=ΚΜ. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΚΛΜ σύμφωνα με το 1° κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π) είναι ίσα, άρα ΑΔ=ΚΛ και ΑΕ=ΚΜ. Επομένως η σχέση (1) γράφεται

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΕ}$$

και από το αντίστροφο θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι ΔΕ//ΒΓ. Σύμφωνα με το θεώρημα 8.1 είναι ΑΔΕ~ΑΒΓ και επειδή ΚΛΜ~ΑΔΕ (με λόγο ομοιότητας 1) συμπεραίνουμε ότι ΚΛΜ~ΑΒΓ. ■

Πόρισμα 8.3

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.

Θεώρημα 8.5

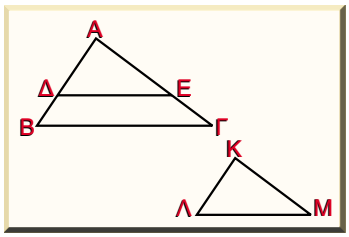
3ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ για τα οποία ισχύει

$$\frac{ΑΒ}{ΚΛ}=\frac{ΑΓ}{ΚΜ}=\frac{ΒΓ}{ΛΜ} \qquad (1)$$



Στην ημιευθεία ΑΒ θεωρούμε το σημείο Δ τέτοιο, ώστε ΑΔ=ΚΛ και στην ημιευθεία ΑΓ το σημείο Ε τέτοιο, ώστε ΑΕ=ΚΜ. Από τις δύο αυτές ισότητες και τα δύο πρώτα κλάσματα της σχέση (1) παίρνουμε

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΕ}$$

και σύμφωνα με το αντίστροφο θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι ΔΕ//ΒΓ. Άρα ΑΔΕ~ΑΒΓ, οπότε θα ισχύει

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}=\frac{ΑΓ}{ΑΕ} \quad ή \quad \frac{ΑΒ}{ΚΛ}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}=\frac{ΑΓ}{ΚΜ} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{ΒΓ}{ΛΜ}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}$$

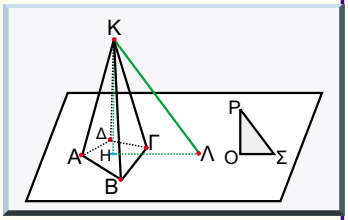
άρα ΛΜ=ΔΕ, οπότε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΚΛΜ είναι ίσα σύμφωνα με το 3° κριτήριο (Π-Π-Π). Από τις σχέσεις ΑΒΓ~ΑΔΕ και ΑΔΕ~ΚΛΜ (με λόγο ομοιότητας 1) συμπεραίνουμε ότι ΑΒΓ~ΚΛΜ.

8.2 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ο Θαλής ο Μιλήσιος για να μετρήσει το ύψος μιας πυραμίδας χρησιμοποίησε την παρακάτω μέθοδο.

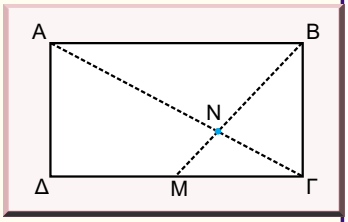
Τοποθέτησε δίπλα στην πυραμίδα μια ράβδο ΟΡ με τη βοήθεια της οποίας προσδιόρισε τη στιγμή κατά την οποία το μήκος ΟΡ της ράβδου ήταν ίσο με τη σκιά της, ΟΣ.

Έτσι ο Θαλής μετρώντας τη σκιά της πυραμίδας ΗΛ βρήκε το ύψος της ΚΗ γιατί ΚΗ=ΗΛ. Να εξηγήσετε στη μέθοδο του Θαλή γιατί το ύψος της πυραμιδας ισούται με τη σκιά της την ίδια χρονική στιγμή που το ύψος της ράβδου ΟΡ ισούται με τη σκιά της, ΟΣ. Ακολουθώντας παρόμοια μέθοδο με του Θαλή να μετρήσετε το ύψος ενός αντικειμένου που βρίσκεται στην αυλή του σχολείου σας (δέντρο, κοντάρι σημαίας, κ.α.).



8.3 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Για να διασχίσει ένας κολυμβητής την πισίνα ΑΒΓΔ διαγωνίως από το Α στο Γ χρειάζεται τόσο χρόνο, όσο χρόνο χρειάζεται ένας άλλος κολυμβητής για να διασχίσει τη διαδρομή από το Β στο μέσο Μ της πλευράς ΓΔ. Αν οι δύο κολυμβητές ξεκινήσουν ταυτόχρονα να κάνουν αυτές τις διαδρομές, να εξετάσετε ποιος θα φτάσει πρώτος στο σημείο Ν ή αν θα συναντηθούν στο σημείο αυτό.

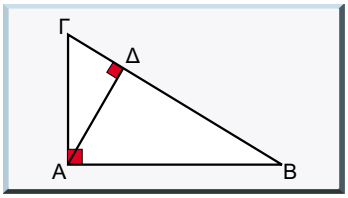


1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν ΑΔ το ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ, τότε τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΑΓ είναι όμοια προς το ΑΒΓ και όμοια μεταξύ τους.

Απόδειξη

Αρχικά θα δείξουμε ότι το τρίγωνο ΔΑΒ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΓΒ. Πράγματι είναι $\widehat{\Delta} = \widehat{A} = 90°$, $\widehat{B} = \widehat{B}$ (κοινή). Επομένως σύμφωνα με το Πόρισμα 8.2 θα είναι όμοια.



Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι είναι όμοια και τα ΑΒΓ και ΔΑΓ.

Από τις σχέσεις ΔΑΒ~ΑΓΒ και ΔΑΓ~ΑΒΓ προκύπτει ότι ΔΑΒ~ΔΑΓ.

Σημείωση

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΔΑΒ και ΑΓΒ προκύπτουν οι ισότητες των λόγων $\frac{ΔΑ}{ΑΓ} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΔΒ}{ΑΒ}$, όπου οι αριθμητές είναι οι συνδυασμοί των κορυφών του τριγώνου ΔΑΒ ενώ οι παρονομαστές είναι αντίστοιχα οι συνδυασμοί των κορυφών του τριγώνου ΑΓΒ με την προϋπόθεση ότι τα τρίγωνα γράφονται με τις ίσες γωνίες τους αντίστοιχα.

Από την ομοιότητα των ΑΒΓ και ΔΑΓ έχουμε

$$\frac{ΑΒ}{ΔΑ} = \frac{ΑΓ}{ΔΓ} = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$$

Από την ομοιότητα των ΔΑΒ και ΔΓΑ έχουμε

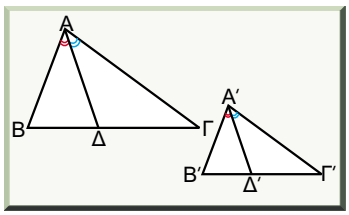
$$\frac{ΔΑ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΓΑ} = \frac{ΔΒ}{ΔΑ}$$

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων ισούται με το λόγο δύο αντίστοιχων διχοτόμων τους.

Απόδειξη

Θεωρούμε δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ για τα οποία ισχύει $\widehat{Α} = \widehat{Α'}$, $\widehat{Β'} = \widehat{Β}$, $\widehat{Γ'} = \widehat{Γ}$ και φέρουμε τις αντίστοιχες διχοτόμους τους ΑΔ, Α΄Δ΄. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ είναι όμοια διότι



$\widehat{Β} = \widehat{Β'}$ (ΑΒΓ~Α΄Β΄Γ΄)

$B\widehat{A}Δ = B'\widehat{A'}Δ'$ (μισές των ίσων $\widehat{Α}$, $\widehat{Α'}$)

Επομένως θα έχουμε:

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \frac{ΒΔ}{Β'Δ'} \qquad (1)$$

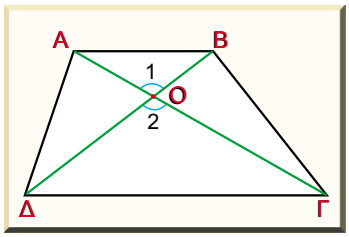
Όμως αν υποθέσουμε ότι ο λόγος ομοιότητας των ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι λ, τότε $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = λ$ και η σχέση (1) δίνει $\frac{ΑΔ}{Α'Δ'} = λ$.

3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το σημείο τομής των διαγωνίων τραπεζίου διαιρεί κάθε διαγώνιο σε μέρη ανάλογα προς τις βάσεις του.

Απόδειξη

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΔΓ και θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{ΟΔ}{ΟΒ} = \frac{ΔΓ}{ΑΒ}$ και ότι $\frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{ΔΓ}{ΑΒ}$.



Πράγματι τα τρίγωνα ΟΔΓ και ΟΒΑ είναι όμοια, διότι έχουν $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (ως κατακορυφήν) και $O\widehat{Δ}Γ = O\widehat{B}A$ (ως εντός εναλλάξ)

Άρα ισχύει $\frac{ΟΔ}{ΟΒ} = \frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{ΔΓ}{ΒΑ}$.

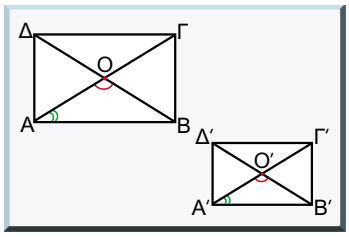
4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν δύο ορθογώνια έχουν ίσες τις γωνίες των διαγωνίων τους, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $A\widehat{O}B = A'\widehat{O'}B'$ οπότε επειδή τα ΟΑΒ και Ο΄Α΄Β΄ είναι ισοσκελή οι γωνίες $O\widehat{A}B$ και $O'\widehat{A'}B'$ θα είναι ίσες, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και Ο΄Α΄Β΄ είναι όμοια, συνεπώς

$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{O'B'} \qquad (1)$$



Ομοίως και τα τρίγωνα ΟΑΔ και Ο΄Α΄Δ΄ είναι όμοια οπότε

$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{AΔ}{A'Δ'} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AΔ}{A'Δ'}$$

Έτσι τα ορθογώνια ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχουν ίσες τις γωνίες τους (σαν ορθές) και ανάλογες τις πλευρές τους (είναι γνωστό ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες).

Άρα τα ορθογώνια ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι όμοια.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Μία γωνία ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 95° όσο και μία γωνία ενός άλλου ισοσκελούς τριγώνου. Είναι τα τρίγωνα όμοια; Να εξετάσετε και την περίπτωση που η γωνία θα είναι 59°.

2 Να εξηγήσετε για ποιο λόγο στον ίδιο τόπο την ίδια χρονική στιγμή δύο κατακόρυφοι πάσαλοι σχηματίζουν σε οριζόντιο έδαφος σκιές ανάλογες με τα ύψη τους.

3 Οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ανάλογες με τις γωνίες ενός άλλου τριγώνου ΔΕΖ. Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα είναι όμοια και αν οι πλευρές τους είναι ανάλογες.

4 Η περίμετρος ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ είναι τριπλάσια από την περίμετρο ενός άλλου ισόπλευρου τριγώνου ΚΛΜ. Να εξηγήσετε για ποιο λόγο το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ είναι τριπλάσιο από το ύψος του τριγώνου ΚΛΜ.

5 Να εξηγήσετε για ποιο λόγο δύο τετράγωνα είναι όμοια.

6 Να εξηγήσετε για ποιο λόγο όλα τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Ένα δέντρο σχηματίζει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά μήκους 28 m. Στον ίδιο τόπο, την ίδια στιγμή, μια κατακόρυφη ράβδος μήκους 2 m σχηματίζει σκιά μήκους 3,5 m. Να βρεθεί το ύψος του δέντρου.

2 Ένας προβολέας βρίσκεται στην κορυφή ενός κατακόρυφου στύλου. Σε απόσταση 57 m από τη βάση του στύλου (και σε οριζόντιο επίπεδο) υπάρχει κατακόρυφη ράβδος ύψους 1,5 m, που σχηματίζει σκιά μήκους 3 m. Να βρεθεί το μήκος της σκιάς της ράβδου, αν την πλησιάσουμε κατά 19 m προς το στύλο, αφού πρώτα βρεθεί το ύψος του στύλου.

3 Μεταλλική πλάκα έχει σχήμα ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές α, β, γ. Η πλάκα θερμαίνεται και από τη διαστολή αυξάνεται κάθε πλευρά της κατά το $\frac{1}{15}$ της. Θα παραμείνει ορθογώνιο τρίγωνο το σχήμα της πλάκας;

4 Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ με κορυφές Κ, Λ και Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΑΒΓ. Αν ΑΒ=6, ΒΓ=12 και ΑΓ=8, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΚΛΜ.

5 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΔ προς την υποτείνουσα ΒΓ και έστω Ε η ορθή προβολή του Δ στην ΑΒ. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ^2=ΑΓ\cdot ΔΕ$.

6 Από το μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ, που τέμνει την ΑΓ στο Δ και την ΑΒ στο Ε. Αν ΜΔ=κ και ΜΕ=λ, να υπολογίσετε τη ΒΓ συναρτήσει των κ, λ.

7 Από τυχαίο σημείο Μ της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου ($\widehat{A}=90°$) φέρουμε κάθετη στη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ και ΑΓ στα

σημεία Η και Θ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΜΗ·ΜΘ=ΒΜ·ΜΓ.

8 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=2ΒΓ και παίρνουμε σημείο Ζ στην ΑΒ, έτσι ώστε $BZ=\frac{1}{2}B\Gamma$. Να δείξετε ότι $\widehat{B\Gamma Z}=\widehat{BA\Gamma}$.

9 Από την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ημιευθεία Βx, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ και σχηματίζει με την πλευρά ΒΓ γωνία $\widehat{\Gamma Bx}$, τέτοια ώστε $\widehat{\Gamma Bx}=\widehat{A}$. Να αποδείξετε ότι $B\Delta^2=A\Delta\cdot\Delta\Gamma$.

10 Οι βάσεις ενός τραπεζίου είναι ΑΒ=4 και ΓΔ=12 και οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ=3 και ΒΓ=9. Αν οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Μ, να βρεθούν τα μήκη των πλευρών ΜΔ, ΜΓ του τριγώνου ΜΔΓ.

11 Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ στο οποίο ΑΒ=2ΒΓ. Από το Α φέρουμε κάθετη στη διαγώνιο ΒΔ, που τέμνει τη ΒΔ στο Ε και τη ΔΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΔΓ=4ΔΖ.

12 Να αποδείξετε ότι, αν δύο κύκλοι εφάπτονται στο σημείο Α, κάθε ευθεία, που περνάει από το Α και τέμνει τους κύκλους, ορίζει χορδές ανάλογες προς τις ακτίνες των κύκλων.

13 Η διχοτόμος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΒ·ΑΓ=ΑΔ·ΑΕ.
β) $EB^2=EA\cdot E\Delta$.

14 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}=90°$. Αν ΑΔ το ύψος του ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $A\Delta^2=B\Delta\cdot\Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Από ένα σημείο Α εκτός κύκλου φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ και μια τέμνουσα ΑΔΕ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι ΒΕ·ΓΔ=ΒΔ·ΓΕ.

2 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ της ΑΒ. Αν Μ η τομή των ΡΓ και ΒΔ και Ν η τομή των ΡΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\frac{MP}{M\Gamma}+\frac{NP}{N\Delta}=1$.

3 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=α και ΑΔ=β. Από την κορυφή Α φέρουμε τυχαία ευθεία που τέμνει τις πλευρές ΒΓ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΖ είναι όμοια.
β) Το γινόμενο ΒΕ·ΔΖ είναι σταθερό.

4 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις ΒΕ και ΓΖ κάθετες προς τη διχοτόμο ΑΔ. Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε είναι αρμονικά συζυγή των Α, Δ.

5 Έστω ΑΒ χορδή κύκλου (Ο,R), ε_1 και ε_2 οι εφαπτόμενες του κύκλου στα Α και Β και ΜΚ, ΜΛ, ΜΝ οι αποστάσεις ενός τυχαίου σημείου Μ του κύκλου από τις ΑΒ, ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) $MK=\frac{MA\cdot MB}{2R}$.
β) $M\Lambda=\frac{MA^2}{2R}$.
γ) $MK^2=M\Lambda\cdot MN$.

6 Να αποδείξετε ότι δύο τραπέζια με βάσεις ανάλογες και γωνίες ίσες είναι όμοια.

7 Αν δύο παραλληλόγραμμα έχουν ανάλογες διαγώνιες και ίσες τις γωνίες των διαγωνίων τους, να αποδείξετε ότι είναι όμοια.

8 Αν δύο ρόμβοι έχουν τις διαγώνιές τους ανάλογες, να αποδείξετε ότι είναι όμοιοι.

9 Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και δύο ημιευθείες Ox και Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο και κάθετες στα άκρα του ΑΒ. Στο μέσο Ο της ΑΒ φέρνουμε δυο ευθείες κάθετες μεταξύ τους, που τέμνουν τις Ox, Oy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ εφάπτεται της ΔΕ.

10 Αν ένας κύκλος (Λ,ρ) περνάει από το κέντρο ενός άλλου κύκλου (Κ,R) και μια εφαπτομένη του (Κ,R) τέμνει τον (Λ,ρ) στα σημεία Α και Β, να αποδειχτεί ότι το γινόμενο ΚΑ·ΚΒ είναι σταθερό.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 2\hat{B}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta(\beta+\gamma)$.

2 Δίνεται κύκλος (Ο,R) και δύο διάμετροι ΑΒ και ΓΔ κάθετοι μεταξύ τους. Αν Ε το μέσο της ΟΔ και η ΑΕ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Μ, η δε ΓΜ τέμνει την ΟΒ στο Ζ, να αποδείξετε ότι $\frac{OZ}{ZB} = \frac{1}{2}$.

3 Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ στο οποίο ΑΔ=α και ΑΒ=$\alpha\sqrt{2}$. Από την κορυφή Γ φέρουμε κάθετη στη ΒΔ, που τέμνει τη ΒΔ στο Ε και την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το Ζ είναι μέσο της ΑΒ.

β) Αν ΑΗ κάθετη στη ΒΔ, τότε:
ΔΗ=ΗΕ=ΕΒ.

4 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} = 120°$, να αποδείξετε ότι $\delta_\alpha = \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}$.

5 Δίνονται δύο γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ και ένα ευθύγραμμο τμήμα λ. Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\hat{B} = \hat{\omega}$, $\hat{\Gamma} = \hat{\omega}$ και $\mu_\alpha = \lambda$.

6 Σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο, το γινόμενο των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών του (Θεώρημα Πτολεμαίου).

7 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο εγγεγραμμένος του κύκλος, που εφάπτεται των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα. Η ΕΖ τέμνει τη ΒΓ στο Κ και την παράλληλη της ΑΒ, που φέρουμε από το Γ, στο Λ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΓΕΛ είναι ισοσκελές.

β) Τα σημεία Κ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Β, Γ.

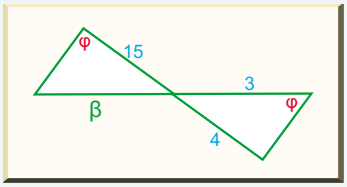
8 Ένας ηθοποιός στέκεται σε μια σκηνή θεάτρου και φωτίζεται από έναν προβολέα του δαπέδου που βρίσκεται μπροστά στη σκηνή σχηματίζοντας σκιά στο βάθος της σκηνής διπλάσια του ύψους του. Μόλις κινηθεί κατά 2 m πιο μπροστά η σκιά του διπλασιάζεται σε ύψος. Με τα δεδομένα αυτά μπορείτε να υπολογίσετε το βάθος της σκηνής.

9 Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΔ τέτοια, ώστε ΒΕ=ΔΖ. Αν Η το σημείο τομής των ΒΖ και ΔΕ, να αποδείξετε ότι η ΓΗ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

10 Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 και δύο σημεία Α και Γ των ε_1 και ε_3 αντίστοιχα. Η ΑΓ τέμνει την ε_2 στο Β. Αν Μ τυχαίο σημείο της ε_3 και η ΜΒ τέμνει την ε_1 στο Δ και η ΜΑ την ε_2 στο Ε και η ΔΕ την ΑΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Ζ, Γ αποτελούν αρμονική τετράδα.

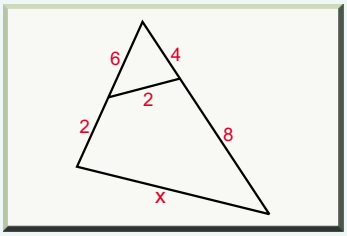
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 8ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Η πλευρά β είναι:



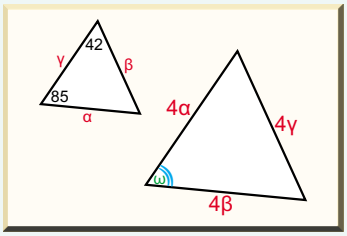
Α. ❑ 9 Β. ❑ 15 Γ. ❑ 20
Δ. ❑ 12 Ε. ❑ 60

2 Το x είναι:



Α. ❑ $2\frac{2}{3}$ Β. ❑ 3 Γ. ❑ 4
Δ. ❑ 16 Ε. ❑ 24

3 Η γωνία ω είναι:



Α. ❑ 48° Β. ❑ 53° Γ. ❑ 42°
Δ. ❑ 185° Ε. ❑ 180°

4 Υπολογίζοντας τα μέτρα των γωνιών ενός τριγώνου διαπιστώνουμε ότι καθεμιά είναι μικρότερη από την προηγούμενή της κατά 20°. Σε κάποιο άλλο τρίγωνο διαπιστώνουμε ότι κάθε μία γωνία είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενή της κατά 20°. Τα τρίγωνα αυτά αποκλείεται να είναι όμοια.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

5 Να εξηγήσετε αν είναι σωστή ή λάθος καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

α) Δυο παραλληλόγραμμα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι όμοια.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

β) Το ύψος προς την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου χωρίζει αυτό σε δυο τρίγωνα, που έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

γ) Είναι δυνατό μία γωνία ενός τριγώνου να είναι παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου όμοιου με αυτό.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

δ) Τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου σχηματίζουν τρίγωνο όμοιο με το αρχικό.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ε) Όλοι οι ρόμβοι είναι όμοιοι.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

στ) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

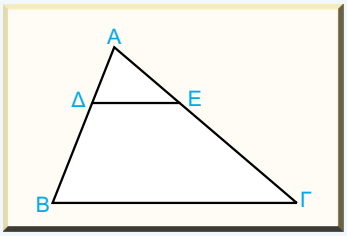
ζ) Δύο όμοια ισοσκελή τρίγωνα με ίσες βάσεις είναι ίσα.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

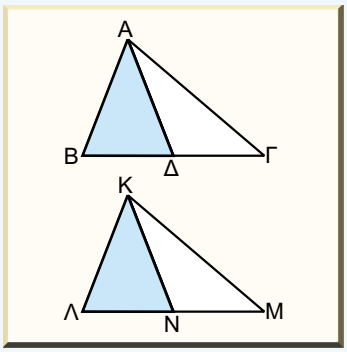
η) Αν αυξήσουμε τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου κατά 1 cm την κάθε μία, το νέο τρίγωνο θα είναι όμοιο με το αρχικό.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

6 Αν $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{2}{3}$ και ΔΕ//ΒΔ, τότε ποιος ο λόγος της περιμέτρου του τριγώνου ΑΔΕ προς την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ;

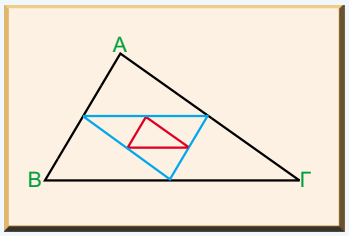


7 Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι όμοια και φέρουμε τις διαμέσους ΑΔ και ΚΝ, τότε θα είναι και τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΚΛΝ όμοια;.



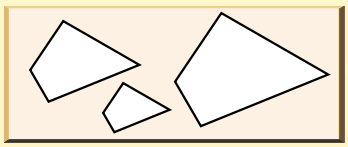
8 Αν μια γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου ορθογωνίου τριγώνου, τα τρίγωνα αυτά θα είναι όμοια;

9 Τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζουν τρίγωνο. Τα μέσα των πλευρών αυτού του τριγώνου σχηματίζουν νέο τρίγωνο. Να εξηγήσετε γιατί το νέο αυτό τρίγωνο είναι όμοιο με το αρχικό και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.



ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

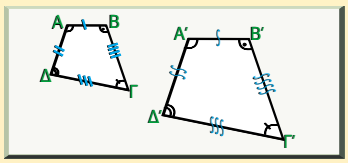
Αντίγραφο σχήματος, αντίγραφο σε σμίκρυνση, αντίγραφο σε μεγέθυνση: έννοιες που συμπεριλαμβάνονται στη γενικότερη έννοια της ομοιότητας.



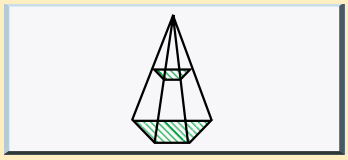
Κεντρική έννοια του κεφαλαίου 8 είναι η έννοια της ομοιότητας.

Ο ορισμός των όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων που δώσαμε απαιτεί να έχουν αυτά ίσες τις αντίστοιχες γωνίες τους και ανάλογες τις αντίστοιχες πλευρές τους.

Δώσαμε τον ορισμό του λόγου ομοιότητας (λόγος δύο αντίστοιχων πλευρών) ο οποίος είναι ίσος με το λόγο των αντίστοιχων μηκών τους. Ειδικά για τις περιμέτρους αποδείξαμε ότι ο λόγος των περιμέτρων τους είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.



Με τη μέθοδο της προοπτικής κατασκευάσαμε ένα ευθύγραμμο σχήμα όμοιο με ένα άλλο.



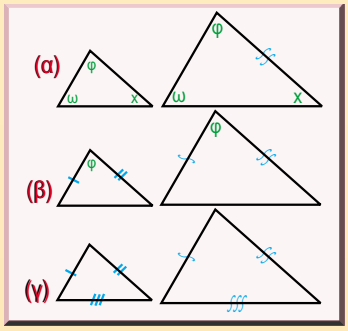
Τα τρίγωνα, όπως και σε άλλα κεφάλαια, έτυχαν κι εδώ ιδιαίτερης προσοχής. Αποδείξαμε τρία κριτήρια ομοιότητας, τα παρακάτω:

Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν

α) τρεις γωνίες ίσες μία προς μία ή

β) δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες ίσες ή

γ) τρεις πλευρές ανάλογες.



Τέλος, διατυπώσαμε κάποια πορίσματα όταν αυτά τα κριτήρια εφαρμοστούν σε ειδικές περιπτώσεις τριγώνων, όπως στα ισόπλευρα και στα ορθογώνια. Έτσι:

δ) τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία είναι όμοια,

ε) όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια,

στ) δύο ορθογώνια τρίγωνα με μία οξεία γωνία ίση είναι όμοια,

ζ) δύο ορθογώνια τρίγωνα με ανάλογες τις κάθετες πλευρές είναι όμοια.