Κεφάλαιο 6

ΣΧΗΜΑΤΑ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

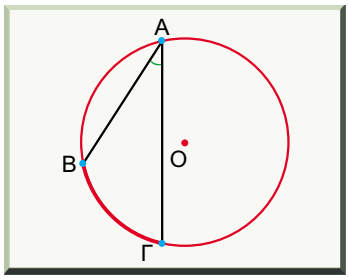
6.1 Εγγεγραμμένες γωνίες

Εγγεγραμμένες γωνίες

Στο κεφάλαιο 5 εξετάσαμε τον περιγεγραμμένο κύκλο ενός τριγώνου. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο ενός πολυγώνου. Απαραίτητη προϋπόθεση για τη μελέτη αυτή είναι η απόδοση του ορισμού της εγγεγραμμένης γωνίας σε κύκλο.

Ορισμός

Εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο ονομάζουμε μία γωνία της οποίας η κορυφή είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν αυτόν.



Στο σχήμα η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο. **Αντίστοιχο** τόξο εγγεγραμμένης γωνίας καλείται το τόξο του κύκλου που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας, στην περίπτωση της $B\hat{A}\Gamma$ αντίστοιχο τόξο είναι το $\overset{\frown}{B\Gamma}$. Ακόμη λέμε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

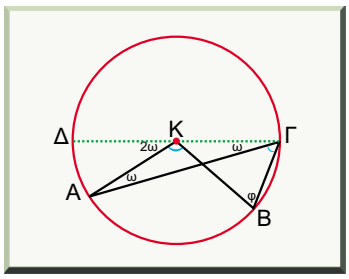
Την ίδια ορολογία (αντίστοιχο τόξο, "βαίνει") είχαμε συναντήσει και στην επίκεντρη γωνία. Στην περίπτωση αυτή ορίσαμε το μέτρο του τόξου να είναι και μέτρο της γωνίας. Θα διαπιστώσουμε τώρα ότι το αντίστοιχο τόξο παίζει εξίσου σημαντικό ρόλο στο μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας και παράλληλα θα βρούμε τη σχέση μιας εγγεγραμμένης με μια επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.1

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο μ΄αυτήν τόξο.

Απόδειξη

Έστω η εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{\Gamma}B$ και η αντίστοιχη επίκεντρη $A\hat{K}B$ που βαίνουν στο ίδιο έλασσον τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Φέρουμε τη διάμετρο ΓΔ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΓ αν $K\hat{A}\Gamma = \omega$, τότε $K\hat{\Gamma}A = \omega$ και η εξωτερική του γωνία $A\hat{K}\Delta = 2\omega$. Στο επίσης ισοσκελές τρίγωνο ΚΓΒ αν $K\hat{B}\Gamma = \varphi$, τότε $K\hat{\Gamma}B = \varphi$ και η εξωτερική του γωνία $\Delta\hat{K}B = 2\varphi$.



Άρα η επίκεντρη $A\hat{K}B = \Delta\hat{K}B - \Delta\hat{K}A = 2\varphi - 2\omega = 2(\varphi - \omega)$.

Η εγγεγραμμένη $A\hat{\Gamma}B = K\hat{\Gamma}B - K\hat{\Gamma}A = \varphi - \omega = \frac{1}{2}A\hat{K}B$.

Επίσης αποδεικνύεται ότι κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο μ' αυτήν μείζον τόξο. ■

Πόρισμα 6.1

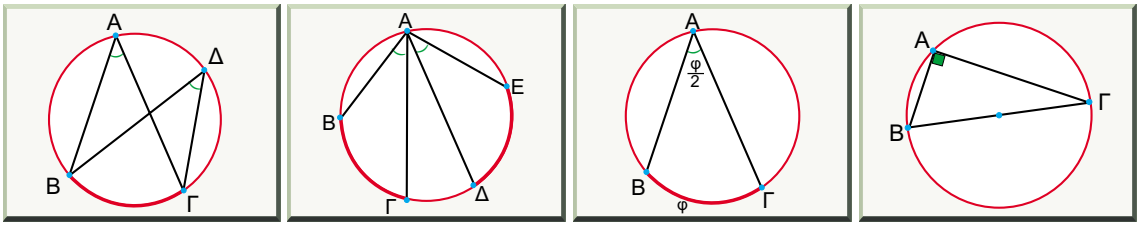
α) Οι εγγεγραμμένες γωνίες, που βαίνουν στο ίδιο τόξο ενός κύκλου είναι ίσες μεταξύ τους.
β) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες μεταξύ τους.

Πόρισμα 6.2

Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας είναι το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

Πόρισμα 6.3

Η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.



6.1 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να αποδειχτεί το θεώρημα 6.1 όταν:

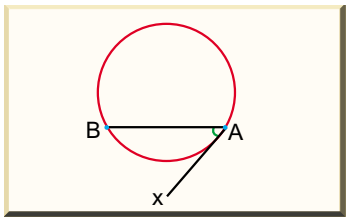
α) η μία πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας είναι διάμετρος του κύκλου.

β) το κέντρο του κύκλου είναι εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας.

γ) το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ δεν είναι έλασσον αλλά μείζον.

Γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης

Θεωρούμε μία χορδή, την ΑΒ και στο άκρο Α αυτής την εφαπτόμενη ημιευθεία Αx. Μια τέτοια γωνία σαν τη $B\hat{A}x$ καλείται γωνία **υπό χορδής και εφαπτομένης** και το τόξο που βρίσκεται στο εσωτερικό της (στο σχήμα το $\overset{\frown}{AB}$) καλείται **αντίστοιχο τόξο** της γωνίας αυτής.



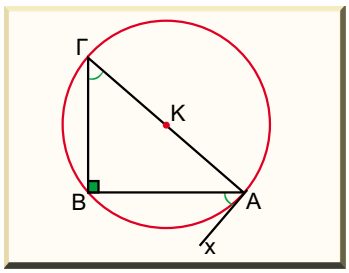
Θεώρημα 6.2

Κάθε γωνία υπό χορδή και εφαπτομένης ισούται με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο.

Απόδειξη

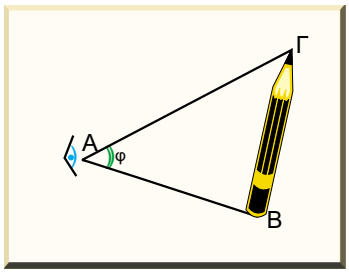
Εφόσον όλες οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι ίσες, αρκεί να δείξουμε ότι μία απ' όλες είναι ίση με τη $B\hat{A}x$. Φέρουμε τη διάμετρο ΑΓ και σχηματίζουμε τη γωνία $B\hat{\Gamma}A$. Η γωνία $\hat{B}$ είναι ορθή ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{\Gamma} = 90° - \Gamma\hat{A}B$. Η ακτίνα ΚΑ είναι κάθετη στην εφαπτομένη Αx, άρα $B\hat{A}x = 90° - \Gamma\hat{A}B$. Επομένως $B\hat{A}x = \hat{\Gamma}$. ■



Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα αντικείμενο, το ΒΓ και στο σημείο Α έναν παρατηρητή του αντικειμένου αυτού. Οι ακραίες φωτεινές ακτίνες, ΓΑ και ΒΑ, σχηματίζουν μία γωνία φ με κορυφή το μάτι του παρατηρητή (το σημείο παρατήρησης).

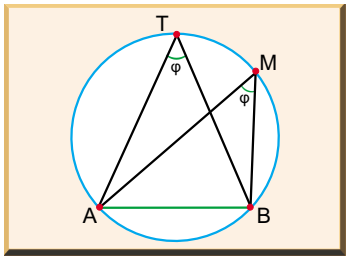
Την περίπτωση αυτή στη γλώσσα της Γεωμετρίας την περιγράφουμε με τη φράση "το σημείο Α βλέπει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ υπό γωνία φ" ή "το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ φαίνεται από το σημείο Α υπό γωνία φ".



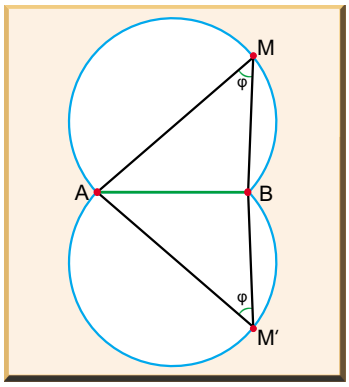
Ένα κλασικό και σημαντικό πρόβλημα της Γεωμετρίας γεννιέται από το ερώτημα αν υπάρχουν κι άλλα σημεία που βλέπουν το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα υπό την ίδια γωνία.

Πρόβλημα 6.1

Να βρεθεί ο Γ.Τ των σημείων του επιπέδου από τα οποία ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό ορισμένη γωνία φ.



Έστω Μ ένα σημείο από το οποίο το ΑΒ φαίνεται υπό γωνία φ. Τότε $A\hat{M}B = φ$. Αν σχεδιάσουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΜ, η γωνία $A\hat{M}B$ είναι εγγεγραμμένη, και στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ που βαίνει, βαίνουν κι άλλες εγγεγραμμένες γωνίες, που θα είναι ίσες μ' αυτή. Άρα για κάθε σημείο Τ του τόξου $\overset{\frown}{BMA}$ θα είναι $A\hat{T}B = φ$ ή το ΑΒ φαίνεται από κάθε σημείο του τόξου αυτού υπό γωνία φ.

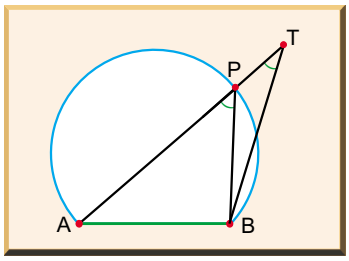


Υπάρχουν άραγε κι άλλα σημεία που έχουν αυτήν την ιδιότητα;

Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι τα σχήματα τα συμμετρικά ως προς άξονα είναι ίσα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι και τα σημεία του τόξου $\overset{\frown}{BM'A}$, που είναι συμμετρικό του τόξου $\overset{\frown}{BMA}$ ως προς την ΑΒ, βλέπουν το ΑΒ υπό γωνία φ.

Είναι ο Γ.Τ των ζητούμενων σημείων το σχήμα που αποτελούν τα δύο αυτά τόξα;

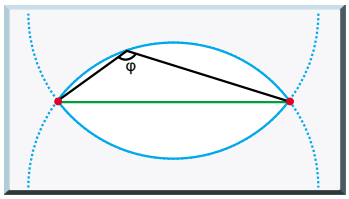
Καταφατική απάντηση θα έχουμε μόνο αν αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλο σημείο που να βλέπει το ΑΒ υπό την ίδια γωνία φ, εκτός από τα σημεία των τόξων αυτών.



Έστω ότι ένα σημείο Τ, που δεν ανήκει σε κανένα από τα τόξα αυτά, βλέπει το ΑΒ υπό γωνία φ. Στο σχηματιζόμενο τρίγωνο ΒΡΤ οι γωνίες $P\hat{T}B$ και $A\hat{P}B$ θα πρέπει να είναι ίσες, πράγμα άτοπο γιατί η μία θα είναι απέναντι εξωτερική της άλλης. Άρα κανένα σημείο εκτός από τα σημεία των δύο τόξων δεν έχει την ιδιότητα να βλέπει το ΑΒ υπό γωνία φ.

Διερεύνηση

Τα σημεία Α και Β θα πρέπει να εξαιρεθούν από το Γ.Τ, διότι δεν μπορεί κανένα να θεωρηθεί κορυφή κατάλληλης γωνίας.



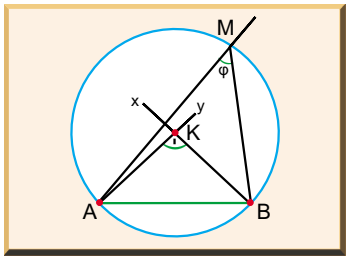
Αν η γωνία φ είναι ορθή τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ είναι ημικύκλια και ο Γ.Τ είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ, εκτός φυσικά από τα σημεία Α και Β.

Αν η γωνία φ είναι αμβλεία, τότε ο Γ.Τ αποτελείται από τα δύο ελάσσονα τόξα, όπως βλέπουμε στο διπλανό σχήμα.

Τέλος, στις περιπτώσεις $φ=0°$ ή $φ≥180°$ δεν μπορεί να σχηματιστεί κατάλληλο τρίγωνο, οπότε δεν υπάρχει κανένα τέτοιο σημείο.

Πρόβλημα 6.2

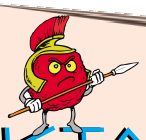
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και γωνία φ. Να κατασκευαστεί ο Γ.Τ των σημείων από τα οποία το ΑΒ φαίνεται υπό γωνία φ όπου 0°<φ<180°.



Όλα όσα αφορούν το συγκεκριμένο Γ.Τ έχουν αναφερθεί στο προηγούμενο πρόβλημα. Μένει μόνο η κατασκευή τους.Για την κατασκευή των δύο τόξων αρκεί να προσδιορίσουμε τα κέντρα των κύκλων τους και την κοινή τους ακτίνα.

Κατασκευή

- Έστω φ<90°. Αν Κ το κέντρο του ενός κύκλου, τότε ισχύει $A\hat{K}B = 2\varphi$ και $K\hat{A}B = K\hat{B}A = 90° - \varphi$. Σχεδιάζουμε δύο γωνίες $A\hat{B}x$ και $B\hat{A}y$ ίσες με 90°–φ στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με το ΑΒ. Οι Βx και Ay τέμνονται στο Κ. Στη συνέχεια γράφουμε κύκλο (Κ,ΚΑ). Από τα δύο τόξα που ορίζει η χορδή ΑΒ επιλέγουμε το μείζον (μη κυρτό) και το συμμετρικό του.
- Έστω φ>90°. Στην περίπτωση αυτή ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για τη γωνία 180°–φ αλλά επιλέγουμε το έλασσον τόξο και το συμμετρικό του.
- Έστω φ=90°. Τότε γράφουμε κύκλο με διάμετρο ΑΒ.



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Στις γεωμετρικές κατασκευές χρησιμοποιείται ευρύτατα η μέθοδος της Ανάλυσης και Σύνθεσης.

Κατά τη μέθοδο αυτή ξεκινάμε από το ζητούμενο. Θεωρούμε ότι το συμπέρασμα q είναι πρόταση αληθής και προσπαθούμε να κατασκευάσουμε προτάσεις $q_1, q_2, \ldots$ τέτοιες, ώστε οι προτάσεις $q \Rightarrow q_1$, $q_1 \Rightarrow q_2$, ... , να είναι αληθείς. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε σε μια πρόταση που είναι γνωστή ή έχει προηγουμένως αποδειχθεί. Η μέθοδος αυτή λέγεται Ανάλυση.

Όμως η Ανάλυση μόνη της συνήθως δεν είναι αρκετή για την απόδειξη. Γι' αυτό ακο-

λουθούμε και την αντίστροφη πορεία που λέγεται Σύνθεση.

Η Ανάλυση μας δείχνει από που μπορούμε να ξεκινήσουμε και ποια πορεία πρέπει να ακολουθήσουμε, ενώ η Σύνθεση ελέγχει την ακρίβεια αυτής της πορείας.

Αν και η μέθοδος της Ανάλυσης - Σύνθεσης εφαρμόστηκε σε πολλές περιπτώσεις πριν από τον Πλάτωνα, εντούτοις θεωρείται δημιούργημα του τελευταίου. Η συμβολή του Αρχαίου Έλληνα φιλοσόφου συνίσταται:

- στη διατύπωση της μεθόδου με γενικούς όρους
- στη μεθοδολογική διασαφήνισή της.

Ο Πάππος ο Αλεξανδρινός (3ος αι. μ.Χ.) στο 7ο βιβλίο του έργου του "Συναγωγή" αναφέρεται σε ένα κλάδο μελέτης που ονομάζει αναλυόμενος. Εκεί περιέγραψε τους πρώτους κανόνες της Ευρετικής, την "Ανάλυση" και τη "Σύνθεση".

Αρκετά αργότερα, στον Ευρωπαϊκό Μεσαίωνα, ο θεμελιωτής της Αναλυτικής Γεωμετρίας και φιλόσοφος Καρτέσιος (1596-1650) υποστηρίζει ότι υπάρχουν δύο τρόποι απόδειξης στη γεωμετρία: με Ανάλυση ή με Σύνθεση.

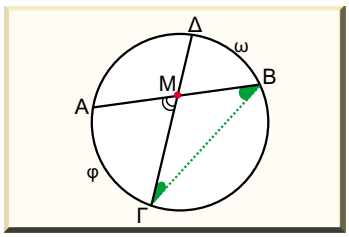
Αναφέρει συγκεκριμένα:

- η Ανάλυση βαίνει μεθοδικά από τα αίτια στα αποτελέσματα, ενώ
- η Σύνθεση εξετάζει τα αίτια από τα αποτελέσματά τους.

Ακόμη και ο Φρανσουά Βιέτ (Francois Viete, 1540-1603) στο έργο του "Εισαγωγή στην αναλυτική επιστήμη" επηρεασμένος από τον Πλάτωνα χρησιμοποίησε τη μέθοδο της Ανάλυσης και Σύνθεσης ή τους δύο τρόπους "**ζητικόν**" και "**ποριστικόν**", όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Θέωνας ο Σμυρναίος (2ος αι. μ.Χ.). Ο Βιέτ επίσης πρόσθεσε και έναν τρίτο τρόπο τον "**εξηγητικό**".

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται σε σημείο Μ εσωτερικό του κύκλου, να υπολογιστεί το μέτρο της γωνίας $\widehat{AMΓ}$ σε σχέση με τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{AΓ}$ και $\overset{\frown}{BΔ}$.



Λύση

Έστω φ και ω τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{AΓ}$ και $\overset{\frown}{BΔ}$ αντίστοιχα. Φέρουμε τη ΒΓ, οπότε στο τρίγωνο ΒΓΜ η γωνία $\widehat{AMΓ}$ είναι εξω-

τερική, άρα $\widehat{AMΓ} = \widehat{Γ} + \widehat{B}$. Οι γωνίες $\widehat{Γ}$ και $\widehat{B}$ είναι εγγεγραμμένες με μέτρα $\frac{ω}{2}$ και $\frac{φ}{2}$ αντίστοιχα. Άρα για τη γωνία $\widehat{AMΓ}$ θα ισχύει $\widehat{AMΓ} = \frac{ω + φ}{2}$.

6.2 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

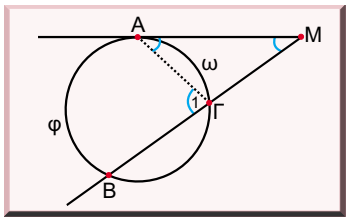
Να εξετάσετε την περίπτωση που οι χορδές ΑΒ και ΓΔ της εφαρμογής 1 τέμνονται σε σημείο Ν εξωτερικό του κύκλου.

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Η εφαπτομένη σε σημείο Α ενός κύκλου τέμνει την προέκταση μιας χορδής ΒΓ αυτού στο σημείο Μ. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{AMB}$ σε σχέση με τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{AΓ}$.

Λύση

Έστω φ και ω τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{AΓ}$ αντίστοιχα.. Η γωνία $\widehat{ΓAM}$ είναι γωνία που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη και ισχύει $\widehat{ΓAM} = \frac{ω}{2}$. Η γωνία $\widehat{AΓB}$ είναι εγγεγραμμένη, οπότε $\widehat{AΓB} = \frac{φ}{2}$, είναι όμως και εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ. Άρα $\widehat{AΓB} = \widehat{AMΓ} + \widehat{ΓAM}$ ή $\frac{φ}{2} = \widehat{AMΓ} + \frac{ω}{2}$ και τελικά $\widehat{AMΓ} = \frac{φ - ω}{2}$.



6.3 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

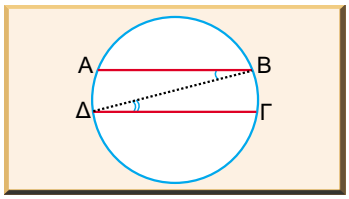
Να εξετάσετε την περίπτωση που οι ΜΑ και ΜΒ της εφαρμογής 2 είναι εφαπτόμενες στον κύκλο.

3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο παράλληλων χορδών ενός κύκλου βρίσκονται ίσα τόξα.

Απόδειξη

Έστω οι δύο παράλληλες χορδές ΑΒ και ΓΔ, και τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΔ}$ και $\overset{\frown}{ΒΓ}$ μεταξύ αυτών. Φέρουμε τη ΒΔ. Οι γωνίες $Α\hat{Β}Δ$ και $Β\hat{Δ}Γ$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΑΒ και ΓΔ με τέμνουσα τη ΒΔ, άρα είναι ίσες. Οι γωνίες όμως $Α\hat{Β}Δ$ και $Β\hat{Δ}Γ$ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στα τόξα $\overset{\frown}{ΑΔ}$ και $\overset{\frown}{ΒΓ}$. Άρα κι αυτά είναι ίσα.



6.4 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

α) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της εφαρμογής 3 και να εξετάσετε αν αληθεύει.

β) Να εξετάσετε την περίπτωση που μία από τις χορδές είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

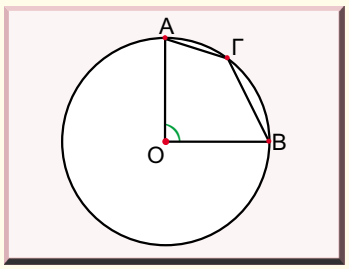
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Σε κύκλο (Κ,ρ) μια χορδή του ΑΒ έχει μήκος ρ. Πόσων μοιρών είναι η γωνία $Α\hat{Κ}Β$;

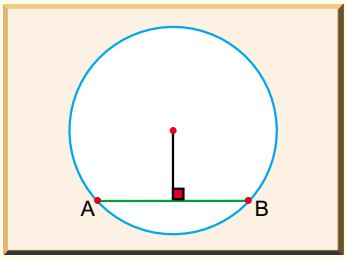
2 Δίνεται κύκλος (Κ,R) και εγγεγραμμένη γωνία $Α\hat{Ο}Β = 50°$. Οι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α και Β τέμνονται στο Γ. Να υπολογιστεί η γωνία $Α\hat{Γ}Β$.

3 Ένα σημείο Α βλέπει ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ μήκους 12 cm υπό γωνία 90°. Να υπολογίσετε την απόσταση του Α από το μέσο του ΒΓ.

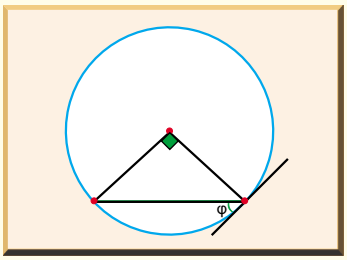
4 Αν ΟΑ και ΟΒ δύο κάθετες ακτίνες και Γ ένα σημείο του κυρτού τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$, να υπολογιστεί το άθροισμα $Ο\hat{Α}Γ + Ο\hat{Β}Γ$.



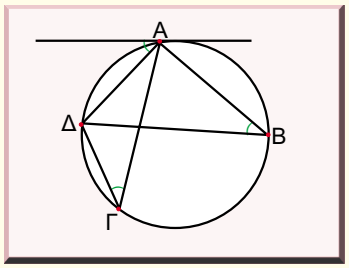
5 Να εξηγήσετε γιατί αν το απόστημα μιας χορδής έχει το μισό μήκος της, τότε το τόξο αυτής της χορδής είναι 90°.



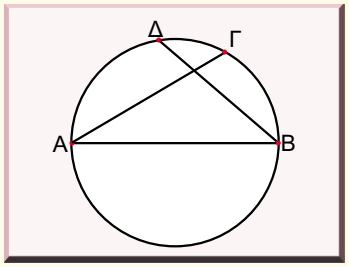
6 Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\widehat{\varphi}$ και γιατί;



7 Να εξηγήσετε το λόγο για τον οποίο είναι ίσες οι γωνίες που σημειώνονται και να βρείτε και άλλες γωνίες στο σχήμα που είναι μεταξύ τους ίσες.



8 Αν η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου, να εξηγήσετε γιατί οι ΑΓ και ΒΔ δεν μπορεί να είναι κάθετες.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Θεωρούμε δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Ο,R). Αν $\widehat{ΑΓ}=40°$, $\widehat{ΒΔΓ}=30°$, τότε να υπολογιστούν οι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ και τα τόξα $\widehat{ΒΓ}$, $\widehat{ΒΔ}$, $\widehat{ΑΔ}$.

2 Αν Μ το μέσο κυρτογώνιου τόξου $\widehat{ΒΓ}$ κύκλου (Ο,R) και Α σημείο του μη κυρτογώνιου τόξου $\widehat{ΒΓ}$ τέτοιο ώστε $\widehat{ΒΑΓ}=50°$, να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων ΟΒΓ, ΜΒΓ.

3 Δύο κύκλοι τέμνονται στα Α και Β. Αν τυχαία ευθεία από το Β τέμνει αυτούς στα σημεία Γ και Δ, να δείξετε ότι η μεσοκάθετη της ΓΔ περνά από το σημείο Α.

4 Δίνεται ΑΔ διάμετρος κύκλου και χορδή ΒΓ//ΑΔ. Να δείξετε ότι οι γωνίες $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ διαφέρουν κατά 90°

5 Θεωρούμε δύο κύκλους, τους κύκλους (Κ,R) και (Λ,ρ), που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ευθεία ε εφάπτεται στον κύκλο (Κ,R) στο Β και η ευθεία ΒΑ τέμνει τον κύκλο (Λ,ρ) στο Ε, να δείξετε ότι ΕΛ⊥ε.

6 Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν Γ και Δ είναι τα διαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, να δείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το Β.

7 Θεωρούμε το μέσο Μ κυρτογώνιου τόξου $\widehat{ΑΒ}$ κύκλου (Ο,R) και σημείο Σ του μη κυρτογώνιου τόξου $\widehat{ΑΒ}$. Αν η κάθετη από το Α στη ΣΜ τέμνει τη ΣΒ στο Γ, τότε να δείξετε ότι ΣΓ=ΣΑ.

8 Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ.

Με διάμετρο την ΟΑ γράφουμε κύκλο. Αν η χορδή ΑΒ του κύκλου με κέντρο Ο τέμνει τον άλλο κύκλο στο σημείο Μ, να δείξετε ότι ΑΜ=ΜΒ.

9 Η εφαπτόμενη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή ΑΒ κύκλου (Ο,R) είναι παράλληλη στη χορδή ΑΒ και αντιστρόφως.

10 Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α και δύο ευθείες, που διέρχονται από το Α, τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β και Β΄ και τον άλλο στα σημεία Γ και Γ΄. Να αποδειχθεί ότι ΒΒ΄//ΓΓ΄.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται μία ορισμένη διάμετρος ΑΒ ενός κύκλου (Ο,R) και μια οποιαδήποτε χορδή του ΑΓ. Φέρουμε από το κέντρο Ο ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ και ονομάζουμε Μ το σημείο στο οποίο η παράλληλη αυτή τέμνει την εφαπτομένη στο Γ. Να δείξετε ότι η ευθεία ΜΒ εφάπτεται στον κύκλο στο Β.

2 Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) με διάμετρο ΑΒ και την ακτίνα ΟΓ⊥ΑΒ. Έστω Μ το μέσο της ακτίνας ΟΒ και Δ το σημείο που η ΓΜ τέμνει τον κύκλο. Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει την ευθεία ΟΒ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι ΕΔ=ΕΜ.

3 Θεωρούμε κύκλο (Ο,R), την εφαπτομένη ε σ' ένα σημείο του Α και ένα σημείο Σ της ε. Φέρουμε από το Σ μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ. Αν η διχοτόμος της $\widehat{ΒΑΓ}$ τέμνει τη χορδή ΒΓ στο Ι, να δείξετε ότι ΣΙ=ΣΑ.

4 Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Φέρουμε ΒΓ εφαπτόμενο τμήμα και από το μέσο του Δ φέρουμε ΔΝ εφαπτομένη στον κύκλο. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Ν, Γ είναι συνευθειακά.

5 Θεωρούμε χορδή ΑΒ κύκλου (Ο,R) και την εφαπτομένη x΄x στο σημείο Α. Αν Γ σημείο x΄x, τέτοιο ώστε ΑΓ=ΑΒ και Δ το σημείο τομής της ΒΓ με τον κύκλο, να αποδείξετε ότι ΔΓ=ΔΑ.

6 Σε κύκλο (Ο,R) θεωρούμε μια επίκεντρη γωνία $\widehat{ΑΟΒ}$ και μια εγγεγραμμένη $\widehat{ΓΜΔ}$ ίσες με 120°. Να δείξετε ότι ΑΒ=ΓΔ.

7 Δίδονται ΒΑ και ΒΓ δύο χορδές κύκλου και Κ, Λ τα μέσα τους. Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Β}$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ε στο Μ είναι παράλληλη με την ΚΛ.

8 Δίνονται Α, Β, Γ τρία σημεία ενός κύκλου έτσι ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι οξυγώνιο. Φέρουμε στις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ τις τρεις εφαπτόμενες του κύκλου, οι οποίες τέμνονται και σχηματίζουν τρίγωνο ΚΛΜ. Να δείξετε ότι κάθε γωνία του τριγώνου ΚΛΜ είναι παραπληρωματική με το διπλάσιο μιας γωνίας του τριγώνου ΑΒΓ.

9 Αν οι κορυφές τριγώνου ΑΒΓ βρίσκονται σε κύκλο και η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Α}$ τέμνει τον κύκλο στο Μ, ενώ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Β}$ τέμνει την ΑΜ στο Δ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΒΔ είναι ισοσκελές.

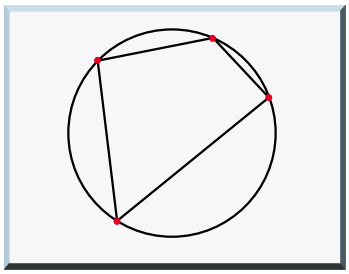
6.2 Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα

Στο κεφάλαιο 5 διαπιστώσαμε ότι οι κορυφές οποιουδήποτε τριγώνου πάντοτε είναι σημεία ενός και μόνον κύκλου. Θα εξετάσουμε τώρα το ίδιο πρόβλημα στην περίπτωση ενός τετραπλεύρου.

Ορισμός

Ένα πολύγωνο ονομάζεται εγγεγραμμένο, όταν όλες οι κορυφές του είναι σημεία ενός κύκλου και ο κύκλος αυτός ονομάζεται περιγεγραμμένος.

Εγγράψιμο πολύγωνο καλείται το πολύγωνο το οποίο έχει τη δυνατότητα να γίνει εγγεγραμμένο.

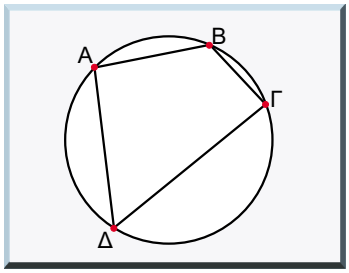


Οι παραπάνω ορισμοί και παρατηρήσεις αφορούν πολύγωνα με οσεσδήποτε πλευρές, αλλά το ενδιαφέρον μας το εστιάζουμε στα τετράπλευρα για τα οποία ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

Θεώρημα 6.3

Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο, τότε οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

Απόδειξη



Έστω το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ και δύο απέναντι γωνίες αυτού οι $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$, που είναι εγγεγραμμένες. Άρα έχουν μέτρα τα μισά των μέτρων των αντίστοιχων τόξων τους. Αν φ το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}$, τότε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{BA\Delta}$ είναι 360°−φ. Συνεπώς $\widehat{A}+\widehat{\Gamma}=\frac{\varphi}{2}+\frac{360^\circ-\varphi}{2}=180^\circ$. ■

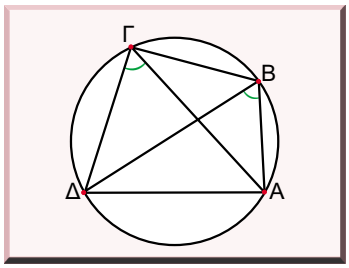
Πόρισμα 6.4

Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο, τότε κάθε γωνία του είναι ίση με την εξωτερική της απέναντι γωνίας του.

Θεώρημα 6.4

Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο, τότε κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Απόδειξη



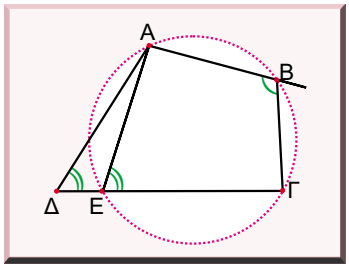
Έστω το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ και μια του πλευρά η ΑΔ. Οι απέναντι κορυφές της είναι οι Γ και Β και οι γωνίες υπό τις οποίες φαίνεται είναι οι γωνίες $\widehat{ΔΓΑ}$ και $\widehat{ΔΒΑ}$. Αυτές είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{ΑΔ}$, άρα είναι ίσες. ■

Προκύπτει τώρα το ερώτημα αν όλα τα τετράπλευρα μπορούν να εγγραφούν σε κύκλο. Τα θεωρήματα που ακολουθούν απαντούν στο ερώτημα αυτό. Αποτελούν τα **κριτήρια** για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο.

Θεώρημα 6.5

Αν οι απέναντι γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές, τότε αυτό είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Απόδειξη



Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο οποίο ισχύει $\widehat{Β}+\widehat{Δ}=180°$. Από τα τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ διέρχεται ένας κύκλος. Θα αποδείξουμε ότι αυτός διέρχεται και από το σημείο Δ.

Έστω ότι δε διέρχεται από το Δ, αλλά τέμνει τη ΓΔ στο Ε. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν, άρα $\widehat{Β}+\widehat{Ε}=180°$, οπότε θα πρέπει $\widehat{Δ}=\widehat{Ε}$.

Αυτό είναι άτοπο για τις γωνίες $\widehat{Δ}$ και $\widehat{Ε}$, διότι η μία είναι απέναντι εξωτερική της άλλης στο τρίγωνο ΑΔΕ και αποκλείεται να είναι ίσες. Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τα Α, Β και Γ υποχρεωτικά διέρχεται και από το Δ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο. ■

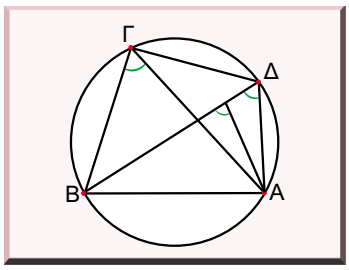
Πόρισμα 6.5

Αν μία γωνία ενός τετραπλεύρου είναι ίση με την εξωτερική της απέναντι γωνίας του, τότε αυτό είναι εγγράψιμο.

Θεώρημα 6.6

Αν μία πλευρά ενός τετραπλεύρου φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες, τότε αυτό είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη



Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του οποίου η πλευρά ΑΒ φαίνεται από τις κορυφές Γ και Δ υπό τις ίσες γωνίες $\widehat{ΑΓΒ}$ και $\widehat{ΑΔΒ}$. Τα σημεία Γ και Δ, λοιπόν, είναι σημεία του Γ.Τ του προβλήματος 6.1. Ο γεωμετρικός αυτός τόπος αποτελείται από δύο τόξα συμμετρικά ως προς την ΑΒ. Υποχρεωτικά τα σημεία Γ και Δ θα ανήκουν στο ίδιο τόξο, διότι διαφορετικά το ΑΒΓΔ δε θα ήταν κυρτό. Το τόξο αυτό περιέχει τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, άρα αυτά ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

6.5 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να εξετάσετε αν και πόσοι κύκλοι περνούν:

α) από δύο σημεία Α και Β.

β) από τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ.

γ) από τέσσερα σημεία εκ των οποίων τρία οποιαδήποτε δεν είναι συνευθειακά.

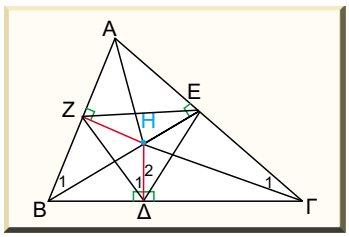
1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ τα οποία τέμνονται στο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τετράπλευρα ΒΔΗΖ, ΓΔΗΕ και ΒΓΕΖ είναι εγγράψιμα,

β) οι γωνίες $Z\widehat{\Delta}H$ και $E\widehat{\Delta}H$ είναι ίσες.

Απόδειξη



α) Το τετράπλευρο ΒΔΗΖ είναι εγγράψιμο, διότι οι απέναντι γωνίες του $B\widehat{\Delta}H$ και $B\widehat{Z}H$ είναι ορθές, άρα και παραπληρωματικές. Τα ίδια ισχύουν για το τετράπλευρο ΓΔΗΕ και τις γωνίες $\Gamma\widehat{\Delta}H$ και $\Gamma\widehat{E}H$.
Στο τετράπλευρο ΒΓΕΖ η πλευρά ΒΓ φαίνεται από τις κορυφές Ζ και Ε υπό τις ορθές (άρα ίσες) γωνίες $B\widehat{Z}\Gamma$ και $B\widehat{E}\Gamma$. Επομένως κι αυτό είναι εγγράψιμο.

β) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι εγγεγραμμένο, άρα η πλευρά ΖΗ φαίνεται από τις κορυφές Β και Δ υπό ίσες γωνίες, οπότε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_1$. Το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι εγγράψιμο, άρα η ΖΕ φαίνεται από τις κορυφές Β και Γ υπό ίσες γωνίες, άρα $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1$. Τέλος και το τετράπλευρο ΓΔΗΕ είναι εγγεγραμμένο και η πλευρά ΗΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές με ίσες γωνίες, οπότε $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Delta}_2$.
Συνοψίζοντας $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Delta}_2$.

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Δύο ευθείες

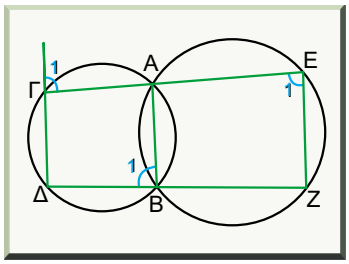
περνούν η μία από το Α και η άλλη από το Β, τέμνουν τον έναν κύκλο στα σημεία Γ και Δ και τον άλλο στα Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι ΓΔ//ΕΖ.

Απόδειξη

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΔΓ κάθε γωνία είναι ίση με την απέναντι εξωτερική, οπότε $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1$.

Ομοίως στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι $\widehat{E}_1 = \widehat{B}_1$.

Άρα οι γωνίες $\widehat{E}_1$ και $\widehat{\Gamma}_1$ είναι ίσες. Όμως αυτές είναι και εντός εναλλάξ στις ΓΔ και ΕΖ με τέμνουσα τη ΓΕ. Συνεπώς ΓΔ//ΕΖ.

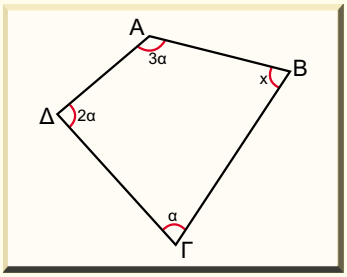


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Από τα είδη των παραλληλογράμμων, ποια είναι εγγράψιμα;

2 Αν η διάμεσος ενός τραπεζίου χωρίζει το τραπέζιο σε δύο εγγράψιμα τραπέζια, να εξηγήσετε γιατί το αρχικό τραπέζιο είναι εγγράψιμο.

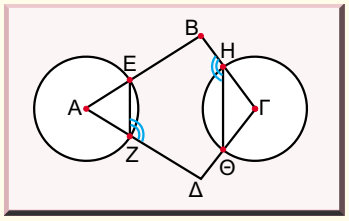
3 Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο να υπολογίσετε το x.



4 Να εξηγήσετε γιατί ένας εγγράψιμος ρόμβος είναι τετράγωνο.

5 Γιατί ένα εγγράψιμο τετράπλευρο δεν μπορεί να έχει τρεις αμβλείες γωνίες;

6 Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο, να δείξετε ότι οι γωνίες $\widehat{BH\Theta}$ και $\widehat{\Delta Z E}$ έχουν άθροισμα 270°.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το Α φέρουμε τυχαία ευθεία που τέμνει ρους κύκλους στα Γ και Δ. Επίσης από το Β τυχαία ευθεία που τέμνει τους κύκλους στα Ε και Ζ. Να αποδειχτεί ότι ΓΕ//ΔΖ.

2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και δύο τυχαίοι κύκλοι, που περνάνε από τις κορυφές Β και Γ αυτού. Αν Δ, Ε τα σημεία στα οποία οι κύκλοι τέμνουν την ΑΒ και Ζ, Η τα σημεία τομής με την ΑΓ, να αποδειχτεί ότι ΔΖ//ΕΗ.

3 Αν ΑΒΓΔ είναι τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο και φέρουμε ΒΕ⊥ΓΔ και ΓΖ⊥ΑΒ, να αποδειχτεί ότι ΕΖ//ΑΔ.

4 Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο Ο. Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Α και μία χορδή παράλληλη σ' αυτήν. Αν Δ και Ε τα σημεία τομής της χορδής με τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδειχτεί ότι το ΔΒΕΓ είναι εγγράψιμο.

5 Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του δε συντρέχουν αλλά σχηματίζουν τετράπλευρο ΚΛΜΝ να αποδείξετε ότι αυτό είναι εγγράψιμο.

6 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διχοτόμο ΒΚ και από το Κ φέρουμε την ΚΔ ώστε $K\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A}$, όπου Δ η τομή της ΒΓ με την ΚΔ. Να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ισοσκελές.

7 Από τυχαίο σημείο Μ του ύψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ΜΕ⊥ΑΒ και ΜΖ⊥ΑΓ. Να αποδειχτεί ότι το ΒΕΖΓ είναι εγγράψιμο.

8 Δίνεται εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Φέρουμε ΓΖ⊥ΒΔ και ΒΕ⊥ΑΓ. Να αποδειχτεί ότι ΖΕ//ΑΔ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και φέρουμε τις εφαπτόμενες στα σημεία Α και Β που τέμνονται στο Κ. Αν φέρουμε ΚΛ//ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Λ, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΒΛ είναι εγγράψιμο.

2 Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο τα συμμετρικά του ορθόκεντρου ως προς άξονες συμμετρίας τις πλευρές του τριγώνου, βρίσκονται επάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.

3 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν Ε είναι το σημείο τομής των μη παραλλήλων πλευρών, να αποδειχτεί ότι το ΕΑΟΓ είναι τετράπλευρο εγγράψιμο.

4 Το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Ε και οι εφαπτόμενες στα Α και Γ τέμνονται στο Ζ, να αποδειχτεί ότι το ΑΓΖΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

5 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΒΛ, που τέμνονται στο Η. Αν στην ΑΓ πάρουμε τμήμα ΛΜ=ΑΛ, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΗΜΓ είναι εγγράψιμο.

6 Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ. Παίρνουμε δύο ίσα τόξα $\overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ μικρότερα από τεταρτημόριο και σημείο Ε στο τόξο $\overset{\frown}{A\Delta}$. Αν Ο είναι το σημείο τομής των ΑΓ και ΒΕ και Ζ το σημείο τομής των ΑΔ και ΓΕ, να αποδειχτεί ότι:

α) Το ΑΕΖΟ είναι εγγράψιμο.

β) Το Ο ισαπέχει ίσες αποστάσεις από το Ζ και την ΑΒ.

7 Δίνεται μία διάμετρος ΑΒ ενός κύκλου (Ο,R) και δυο χορδές ΑΓ και ΑΔ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου ΑΒ. Αν η εφαπτόμενη στο Β τέμνει τις προεκτάσεις των ΑΓ και ΑΔ στα σημεία Κ και Λ, να δείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ, Κ, Λ είναι ομοκυκλικά.

8 Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και έναν οποιοδήποτε σημείο Μ του περιγεγραμμένου κύκλου του. Να δείξετε ότι οι προβολές του Μ στις πλευρές του τριγώνου βρίσκονται στην ίδια ευθεία (ευθεία του Simpson).

6.3 Χρήση γεωμετρικών τόπων σε γεωμετρικές κατασκευές

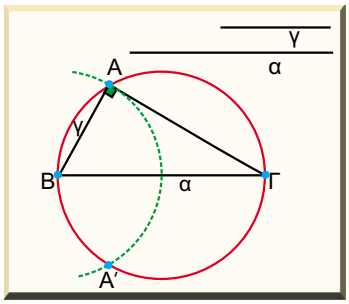
Θα παρουσιάσουμε τώρα τρεις κατασκευές που στηρίζονται στα προηγούμενα θεωρήματα και στο γεωμετρικό τόπο των σημείων του προβλήματος 6.1.

Πρόβλημα 6.3

Να κατασκευαστεί ορθογώνιο τρίγωνο, όταν γνωρίζουμε την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά του.

Ανάλυση

Έστω ότι κατασκευάστηκε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$, ΒΓ=α και ΑΒ=γ. Παρατηρούμε ότι η γωνία $\widehat{A}$ είναι ορθή, άρα το Α θα βρίσκεται σ' έναν κύκλο με διάμετρο τη ΒΓ. Ακόμη το Α απέχει από το σημείο Β απόσταση γ. Άρα θα βρίσκεται σ' έναν κύκλο με κέντρο το Β και ακτίνα γ.



Σύνθεση

Με διάμετρο ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ=α, γράφουμε έναν κύκλο. Με κέντρο το άκρο του Β και ακτίνα γ γράφουμε ένα δεύτερο κύκλο. Αν Α ένα κοινό σημείο των δυο κύκλων, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Η γωνία $\widehat{A} = 90°$ (εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο) και ΒΓ=α και ΒΑ=γ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο

Διερεύνηση

Για να υπάρχει το σημείο Α θα πρέπει οι δύο κύκλοι να τέμνονται.

Για να τέμνονται δύο κύκλοι θα πρέπει $|R - \rho| < \delta < R + \rho$.

Εδώ έχουμε $R = \frac{\alpha}{2}$, $\rho = \gamma$, $\delta = \frac{\alpha}{2}$.

Η προηγούμενη διπλή ανίσωση μας οδηγεί στη $\gamma > 0$ και $\gamma < \alpha$, προϋπόθεση γνωστή για να είναι η γ κάθετη πλευρά και η α υποτείνουσα σε ορθογώνιο τρίγωνο.

Με την προηγούμενη προϋπόθεση η λύση είναι μοναδική, διότι

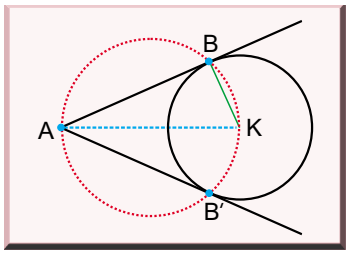
αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν ίσα τα παραπάνω στοιχεία είναι μεταξύ τους ίσα.

Πρόβλημα 6.4

Από σημείο εκτός κύκλου να κατασκευαστεί η εφαπτομένη του κύκλου αυτού.

Ανάλυση

Έστω (Κ,ρ) ο δεδομένος κύκλος, Α το σημείο εκτός αυτού και ΑΒ είναι η ζητούμενη εφαπτομένη. Παρατηρούμε ότι ΚΒ⊥ΑΒ, άρα πρέπει να κατασκευάσουμε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα το γνωστό τμήμα ΑΚ και πλευρά ίση με την ακτίνα του δεδομένου κύκλου (προηγούμενη κατασκευή).



Σύνθεση

Με διάμετρο το ΚΑ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον (Κ,ρ) στο Β. Η ΑΒ είναι η ζητούμενη εφαπτομένη.

Απόδειξη

Η γωνία $A\widehat{B}K = 90°$, διότι είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο. Επειδή ΚΒ είναι ακτίνα και ΒΑ⊥ΒΚ, η ΒΑ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Διερεύνηση

Αρκεί ΑΚ>ρ, δηλαδή το Α να είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (προϋπόθεση γνωστή εκ των προτέρων).

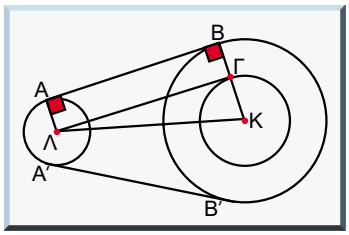
Οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία το Β και το Β΄, οπότε έχουμε και δεύτερη εφαπτομένη από το Α, την ΑΒ΄. (Εδώ οι δύο εφαπτόμενες είναι ίσες, αλλά θεωρούνται δύο λύσεις, διότι μας ενδιαφέρει η συγκεκριμένη θέση της καθεμιάς).

Πρόβλημα 6.5

Να κατασκευαστεί η κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων.

Ανάλυση

Έστω οι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ), R>ρ, και ΑΒ η κοινή εφαπτομένη τους. Προφανώς $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$. Αν φέρουμε ΛΓ⊥ΚΒ, το τετράπλευρο ΑΒΓΛ είναι ορθογώνιο, άρα $\Lambda\widehat{\Gamma}K = 90°$. Συνεπώς η ΛΓ είναι εφαπτομένη στον κύκλο (Κ,ΚΓ). Ο κύκλος αυτός όμως έχει γνωστό κέντρο Κ και γνωστή ακτίνα ΚΓ=ΚΒ–ΒΓ=R–ρ.



Άρα μπορούμε να τον κατασκευάσουμε.

Σύνθεση

Γράφουμε τον κύκλο (Κ,R–ρ). Από το Λ φέρουμε την εφαπτομένη ΛΓ (προηγούμενη κατασκευή). Προεκτείνουμε την ΚΓ και προσδιορίζουμε το Β. Φέρουμε την ακτίνα ΛΑ//ΚΒ. Η ΑΒ είναι η ζητούμενη εφαπτομένη.

Απόδειξη

Η γωνία $\widehat{\Gamma} = 90^\circ$, διότι είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο.

Η ΒΓ=ΒΚ–ΚΓ=R–(R–ρ)=ρ, δηλαδή ΑΛ//ΒΓ και ΑΛ=ΒΓ, οπότε το ΑΒΓΛ είναι ορθογώνιο.

Άρα $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$ και συνεπώς η ΑΒ εφάπτεται στους δύο κύκλους.

Διερεύνηση

Γενικότερα τώρα το αν και πόσες κοινές εφαπτόμενες έχουν δυο κύκλοι εξαρτάται από τη σχετική τους θέση. Εδώ εξετάσαμε μία μόνο περίπτωση και για μία μόνο εφαπτομένη. Στο ίδιο σχήμα υπάρχουν ακόμη τρεις κοινές εφαπτόμενες, εκ των οποίων η μία είναι η Α΄Β΄.

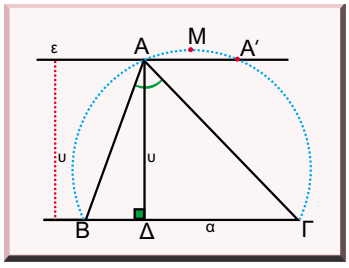
Πρόβλημα 6.6

Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ, αν δίνονται η πλευρά ΒΓ=α, το ύψος ΑΔ=υ και η γωνία $\widehat{A} = \varphi$.

Ανάλυση

Έστω ότι το ζητούμενο τρίγωνο είναι το ΑΒΓ. Εφόσον $B\widehat{A}\Gamma = \varphi$, το σημείο Α θα βρίσκεται σε ένα από τα δύο τόξα με χορδή τη ΒΓ (γνωστός Γ.Τ, πρόβλημα 6.2).

Ακόμη επειδή το Α απέχει από τη ΒΓ απόσταση υ, θα βρίσκεται σε μια από τις δύο ευθείες που είναι παράλληλες στη ΒΓ και απέχουν απόσταση υ απ' αυτή.



Σύνθεση

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ=α και κατασκευάζουμε τόξο που τα σημεία του βλέπουν το ΒΓ υπό γωνία φ. Φέρουμε ακόμη ευθεία ε//ΒΓ και σε απόσταση υ από τη ΒΓ. Η ευθεία ε τέμνει το τόξο στο σημείο Α. Το ΑΒΓ είναι το ζητούμενοτρίγωνο.

Απόδειξη

Προφανής.

Διερεύνηση

Θα πρέπει $0° < \varphi < 180°$. Το Α προσδιορίζεται σαν τομή της ευθείας ε και του τόξου $B\overset{\frown}{M}\Gamma$. Άρα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

- Αν η ε δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το τόξο $B\overset{\frown}{M}\Gamma$, δηλαδή όταν το μέσο Μ του τόξου απέχει από τη ΒΓ απόσταση μικρότερη του υ, δεν έχουμε καμιά λύση.
- Αν η ε εφάπτεται στο τόξο $B\overset{\frown}{M}\Gamma$, δηλαδή όταν το μέσο Μ του τόξου απέχει από τη ΒΓ απόσταση ίση με υ, τότε έχουμε μία λύση.
- Αν η ε τέμνει το τόξο $B\overset{\frown}{M}\Gamma$, δηλαδή όταν το μέσο Μ του τόξου απέχει από τη ΒΓ απόσταση μεγαλύτερη του υ, τότε έχουμε μία λύση. Αν Α και Α΄ τα σημεία τομής της ε με το τόξο $B\overset{\frown}{M}\Gamma$, παίρνουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄ΒΓ. Επειδή όμως τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄ΒΓ είναι ίσα και συμμετρικά ως προς τη ΒΓ, δε θεωρούμε ότι έχουμε δύο λύσεις στο πρόβλημα, αλλά μία.

Ίδιες παρατηρήσεις κάνουμε και για το τόξο ΒΜ΄Γ, το συμμετρικό του ΒΜΓ ως προς τη ΒΓ.

6.6 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών ενός κύκλου όταν:

α) περνούν από ένα σταθερό σημείο.

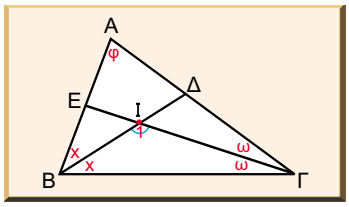
β) ισαπέχουν από το κέντρο.

γ) είναι παράλληλες.

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του έγκεντρου ενός τριγώνου ΑΒΓ, όταν η πλευρά του ΒΓ μένει ακίνητη και η κορυφή Α κινείται έτσι, ώστε η γωνία $\hat{A}$ να διατηρεί σταθερό μέτρο φ.

Λύση



Έστω μία τυχαία θέση της κορυφής Α. Φέρουμε τις διχοτόμους ΒΔ και ΓΕ, και έστω Ι το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$ ή $\varphi+2x+2\omega=180°$.

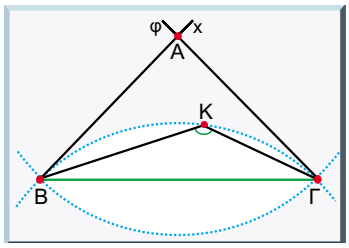
Στο τρίγωνο ΒΙΓ ισχύει $x+\omega=180°-\hat{I}_1$

Έτσι η σχέση $\varphi+2x+2\omega=180°$ γίνεται

$\varphi+2(180°-\hat{I}_1)=180°$ και τελικά $\hat{I}_1=90°+\frac{\varphi}{2}$

Επομένως το σημείο Ι βλέπει την πλευρά ΒΓ υπό σταθερή γωνία $90°+\frac{\varphi}{2}$, άρα βρίσκεται σε δύο τόξα κοινής χορδής ΒΓ συμμετρικά ως προς αυτήν που τα σημεία της βλέπουν τη ΒΓ υπό γωνία $90°+\frac{\varphi}{2}$. Συνεπώς, το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ ανήκει πάντα στα τόξα αυτά.

Αντιστρόφως



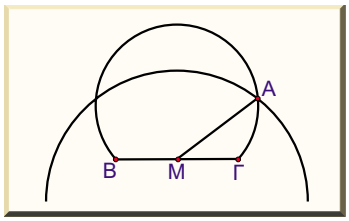
Αν Κ ένα σημείο των τόξων αυτών, κατασκευάζουμε μία γωνία $K\hat{B}x$ ίση και διαδοχική της $K\hat{B}\Gamma$ και μία γωνία $K\hat{\Gamma}y$ ίση και διαδοχική της $K\hat{\Gamma}B$. Οι ημιευθείες Βx και Γy τέμνονται (διότι $B\hat{K}\Gamma=90°+\frac{\varphi}{2}>90°$, άρα $K\hat{B}\Gamma+K\hat{\Gamma}B<90°$, άρα $\Gamma\hat{B}x+B\hat{\Gamma}y<180°$) στο Α. Το Κ είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ οπότε διαπιστώνουμε ότι $B\hat{A}\Gamma=\varphi$. Άρα κάθε σημείο των τόξων αυτών είναι έγκεντρο ενός τέτοιου τριγώνου.

Ώστε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το σχήμα που αποτελούν τα δύο αυτά τόξα.

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ, όταν γνωρίζουμε το μέτρο της γωνίας $\hat{A}=\varphi$, το μήκος της πλευράς ΒΓ=α και το μήκος της διαμέσου $\mu_\alpha=\kappa$.

Ανάλυση



Αν θεωρήσουμε ένα τμήμα ΒΓ=α, η κορυφή Α θα βλέπει τη ΒΓ υπό γνωστή γωνία φ. Άρα θα ανήκει σ' ένα από τα τόξα που αναφέραμε στην παράγραφο 6.1. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, τότε η απόσταση ΜΑ=κ είναι γνωστή, άρα το Α θα βρίσκεται σ' έναν κύκλο με κέντρο το Μ και ακτίνα κ.

Σύνθεση

Παίρνουμε τμήμα ΒΓ=α. Στη συνέχεια γράφουμε τα δύο τόξα από τα σημεία των οποίων το ΒΓ φαίνεται υπό γωνία φ. Και τέλος, γράφουμε κύκλο ακτίνας κ με κέντρο το μέσο Μ του ΒΓ. Η τομή του κύκλου με τα προηγούμενα τόξα προσδιορίζει τη θέση της κορυφής Α.

Απόδειξη

Προφανής.

Διερεύνηση

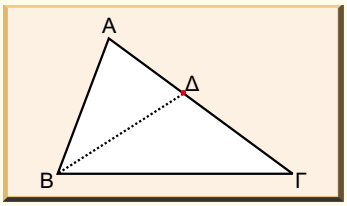
Ο κύκλος (Μ,κ) ενδεχομένως να περνά από τα σημεία Β και Γ ή να μην έχει κανένα κοινό σημείο με τα τόξα. Στην περίπτωση αυτή τέτοιο τρίγωνο δεν υπάρχει. Αν ο κύκλος (Μ,κ) έχει περισσότερα κοινά σημεία με τα εν λόγω τόξα, οι θέσεις της κορυφής Α είναι διαφορετικές αλλά τα τρίγωνα αυτά είναι όλα ίσα μεταξύ τους και θεωρούμε ότι έχουμε μία λύση στο πρόβλημα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

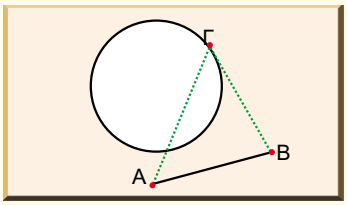
1 Πώς μπορούμε να βρούμε τη θέση του σημείου Δ ώστε το τρίγωνο ΒΓΔ να είναι ισοσκελές

α) με βάση τη ΒΓ,

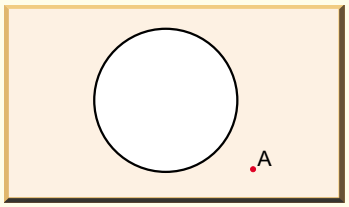
β) με βάση τη ΒΔ;



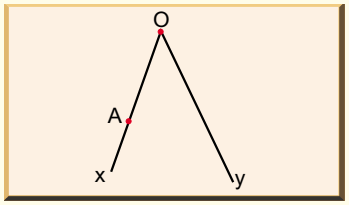
2 Με ποια κατασκευή θα προσδιορίσουμε ένα σημείο Γ του κύκλου που να ισαπέχει από τα σημεία Α και Β;



3 Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε δύο σημεία του κύκλου που να ισαπέχουν από το Α; Πόσα τέτοια ζεύγη σημείων υπάρχουν;



4 Με ποια κατασκευή μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα σημείο το οποίο θα ισαπέχει από τα σημεία Α και Ο, αλλά θα ισαπέχει και από τις πλευρές Ox και Oy.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται μία ευθεία ε, ένα σημείο Α εκτός αυτής και ένα ευθύγραμμο τμήμα λ. Να κατασκευάσετε έναν κύκλο, που να έχει κέντρο το Α και να κόβει χορδή μήκους λ από την ευθεία ε.

2 Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο όταν δίνονται οι δύο διαγώνιές του $δ_1$ και $δ_2$ και μία πλευρά α.

3 Να κατασκευαστεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όταν γνωρίζουμε την οξεια γωνία $\widehat{Γ} = φ$ και τη διάμεσο $μ_α$ προς την υποτείνουσα.

4 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ όταν οι πλευρές του ΑΒ και ΓΔ κινούνται πάνω σε δύο δοσμένες παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$.

5 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΒΓ είναι σταθερή ως προς τη θέση και ως προς το μέγεθος (ακίνητη) και η γωνία $\widehat{Α}$ διατηρεί σταθερό μέτρο ω. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ της πλευράς ΑΓ.

6 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται στις πλευρές δοσμένης γωνίας $x\widehat{O}y$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ από τα οποία τα εφαπτόμενα τμήματα που φέρουμε προς δοσμένο κύκλο (Ο,R) έχουν σταθερό μήκος λ.

2 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΒΓ είναι σταθερή κατά θέση και μέγεθος και η γωνία $\widehat{Α}$ διατηρεί σταθερό μέτρο φ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του έγκεντρου του τριγώνου.

3 Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο όταν γνωρίζουμε τις δύο διαγώνιες $δ_1$ και $δ_2$ και μια του γωνία $\widehat{Β} = φ$.

4 Να κατασκευαστεί ένα τρίγωνο ΑΒΓ όταν γνωρίζουμε τα μήκη των τριών διαμέσων του.

5 Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ όταν γνωρίζουμε την πλευρά α, το ύψος $υ_α$ και την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Αν Δ, Ε και Ζ σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΔΖ, ΒΔΕ και ΓΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο (σημείο Miquel),

2 Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο (Ο,R) τριγώνου ΑΒΓ και το ορθόκεντρό του Η. Από την κορυφή Β φέρουμε τη χορδή ΒΔ του κύκλου έτσι, ώστε ΒΔ⊥ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ κάθετη στην ΑΓ.

β) ΒΔ=ΑΗ.

γ) $OM = \frac{AH}{2}$, όπου Μ μέσο της ΒΓ.

3 Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο το ορθόκεντρο, το βαρύκεντρο και το περίκεντρο βρίσκονται στην ίδια ευθεία (ευθεία του Euler).

4 Να αποδειχτεί ότι σε κάθε τρίγωνο τα ίχνη των

υψών, τα μέσα των πλευρών και τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων, που συνδέουν το ορθόκεντρο του τριγώνου με τις κορυφές του, ανήκουν στον ίδιο κύκλο (κύκλος του Euler ή κύκλος των εννιά σημείων).

5 Με πλευρές τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΕ, ΑΓΖ εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι οι ΒΖ, ΔΓ, ΑΕ συντρέχουν.

6 Δίνεται τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ και ΒΓ=α η αντίστοιχη χορδή του. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ, αν είναι γνωστά η πλευρά του ΒΓ=α, το ύψος του ΑΔ=$υ_α$ και αν γνωρίζουμε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$, όπου α, $υ_α$ γνωστά ευθύγραμμα τμήματα.

7 Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγράφουμε τετράγωνο ΔΕΖΗ έτσι, ώστε η πλευρά ΔΕ να βρίσκεται πάνω στη ΒΓ. Να αποδείξετε ότι αν Ο είναι το κέντρο του τετραγώνου, η ΑΟ διχοτομεί τη γωνία $\hat{Α}$ του τριγώνου.

8 Θεωρούμε ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο εσωτερικά του σημεία Γ και Δ. Αν οι εφαπτόμενες του ημικυκλίου αυτού στα Γ και Δ τέμνονται στο Μ, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στην κάθετο από το Μ προς την ΑΒ.

9 Θεωρούμε ένα κύκλο, ένα τόξο του $\overset{\frown}{ΑΒ}=120°$ και ένα εσωτερικό σημείο Μ του τόξου αυτού. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β τέμνονται στο Γ. Η ευθεία ΑΜ τέμνει τη ΒΓ στο Δ και η ευθεία ΒΜ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να δείξετε ότι ΑΔ=ΒΕ.

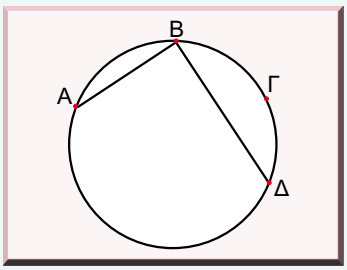
10 Έστω ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Μία εσωτερική ημιευθεία Βx της γωνίας $\widehat{ΑΒΓ}$ τέμνει τον κύκλο διαμέτρου ΑΒ στο Ε και τον κύκλο (Β,ΒΑ) στο Ζ. Φέρουμε το κάθετο τμήμα ΖΗ προς την ΑΔ. Να δείξετε ότι ΖΕ=ΖΗ.

11 Θεωρούμε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και γράφουμε τους κύκλους με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ. Αν Μ και Ν τα μέσα των ημικυκλίων που βρίσκονται στο εσωτερικό του τετραπλεύρου, η ευθεία ΜΝ τέμνει τα άλλα ημικύκλια στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Οι ευθείες ΕΑ και ΖΔ τέμνονται στοΗ και οι ευθείες ΕΒ και ΖΓ τέμνονται στο Θ. Να δείξετε ότι το ΕΘΖΗ είναι τετράγωνο.

12 Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ, που τέμνονται στο σημείο Κ. Να δείξετε ότι η απόσταση του Ο από τη ΒΔ είνα ίση με το μισό της ΓΑ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 6ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Αν σε κύκλο με κέντρο Ο έχουμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}=\overset{\frown}{ΒΓ}=\overset{\frown}{ΓΔ}=60°$, τότε ΑΒ⊥ΒΔ.



❑ Σωστό ❑ Λάθος

2 Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι εγγράψιμο, τότε είναι ορθογώνιο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

3 Αν ένας ρόμβος είναι εγγράψιμο τετράπλευρο, τότε είναι τετράγωνο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

4

Αν τα μέτρα των γωνιών Α, Β, Γ, Δ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 10, 11, 13, 12, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο

❑ Σωστό ❑ Λάθος

5 Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι εγγράψιμο, τότε οι διαγώνιές του περνούν απ' το κέντρο του κύκλου.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

6 Αν ΑΒΓΔ εγγρεγραμμένο τετράπλευρο, τότε

Α. ❑ $\hat{A}+\hat{B}=180°$

Β. ❑ $\hat{A}+\hat{\Gamma}=180°$

Γ. ❑ $\hat{B}-\hat{\Delta}=180°$

Δ. ❑ ΑΒ+ΔΓ=ΑΔ+ΒΓ

7 Ένα τραπέζιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο

Α. ❑ Ποτέ.

Β. ❑ Πάντα.

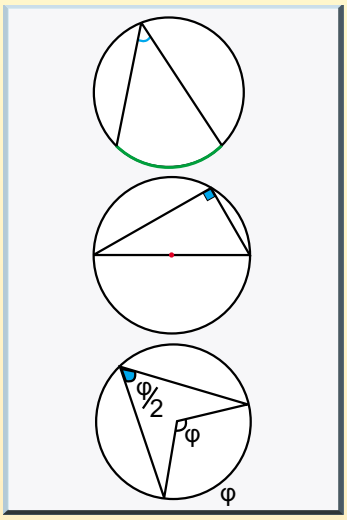
Γ. ❑ Αν είναι ισοσκελές.

Δ. ❑ Αν η μικρή βάση είναι το μισό της μεγάλης.

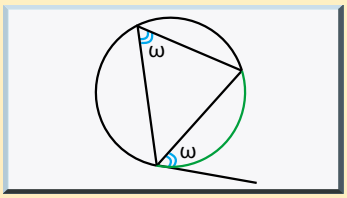
ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου 6 δώσαμε τον ορισμό της εγγεγραμμένης γωνίας σε κύκλο (η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν αυτόν). Βασική σχέση της ενότητας αυτής είναι η σχέση μεταξύ εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο (η εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο μ' αυτήν τόξο).

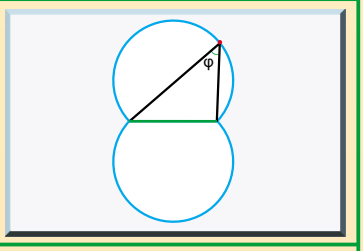
Κλασική περίπτωση εγγεγραμμένης γωνίας είναι αυτή που βαίνει σε ημικύκλιο, που φυσικά είναι ορθή και που εμφανίζεται σχεδόν "ταυτόχρονα" με την εμφάνιση μιας διαμέτρου.



Μια άλλη γωνία, που μελετήσαμε, είναι η γωνία που σχηματίζεται από χορδή κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου στο ένα άκρο της χορδής. Η γωνία αυτή ισούται με κάθε εγγεγραμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

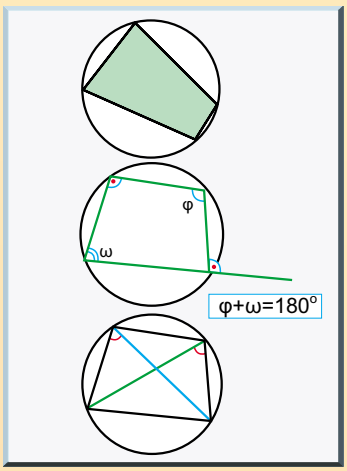


Η έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας και η σχέση της με το αντίστοιχο τόξο μας έδωσε την ευκαιρία να εντοπίσουμε έναν ακόμη γεωμετρικό τόπο (των σημείων που βλέπουν ένα τμήμα υπό ορισμένη γωνία) και να ασχοληθούμε και με την κατασκευή του. Ως γνωστό ο τόπος αυτός αποτελείται από δύο τόξα με κοινή χορδή το τμήμα και συμμετρικά ως προς αυτό.



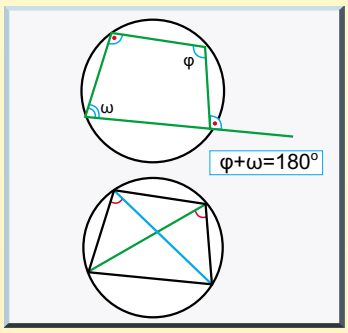
Στην επόμενη παράγραφο του κεφαλαίου γνωρίσαμε τις ιδιότητες των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων σε κύκλο. Έτσι αν ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε:

- οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- κάθε γωνία του είναι ίση με την εξωτερική της απέναντι γωνίας του.
- κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.



Στην ίδια παράγραφο μελετήσαμε τα κριτήρια εγγράψιμου τετραπλεύρου. Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν

- οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- κάθε γωνία του είναι ίση με την εξωτερική της απέναντι γωνίας του.
- κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.



Κλείσαμε το 6ο κεφάλαιο με γεωμετρικές κατασκευές που βασίζονται στις εγγεγραμμένες γωνίες σε κύκλο. Έτσι κατασκευάσαμε τρίγωνο από γωνία, απέναντι πλευρά και αντίστοιχο προς αυτήν ύψος, και ορθογώνιο τρίγωνο από υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά (στηριζόμενοι στην κλασική όπως τη χαρακτηρίσαμε περίπτωση της εγγεγραμμένης που βαίνει σε ημικύκλιο).

Ακόμη κατασκευάσαμε την εφαπτομένη κύκλου από σημείο εκτός αυτού και της κοινής εφαπτομένης δύο κύκλων σε μια από τις διάφορες περιπτώσεις που μπορούμε να συναντήσουμε.