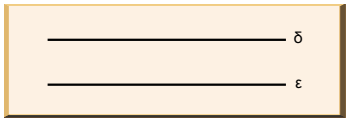
Κεφάλαιο 4

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

4.1 Παράλληλες ευθείες

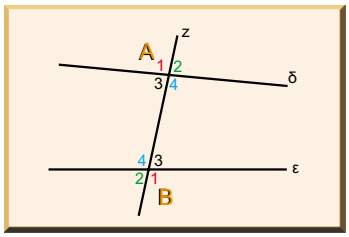
Ορισμός

Δύο ευθείες ονομάζονται παράλληλες, όταν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



Για να δηλώσουμε ότι δύο ευθείες α και β είναι παράλληλες χρησιμοποιούμε το συμβολισμό δ//ε.

Γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από μία τρίτη



Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο ευθείες, τις δ και ε που τέμνονται από μία τρίτη τη z στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

Σχηματίζονται έτσι 8 γωνίες, 4 με κορυφή το Α τις οποίες συμβολίζουμε με $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$, $\widehat{A}_3$, $\widehat{A}_4$ και 4 με κορυφή το Β, τις οποίες συμβολίζουμε με $\widehat{B}_1$, $\widehat{B}_2$, $\widehat{B}_3$, $\widehat{B}_4$. Ορισμένα από τα ζεύγη των γωνιών αυτών παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τη μελέτη των παράλληλων ευθειών, γι' αυτό θα επιχειρήσουμε μια συστηματική ταξινόμησή τους.

Τα ζεύγη στα οποία θα αναφερθούμε περιέχουν μια γωνία με κορυφή το Α και μία γωνία με κορυφή το Β. Προσέχουμε τα εξής σημεία:

α) αν οι γωνίες δίνουν την εντύπωση ότι βρίσκονται εντός (ανάμεσα) των ευθειών δ και ε (όπως οι $\widehat{A}_3$, $\widehat{A}_4$, $\widehat{B}_3$, $\widehat{B}_4$) ή εκτός (απέξω) των ευθειών δ και ε (όπως οι $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$, $\widehat{B}_1$, $\widehat{B}_2$),

β) αν οι γωνίες βρίσκονται προς το αυτό (ίδιο) μέρος της τέμνουσας z (όπως οι $\widehat{A}_1$, $\widehat{B}_2$, $\widehat{A}_3$, $\widehat{B}_4$ ή $\widehat{A}_2$, $\widehat{B}_3$, $\widehat{A}_4$, $\widehat{B}_1$) ή αν βρίσκονται εναλλάξ (σε διαφορετικά μέρη) της τέμνουσας z (όπως οι $\widehat{A}_3$ και $\widehat{B}_3$).

Οι θέσεις των παραπάνω γωνιών καθορίζουν την ονομασία τους, και οι συνδυασμοί που θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα είναι οι:

α) Εντός εναλλάξ γωνίες, όπως οι γωνίες $\widehat{A}_3$ και $\widehat{B}_3$ ή οι $\widehat{A}_4$ και $\widehat{B}_4$.

β) Οι εντός επί τα αυτά γωνίες, όπως οι γωνίες $\widehat{A}_3$ και $\widehat{B}_4$ ή οι $\widehat{A}_4$ και $\widehat{B}_3$.

γ) Οι εντός εκτός κι επί τα αυτά γωνίες, όπως οι γωνίες $\widehat{A}_3$ και $\widehat{B}_2$ ή οι $\widehat{A}_4$ και $\widehat{B}_1$ ή οι $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_4$ ή οι $\widehat{A}_2$ και $\widehat{B}_3$.

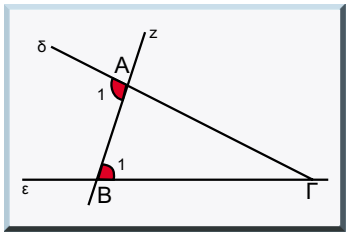
Θεώρημα 4.1

Θεώρημα ύπαρξης παραλλήλων ευθειών

Αν δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη και σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

Απόδειξη

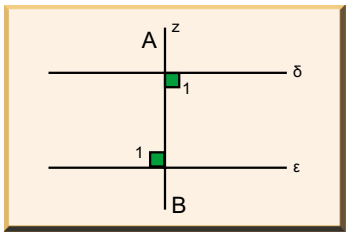
Θεωρούμε τις ευθείες δ και ε που τέμνονται από τη z στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$ ίσες.



Έστω ότι οι ευθείες δ και ε τέμνονται σ' ένα σημείο Γ. Σχηματίζεται έτσι ένα τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η γωνία $\widehat{A}_1$ είναι εξωτερική και η $\widehat{B}_1$ απέναντι εσωτερική. Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα του 3ου κεφαλαίου, θα ισχύει $\widehat{A}_1 > \widehat{B}_1$. Αυτό όμως είναι άτοπο, επειδή $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$, οπότε συμπεραίνουμε ότι δ//ε. ■

Πόρισμα 4.1

Δύο ευθείες κάθετες σε τρίτη ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες.



Απόδειξη

Θεωρούμε δύο ευθείες δ και ε κάθετες στην ευθεία z. Τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$ είναι ίσες, ως ορθές, άρα δ//ε. ■

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζεται **απόσταση** των παράλληλων δ και ε.

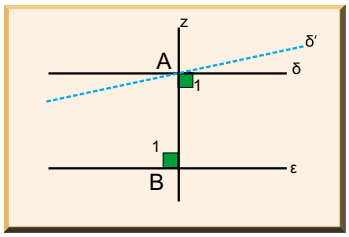
Πόρισμα 4.2

α) Αν δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη και σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

β) Αν δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη και σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

Αξίωμα παραλληλίας

Με το θεώρημα 4.1 και τα πορίσματα 4.1 και 4.2 κατοχυρώνεται η ύπαρξη μιας τουλάχιστον παράλληλης από ένα σημείο, έστω Α προς μία ευθεία ε. Για να κατασκευάσουμε αυτή την παράλληλη από το Α προς την ε, φέρουμε αρχικά μία ευθεία z που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ε. Η ευθεία z τέμνει την ε στο Β. Στη συνέχεια φέρουμε ευθεία δ κάθετη στη z στο Α. Σχηματίζονται έτσι οι εντός εναλλάξ γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$, οι οποίες ως ορθές, είναι ίσες και επομένως δ//ε. Δε φαίνεται όμως τίποτα να αποκλείει την ύπαρξη και μίας άλλης ευθείας δ΄ παράλληλης προς την ε που να διέρχεται από το σημείο Α. Η εποπτεία όμως δίνει την εντύπωση ότι η δ είναι η μοναδική παράλληλη από το Α προς την ε. Αναγκαζόμαστε δηλαδή κατά κάποιον τρόπο να δεχτούμε το παρακάτω αξίωμα, το οποίο ονομάζεται αξίωμα της παραλληλίας.



Από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς την ευθεία αυτή.

Αξίωμα

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το 5ο αίτημα των «Στοιχείων» του Ευκλείδη

Το 1ο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη περιέχει πέντε «κοινές έννοιες» (περί ισότητας σχημάτων) και πέντε «αιτήματα», δηλαδή αξιώματα, από τα οποία το πέμπτο (γνωστό και ως crux-geometrica - γεωμετρικό βάσανο) είναι το περίφημο αίτημα των παραλλήλων:

΄΄Καί ἐάν δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τάς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἅ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες".

(Αν δύο ευθείες τέμνονται από μια ευθεία έτσι, ώστε οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες να έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο

ορθές, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες στο άπειρο θα συναντηθούν προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές).

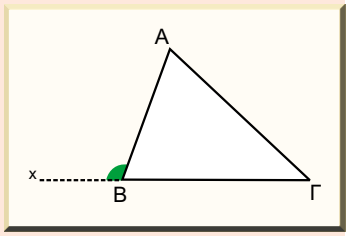
Το 5ο αυτό αίτημα παραμένει αναπόδεικτο, αντίθετα, το αντίστροφο αποδεικνύεται ως εξής:

Θεώρημα 4.2

Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε γωνιών είναι μικρότερο από δύο ορθές γωνίες.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Αρκεί να αποδείξουμε π.χ. ότι είναι $\widehat{A}+\widehat{B}<180^\circ$. Σχηματίζουμε την εξωτερική γωνία $x\widehat{B}A$ της γωνίας $\widehat{B}$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.11 θα είναι $\widehat{A}<x\widehat{B}A$ ή $\widehat{A}+\widehat{B}<x\widehat{B}A+\widehat{B}$. Επειδή όμως $x\widehat{B}A+\widehat{B}=180^\circ$, συμπεραίνουμε τελικά ότι $\widehat{A}+\widehat{B}<180^\circ$. ■



Από την αρχαιότητα προσπαθούν να αποδείξουν το 5ο αίτημα του Ευκλείδη αντικαθιστώντας το με προτάσεις που ίσως ήταν πιο αληθοφανείς. Όλες όμως αυτές οι μακροχρόνιες προσπάθειες, κατέληγαν πάντοτε σε αποτυχία. Ο λόγος αποτυχίας ήταν το ότι το 5ο αίτημα διατυπώνει ένα ισχυρισμό, η επαλήθευση του οποίου αναφέρεται σε χώρο που μπορεί να βρίσκεται απείρως μακριά μας και συνεπώς έξω από την άμεση εποπτεία μας.

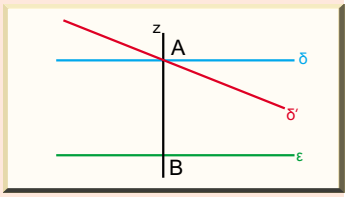
Η πιο παλιά προσπάθεια αποδίδεται στον Πτολεμαίο, έναν μεγάλο αλεξανδρινό Έλληνα μαθηματικό. Με το ίδιο αίτημα ασχολήθηκε και ο Άραβας Ομάρ Καγιάμ (1100 μ.Χ.). Πολύ αργότερα ο Ρώσος Λομπατσέφσκι (Nikolai I. Lobatchevski, 1826) έδειξε ότι το 5ο αίτημα των παραλλήλων είναι ανεξάρτητο από τα άλλα αιτήματα.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε την ισοδυναμία μεταξύ του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη και του αξιώματος της παραλληλίας.

Αυτό σημαίνει ότι ισχύουν ταυτόχρονα οι δύο προτάσεις.

α) Από το αξίωμα της παραλληλίας συνεπάγεται το 5ο αίτημα (βλ. παρακάτω θεώρημα 4.6).

β) Από το 5ο αίτημα εξάγεται εύκολα το «αξίωμα της παραλληλίας» – το οποίο διατύπωσε ο Τζον Πλέιφερ (John Playfair) –και αποδεικνύεται ως εξής:



Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Φέρουμε από το Α ευθεία z κάθετη προς την ε, που τέμνει την ε στο Β και ευθεία δ κάθετη στη z στο Α. Τότε είναι δ//ε σύμφωνα με το πόρισμα 4.1.

Θεωρούμε τώρα τυχαία ευθεία δ΄ που διέρχεται από το Α. Επειδή $\delta\widehat{A}B = 90^\circ$ και $\delta' \neq \delta$, η δ΄ θα σχηματίζει με τη z μία οξεία γωνία $\delta'\widehat{A}B$, δηλαδή $\delta'\widehat{A}B < 90^\circ$. Άρα $\delta'\widehat{A}B + A\widehat{B}\varepsilon < 180^\circ$. Συνεπώς, σύμφωνα με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη, οι δ΄ και ε τέμνονται. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η δ είναι η μοναδική παράλληλη προς την ε, που διέρχεται από το σημείο Α.

Με την άρνηση του "5ου αιτήματος" και επομένως του αξιώματος της παραλληλίας, εισαγόμαστε αμέσως στη σφαίρα των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.

Έτσι, σύμφωνα με τη Γεωμετρία του Λομπατσέφκσι (Nicolai I. Lobatchevski 1826) ή Υπερβολική Γεωμετρία, δεχόμαστε ότι από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχονται δύο παράλληλες.

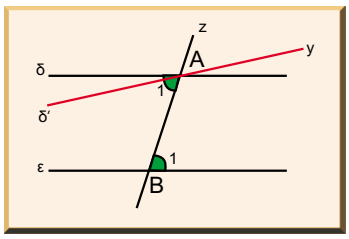
Ενώ, σύμφωνα με τη Γεωμετρία του Ρήμαν (Bernand Riemann, 1866) ή Προβολική Γεωμετρία, δεχόμαστε ότι δε διέρχεται καμία παράλληλη από ένα σημείο εκτός ευθείας. Η Γεωμετρία αυτή ταιριάζει καλύτερα στο χώρο του σύμπαντος, σύμφωνα με τη θεωρία της γενικής σχετικότητας του Α. Einstein.

4.2 Ιδιότητες παράλληλων ευθειών

Θεώρημα 4.3

Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

Απόδειξη



Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες δ και ε που τέμνονται από τη z στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Έστω ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$ δεν είναι ίσες αλλά $\widehat{A}_1 > \widehat{B}_1$. Τότε υπάρχει ευθεία δ΄ που διέρχεται από το Α τέτοια, ώστε $\delta'\widehat{A}B = \widehat{B}_1$. Έτσι έχουμε τις ευθείες δ΄ και ε να τέμνονται στα σημεία Α και Β από τη z και να σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\delta'\widehat{A}B$ και $\widehat{B}_1$ ίσες. Θα πρέπει επομένως δ΄//ε, δηλαδή από το Α διέρχεται και δεύτερη ευθεία, η δ΄, παράλληλη προς την ε. Αυτό όμως είναι άτοπο. Σε άτοπο επίσης καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $\widehat{A}_1 < \widehat{B}_1$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$ είναι ίσες. ■

Πόρισμα 4.3

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

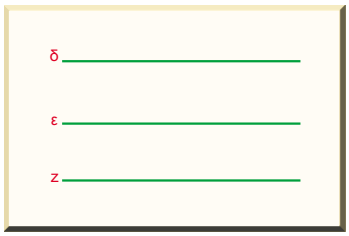
Πόρισμα 4.4

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Θεώρημα 4.4

Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες προς τρίτη, τότε θα είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

Απόδειξη



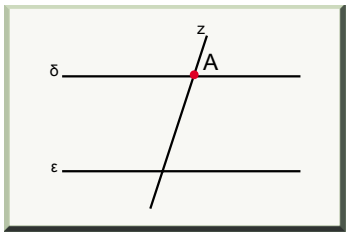
Θεωρούμε τις ευθείες δ, ε και z για τις οποίες γνωρίζουμε ότι δ//z και ε//z. Θα αποδείξουμε ότι και δ//ε. Έστω ότι οι ευθείες δ και ε τέμνονται σε σημείο Α. Τότε από το Α διέρχονται δύο ευθείες παράλληλες προς τη z, οι δ και ε. Αυτό όμως είναι άτοπο. Άρα δ//ε. ■

Θεώρημα 4.5

Αν μια ευθεία τέμνει τη μια από δύο παράλληλες, τότε θα τέμνει και την άλλη.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες δ και ε καθώς και ευθεία z, που τέμνει τη δ στο Α. Αν η z δεν έτεμνε την ε θα ήταν παράλληλη προς αυτήν. Άρα θα είχαμε από το Α δύο ευθείες παράλληλες προς την ε, τις δ και z, που είναι άτοπο. Συνεπώς η z τέμνει την ε. ■

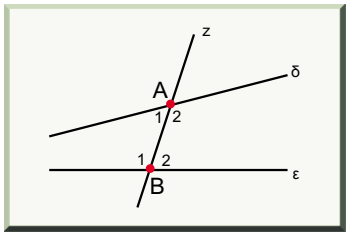


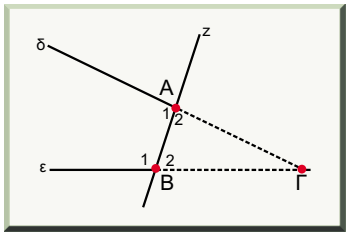
Θεώρημα 4.6

Αν δύο ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία και σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 180°, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες αυτές.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις ευθείες δ και ε που τέμνονται από τη z στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, και για τις εντός και επί τα αυτά γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_1$ ισχύει $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 < 180°$. Οι ευθείες δ και ε τέμνονται, διότι αν ήταν παράλληλες θα είχαμε $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180°$. Οι ευθείες δ και ε τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_1$, γιατί αν τέμνονταν σε σημείο Γ προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{B}_2$, τότε θα σχηματιζόταν τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η $\hat{B}_1$ θα ήταν απέναντι εξωτερική της $\hat{A}_2$. Άρα θα είχαμε $\hat{B}_1 > \hat{A}_2$ οπότε $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 > \hat{A}_1 + \hat{A}_2$ δηλαδή $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 > 180°$ που είναι άτοπο, διότι $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 < 180°$. Άρα οι ευθείες α και β τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_1$. ■





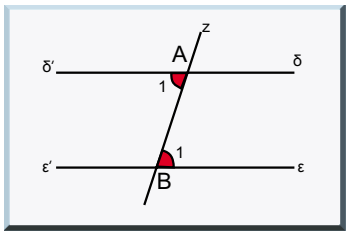
4.2.1 Κατασκευή παράλληλης ευθείας

Πρόβλημα

Από σημείο Α που βρίσκεται εκτός ευθείας ε, να κατασκευαστεί ευθεία παράλληλη προς την ε.

Ανάλυση

Έστω ε η δοθείσα ευθεία και Α ένα σημείο εκτός αυτής. Αν δ η ζητούμενη παράλληλη και Β ένα τυχαίο σημείο της ε, τότε οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_1$ είναι ίσες, ως εντός εναλλάξ. Το Β είναι τυχαίο σημείο της ε και η κατασκευή της $\hat{A}_1$ ίσης με τη $\hat{B}_1$ είναι δυνατή.



Σύνθεση

Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Β της ευθείας ε. Ενώνουμε το Β με το Α, και με κορυφή το Α και πλευρά την ΑΒ κατασκευάζουμε μία γωνία $B\widehat{A}\delta'$ ίση προς τη $\widehat{B}_1$, στο αντικείμενο ημιεπίπεδο από αυτό που βρίσκεται η $\widehat{B}_1$. Η δεύτερη πλευρά της γωνίας που κατασκευάσαμε είναι η ζητούμενη ευθεία.

Απόδειξη

Οι ευθείες δ και ε τέμνονται από την ΑΒ και οι γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$ είναι ίσες και εντός εναλλάξ. Άρα δ//ε.

Διερεύνηση

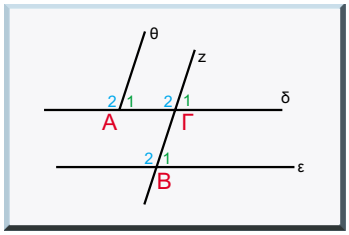
Η ευθεία δ είναι μοναδική σύμφωνα με το αίτημα της παραλληλίας.

4.2.2 Γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες

Θεώρημα 4.7

Αν δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Απόδειξη



Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες δ και ε όπως επίσης και τις παράλληλες ευθείες θ και z οι οποίες τέμνουν τις δ και ε στα σημεία Α, Β και Γ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Σχηματίζονται έτσι γωνίες με πλευρές παράλληλες μία προς μία. Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

$\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$ και $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{B}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά), άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

$\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$)

$\widehat{A}_2 + \widehat{A}_1 = 180°$ και $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ οπότε $\widehat{A}_2 + \widehat{B}_1 = 180°$

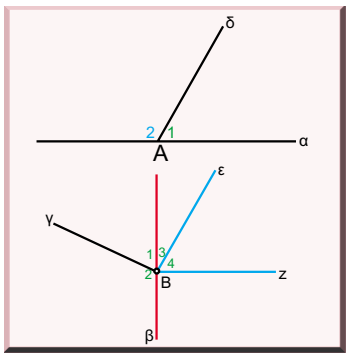
Συμπεραίνουμε, τελικά, ότι

- αν και οι δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι οξείες, όπως οι $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$, τότε είναι ίσες.
- αν και οι δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι αμβλείες, όπως οι $\widehat{A}_2$ και $\widehat{B}_2$, τότε είναι ίσες, και
- αν η μία γωνία από αυτές είναι οξεία και η άλλη αμβλεία όπως οι $\widehat{A}_2$ και $\widehat{B}_1$, τότε είναι παραπληρωματικές. ■

Θεώρημα 4.8

Αν δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Απόδειξη



Θεωρούμε τις κάθετες ευθείες α και β όπως επίσης και τις κάθετες ευθείες γ και δ, οι οποίες τέμνουν τις β και α στα σημεία Β και Α αντίστοιχα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα σχηματίζονται έτσι γωνίες με πλευρές κάθετες μία προς μία.

Φέρουμε από το Β τις Βε και Βz παράλληλες αντίστοιχα προς τις δ και α, οπότε θα είναι κάθετες αντίστοιχα προς τις γ και β.

Επομένως παρατηρούμε τα ακόλουθα:

$\widehat{B}_4 + \widehat{B}_3 = 90°$ και $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_3 = 90°$, άρα $\widehat{B}_4 = \widehat{B}_1$.

$\widehat{B}_4 = \widehat{A}_1$ (οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες), άρα $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ οπότε και $\widehat{B}_2 = \widehat{A}_2$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{B}_1$ και $\widehat{A}_1$). Όμως $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180°$ και $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ οπότε $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_2 = 180°$.

Συμπεραίνουμε τελικά ότι:

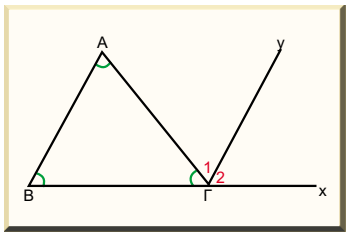
- αν οι γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι και οι δύο οξείες, όπως οι $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$, τότε είναι ίσες.
- αν είναι και οι δύο αμβλείες, όπως οι $\widehat{A}_2$ και $\widehat{B}_2$, τότε είναι ίσες.
- αν είναι η μια από αυτές αμβλεία και η άλλη οξεία, όπως οι $\widehat{A}_2$ και $\widehat{B}_1$, τότε είναι παραπληρωματικές. ■

4.2.3 Άθροισμα γωνιών τριγώνου και κυρτού πολυγώνου

Θεώρημα 4.9

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180°.

Απόδειξη



Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ, προεκτείνουμε την πλευρά του ΒΓ κατά την ημιευθεία Γx και φέρουμε την ημιευθεία Γy//ΒΑ. Τότε: $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}_1$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και Γy με τέμνουσα την ΑΓ) και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}_2$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και Γy με τέμνουσα τη Βx).

Άρα $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2 + \widehat{\Gamma} = x\widehat{\Gamma}B = 180°$ ■

Πόρισμα 4.5

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.

Πόρισμα 4.6

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο τους γωνίες ίσες μια προς μια, τότε θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες.

Πόρισμα 4.7

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές.

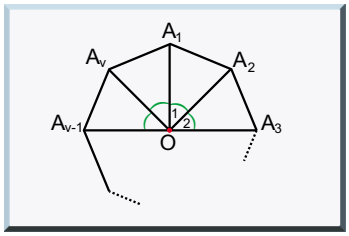
Πόρισμα 4.8

Στο ισόπλευρο τρίγωνο κάθε γωνία είναι 60°.

Θεώρημα 4.10

Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν-γωνου είναι ίσο με 2ν–4 ορθές.

Απόδειξη



Θεωρούμε ένα κυρτό πολύγωνο $A_1A_2...A_\nu$, ένα τυχαίο εσωτερικό του σημείο Ο και τα ν τρίγωνα A_1OA_2, A_2OA_3, ..., $A_{\nu-1}OA_\nu$. Το άθροισμα των γωνιών των ν αυτών τριγώνων ισούται συνολικά με το άθροισμα των γωνιών του ν-γώνου αυξημένο κατά το άθροισμα των γωνιών που έχουν κορυφή το Ο. Το άθροισμα των γωνιών που έχουν κορυφή το Ο είναι ίσο με 4 ορθές και το άθροισμα των γωνιών των ν τριγώνων είναι 2·ν ορθές.

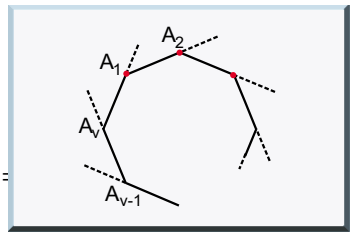
Άρα $\widehat{A}_1+\widehat{A}_2+\cdots+\widehat{A}_\nu+4$ ορθές $=2\nu$ ορθές ή

$\widehat{A}_1+\widehat{A}_2+\cdots+\widehat{A}_\nu=2\nu-4$ ορθές γωνίες ■

Θεώρημα 4.11

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γωνου είναι ίσο με 4 ορθές.

Απόδειξη



Θεωρούμε το κυρτό ν-γωνο $A_1A_2...A_\nu$ και με τις προεκτάσεις των πλευρών του σχηματίζουμε τις εξωτερικές γωνίες του $\widehat{A}_{1\varepsilon\xi}$, $\widehat{A}_{2\varepsilon\xi}...\widehat{A}_{\nu\varepsilon\xi}$ με $\widehat{A}_{1\varepsilon\xi}=2$ ορθές $-\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_{2\varepsilon\xi}=2$ ορθές $-\widehat{A}_2$ κ.ο.κ. Άρα

$\widehat{A}_{1\varepsilon\xi}+\widehat{A}_{2\varepsilon\xi}+\cdots+\widehat{A}_{\nu\varepsilon\xi}=$

$=(2\text{ ορθές}-\widehat{A}_1)+(2\text{ ορθές}-\widehat{A}_2)+(2\text{ ορθές}-\widehat{A}_3)+\cdots+(2\text{ ορθές}-\widehat{A}_\nu)=$

$=2\nu$ ορθές $-(\widehat{A}_1+\widehat{A}_2+\cdots+\widehat{A}_\nu)$

$=2\nu$ ορθές $-(2\nu-4)$ ορθές $=4$ ορθές ■

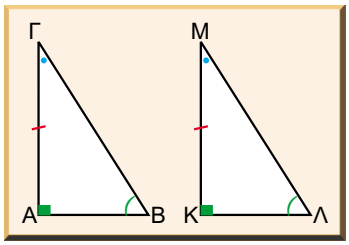
Θεώρημα 4.12

5ο κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν από μία κάθετη πλευρά και την απέναντι οξεία γωνία ίσες μια προς μια, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ με ΑΓ=ΚΜ και $\widehat{B} = \widehat{\Lambda}$. Τα τρίγωνα αυτά θα έχουν ίσες και τις τρίτες γωνίες τους, δηλαδή $\widehat{\Gamma} = \widehat{M}$.. Έτσι θα έχουν από μία πλευρά (ΑΓ=ΚΜ) και τις προσκείμενες τους γωνίες ίσες μία προς μία. Άρα θα είναι ίσα. ■



Πόρισμα 4.9

Αν δύο γωνίες τριγώνου είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Πόρισμα 4.10

Αν μια διάμεσος τριγώνου είναι και διχοτόμος του, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

4.1 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να αποδείξετε το πόρισμα 4.10 ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

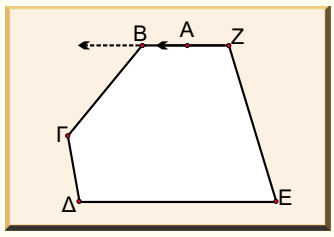
α) Να προεκτείνετε τη διάμεσο ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήμα ΔΕ=ΔΑ.

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΔΕ.

γ) Να στηριχτείτε στο πόρισμα 4.9.

4.2 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο διπλανό σχήμα έχουμε μια πίστα δοκιμών αυτοκινήτων σχήματος πενταγώνου ΒΓΔΕΖ. Η αφετηρία των αυτοκινήτων είναι στο μέσο Α του τμήματος ΒΖ. Ένα αυτοκίνητο ακολουθεί τη διαδρομή ΑΒΓΔΕΖΑ, δηλαδή ξεκινά από το σημείο Α και σταματά στην ίδια ακριβώς θέση. Κατά τη διαδρομή, όταν φτάσει στο σημείο Β στρίβει κατά μία γωνία, το ίδιο γίνεται και στα σημεία Γ, Δ, Ε και Ζ.

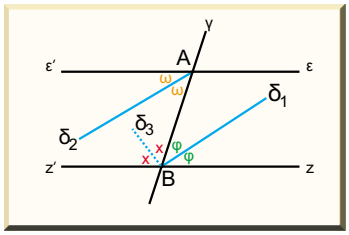


Η γωνία αυτή τι γωνία είναι για το πολύγωνο; Με δεδομένο ότι όλες οι γωνίες αυτές είναι "αριστερές" για το αυτοκίνητο πώς επιδρούν συνολικά στον πρασανατολισμό του; Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι το αυτοκίνητο μετά τη διαδρομή βρίσκεται ακριβώς στην ίδια κατεύθυνση, ποιο θεώρημα σχετικό με γωνίες στα πολύγωνα επαληθεύεται στην πράξη;

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία τρίτη, να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες και οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά γωνιών είναι κάθετες

Απόδειξη



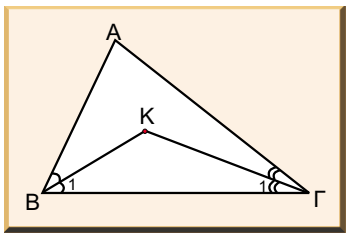
Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε και z που τέμνονται από την ευθεία γ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Φέρουμε τις διχοτόμους $Αδ_2$ και $Βδ_1$ των εντός εναλλάξ γωνιών $ε'\widehat{A}B$ και $A\widehat{B}z$. Επειδή οι γωνίες $ε'\widehat{A}B$ και $A\widehat{B}z$ είναι ίσες, θα είναι ίσα και τα μισά των ίσων αυτών γωνιών, δηλαδή $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι $Αδ_2$ και $Βδ_1$ τέμνονται από την ευθεία γ και σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $\widehat{\omega}$ και $\widehat{\varphi}$ ίσες. Επομένως $Αδ_2 // Βδ_1$.

Επίσης έστω $Βδ_3$ η διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{B}z'$. Επειδή ε//z οι γωνίες $ε'\widehat{A}B$ και $A\widehat{B}z'$ είναι παραπληρωματικές δηλαδή $ε'\widehat{A}B + A\widehat{B}z' = 180°$ ή $2\widehat{\omega} + 2\widehat{x} = 180°$ ή $\widehat{\omega} + \widehat{x} = 90°$, που σημαίνει ότι $Αδ_2 \perp Βδ_3$.

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{Γ}$ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται και σχηματίζουν γωνία ίση με $90° + \frac{\widehat{A}}{2}$.

Απόδειξη



Για να αποδείξουμε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται, αρκεί να δείξουμε ότι $\widehat{B}_1 + \widehat{Γ}_1 < 180°$. Πράγματι

$$\widehat{B}_1 + \widehat{Γ}_1 = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{Γ}}{2} = \frac{\widehat{B} + \widehat{Γ}}{2} = \frac{180° - \widehat{A}}{2} = 90° - \frac{\widehat{A}}{2} < 180°$$

Έστω ότι οι διχοτόμοι των $\widehat{B}$ και $\widehat{Γ}$ τέμνονται στο Κ. Τότε

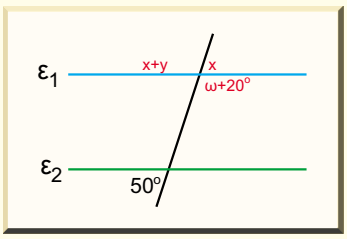
$$B\widehat{K}\Gamma = 180^\circ - \widehat{B}_1 - \widehat{\Gamma}_1 = 180^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{\Gamma}}{2} =$$

$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$$

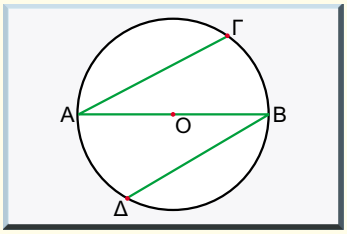
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Να εξηγήσετε γιατί αν ένα τετράπλευρο δεν έχει καμία γωνία οξεία, τότε δε θα έχει και καμία γωνία αμβλεία. Σ' ένα τέτοιο τετράπλευρο υπάρχουν οπωσδήποτε παράλληλες πλευρές;

2 Στο σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\widehat{x}$, $\widehat{y}$ και $\widehat{\omega}$.



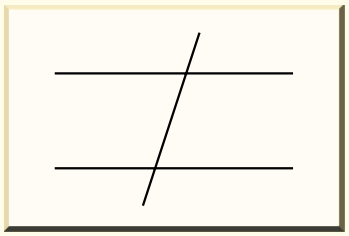
3 Αν οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου με κέντρο Ο είναι παράλληλες, τότε θα είναι και ίσες και επιπλέον τα σημεία Γ, Ο και Δ θα είναι σημεία της ίδιας ευθείας (συνευθειακά).



4 Σε ένα πολύγωνο κάθε γωνία τους είναι ίση με 120°. Πόσες πλευρές έχει το πολύγωνο;

5 Πόσες το πολύ αμβλείες γωνίες μπορεί να έχει ένα τετράπλευρο;

6 Σε ένα σχήμα δύο παράλληλων ευθειών που τέμνονται από μια τρίτη, δύο από τις οχτώ γωνίες που σχηματίζονται έχουν μέτρα, η μια διπλάσιο από το μέτρο της άλλης. Πόσων μοιρών είναι η κάθε μία από αυτές;



7 Δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία και τα μέτρα τους είναι $2\widehat{x} - 20^\circ$ και $\widehat{x} + 20^\circ$. Μπορείτε να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{x}$;

8 Να εξηγήσετε το λόγο για τον οποίο δυο τρίγωνα ισόπλευρα με ίσα ύψη, είναι ίσα.

9 Δυο γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου διαφέρουν κατά 45°. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου αυτού.

10 Αν οι εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου έχουν μέτρα ανάλογα των αριθμών 3, 4, 5, να βρείτε το είδος του τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και φέρουμε δύο παράλληλες ημιευθείες Αx και Βy προς το ίδιο ημιεπίπεδο. Αν θεωρήσουμε ένα σημείο Γ στο ίδιο ημιεπίπεδο μεταξύ των δύο ημιευθειών, να αποδείξετε ότι $A\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{A}x + \Gamma\hat{B}y$.

2 Αν από τυχαίο σημείο Α της διχοτόμου Οδ μιας γωνίας $x\hat{O}y$ φέρουμε παράλληλη ΑΒ προς την Οx, τότε το τρίγωνο ΑΒΟ που σχηματίζεται είναι ισοσκελές.

3 Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$. Η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει τις άλλες πλευρές στα Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι ΖΕ=ΕΒ+ΖΓ.

4 Από οποιοδήποτε σημείο Δ της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου θεωρούμε την κάθετη ΔΕ προς την πλευρά ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 2\,E\hat{\Delta}\Gamma$.

5 Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Από την κορυφή Γ θεωρούμε κάθετο στη ΓΑ ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ=ΓΒ (το Δ δεν ανήκει στο ημιεπίπεδο ΑΓ, Β). Να αποδείξετε ότι η ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{B}$.

6 Να αποδείξετε ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, που τέμνονται στο Κ, σχηματίζουν γωνία $\hat{K} = 90° - \frac{\hat{A}}{2}$.

7 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} - \hat{\Gamma} = 90°$, να δείξετε ότι η διχοτόμος της $\hat{B}$ σχηματίζει με την ΑΓ γωνία 45°.

8 Δίνεται τριγώνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ αυτού. Να δείξετε ότι:

α) $A\hat{\Delta}B = 90° - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

β) $A\hat{\Delta}\Gamma = 90° + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

9 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και το σημείο Δ της ΑΓ είναι ΑΔ=ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

i) $B\hat{\Delta}\Gamma = 90° + \frac{\hat{A}}{2}$.

ii) $\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

10 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και οι διχοτόμοι των Α και Β που τέμνονται στο Κ. Να δείξετε ότι $\hat{K} = \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}$.

11 Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ=ΑΓ, ώστε ΕΓ κάθετη στη ΒΓ (το Ε προς το μέρος της κορυφής Α). Στην προέκταση της ΓΒ παίρνουμε το σημείο Δ ώστε ΒΔ=ΒΑ. Να αποδείξετε ότι τα Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

12 Στο τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι των $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ι. Αν ΙΕ//ΑΒ και ΙΖ//ΑΓ, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΙΕΖ είναι ίση με το μήκος της ΒΓ.

13 Δίνεται μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και το ύψος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε κάθετη στην ΑΒ η οποία τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Στο τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΒ<ΑΓ. Θεωρούμε το σημείο Δ της ΑΓ ώστε ΑΔ=ΑΒ και το σημείο Ε που η μεσοκάθετη του ΒΓ τέμνει την ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\widehat{ABE} = 2\,\widehat{ΓBΔ}$.

2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} < 90°$ ώστε $\widehat{B} = 2\,\widehat{Γ}$. Αν ΑΗ το ύψος του, να αποδείξετε ότι ΑΒ=ΗΓ–ΗΒ.

3 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ που οι απέναντι πλευρές του ΑΒ, ΔΓ και ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στα σημεία Ζ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των $\widehat{E}$ και $\widehat{Z}$ που τέμνονται στο σημείο Κ σχηματίζουν γωνία $\widehat{EKZ} = \widehat{\varphi} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{Δ}}{2}$

4 Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το τυχαίο σημείο Γ του ΑΒ. Σε μια ημιευθεία Γx παίρνουμε τα Δ και Ε ώστε ΓΔ=ΓΑ και ΓΕ=ΓΒ. Να αποδειχθεί ότι ΒΕ και ΑΔ είναι κάθετες.

5 Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο, που σχηματίζεται από τις διχοτόμους των γωνιών κυρτού τετραπλεύρου, έχει απέναντι γωνίες παραπληρωματικές.

6 Θεωρούμε τους ομόκεντρους κύκλους (Ο,ρ) και (Ο,R) με R>ρ. Μια ευθεία που περνάει από το Ο τέμνει τον εσωτερικό κύκλο στα Β και Γ και τον εξωτερικό στα Α και Δ. Μία ακτίνα ΟΕ του (Ο,ρ) τέμνει τον (Ο,R) στο Ζ. Να δείξετε ότι οι γωνίες $\widehat{AEΔ}$ και $\widehat{BZΓ}$ είναι παραπληρωματικές.

7 Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των ΑΒ και ΒΓ ώστε $AE = BΔ = \dfrac{1}{3}AB$. Να δείξετε ότι το ΕΔ είναι ύψος του τριγώνου ΕΒΓ.

8 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{A} > 40°$, το σημείο Δ της ΒΓ ώστε $\widehat{ΔAΓ} = 40°$ και το σημείο Ε της ΑΒ ώστε ΑΕ=ΑΔ. Να βρεθεί το μέτρο της γωνίας $\widehat{EΔB}$.

9 Θεωρούμε μια γωνία $\widehat{xOy} = 60°$. Παίρνουμε ένα σημείο Α της πλευράς Οx έτσι ώστε ΟΑ=3α και ένα σημείο Β της πλευράς Οy τέτοιο ώστε ΟΒ=2α. Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΟΒ, τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές.

10 Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία του ύψους ΑΔ και της διχοτόμου ΑΕ είναι ίση με την ημιδιαφορά των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{Γ}$.

11 Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΒΓ είναι διπλάσια από την πλευρά ΑΒ. Αν ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και ΑΚ η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ, να δείξετε ότι η ΑΜ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΚΓ.

12 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$ φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διχοτόμο ΓΕ της γωνίας $\widehat{Γ}$, η οποία τέμνει το ύψος ΑΔ στο σημείο Ζ. Αν φέρουμε από το Δ κάθετη στην ΑΓ, αυτή τέμνει τη διχοτόμο στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ισοσκελές.

13 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκος πλευράς α. Φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ μήκους α, κάθετο στην πλευρά ΑΓ. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΒΓΔ.

14 Να δείξετε ότι το συμμετρικό μιας ευθείας ε ως προς σημείο Ο, είναι ευθεία παράλληλη με την ε.

15 Τα ύψη ΒΔ και ΓΕ ενός μη ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$ στα σημεία Ζ και Θ και τα ίδια τέμνονται στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΘΗΖ είναι ισοσκελές. Τι παρατηρείτε στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τη γωνία $\widehat{A} = 90°$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, αν και μόνο αν η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ είναι παράλληλη με τη ΒΓ.

2 Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο οποίο $\widehat{B}=\widehat{\Delta}$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των άλλων γωνιών είναι παράλληλες.

3 Οι γωνίες $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 4. Αν φέρουμε τη διχοτόμο ΓΔ της γωνίας $\widehat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι η εξωτερική γωνία $\widehat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ και η γωνία $\widehat{A\Gamma\Delta}$ έχουν παράλληλες διχοτόμους.

4 Από τυχαίο σημείο Ε της πλευράς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διχοτόμο ΒΔ της γωνίας $\widehat{B}$, η οποία τέμνει την εξωτερική διχοτόμο της $\widehat{A}$ στο Ζ. Να δείξετε ότι $\widehat{AZE}=\dfrac{\widehat{\Gamma}}{2}$.

5 Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{B}$ είναι διπλάσια από τη γωνία $\widehat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι αν από το σημείο Δ φέρουμε μία ευθεία παράλληλη προς τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{B}$, αυτή η ευθεία θαδιχοτομεί την πλευρά ΑΓ.

6 Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,ρ) τεμνόμενοι έτσι ώστε το κέντρο του καθενός να είναι εξωτερικό του άλλου. Αν η προέκταση του ΚΑ τέμνει τον κύκλο (Λ,ρ) σ' ένα ακόμη σημείο Β, και η προέκταση της διακέντρου ΚΛ τέμνει τον ίδιο κύκλο σ' ένα σημείο Γ, να αποδείξετε ότι $\widehat{\Gamma\Lambda B}=3\,\widehat{\Gamma KB}$.

7 Όταν το φως ανακλάται σ' έναν καθρέφτη τότε η ακτίνα που κατευθύνεται στον καθρέφτη και η ακτίνα που απομακρύνεται από τον καθρέπτη σχηματίζουν ίσες γωνίες μ' αυτόν. Δύο καθρέπτες K_1 και K_2 είναι μεταξύ τους κάθετοι. Αν μία φωτεινή ακτίνα ΑΒ προσπίπτει στον έναν στο σημείο Β, ανακλάται και προσπίπτει στον άλλο στο σημείο Γ και ανακλάται για δεύτερη φορά, να αποδείξετε ότι η αρχική διεύθυνση της ακτίνας και η τελική είναι παράλληλες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να εξετάσετε αν είναι σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις.

α) Δύο γωνίες με πλευρές κάθετες μία προς μία αποκλείεται να είναι συμπληρωματικές.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

β) Δύο γωνίες με πλευρές παράλληλες μία προς μία αποκλείεται να είναι παραπληρωματικές.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

γ) Αν η μικρότερη γωνία ενός τριγώνου είναι 60°, τότε η μεγαλύτερη γωνία του θα είναι και αυτή 60°.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

δ) Έστω οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 και ε_4, τέτοιες ώστε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1$, $\varepsilon_4 \perp \varepsilon_2$, τότε θα είναι $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_4$.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ε) Σε κάθε τετράπλευρο το άθροισμα τριών γωνιών του είναι πάντα μεγαλύτερο από 180°.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

στ) Το άθροισμα των γωνιών κυρτού εξαγώνου είναι 720°

❑ Σωστό ❑ Λάθος

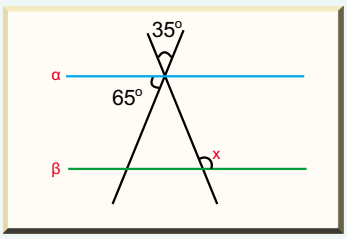
2 Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{A}=62°$. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του $\widehat{B}$ και

Γ είναι

Α. ❑ 242° Β. ❑ 180° Γ. ❑ 210°
Δ. ❑ 121° Ε. ❑ 90°

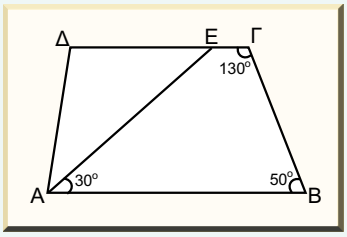
3 Αν α//β, τότε η γωνία x έχει μέτρο

Α. ❑ 124° Β. ❑ 108° Γ. ❑ 120°
Δ. ❑ 100° Ε. ❑ 112°



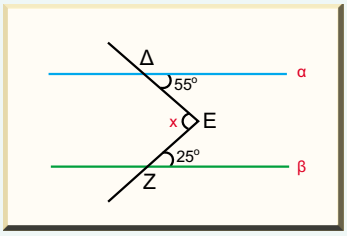
4 Αν Ε είναι το σημείο τομής της διχοτόμου της $\widehat{ΔΑΒ}$ με τη ΔΓ και $\widehat{ΕΑΒ}=30°$, $\widehat{ΑΒΓ}=50°$ και $\widehat{ΒΓΔ}=130°$, τότε η γωνία $\widehat{ΑΕΔ}$ έχει μέτρο

Α. ❑ 30° Β. ❑ 60° Γ. ❑ 120°
Δ. ❑ 150° Ε. ❑ 160°



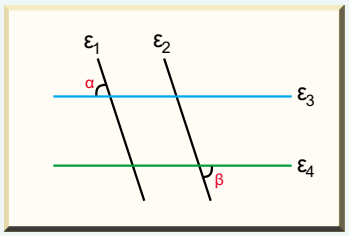
5 Αν α//β, τότε η γωνία x έχει μέτρο

Α. ❑ 30° Β. ❑ 80° Γ. ❑ 90°
Δ. ❑ 100° Ε. ❑ 110°



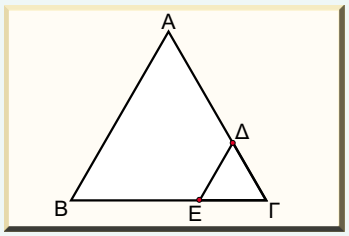
6 Οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες και α=70°. Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της β, ώστε οι ευθείες $ε_3$ και $ε_4$ να είναι παράλληλες;

Α. ❑ 70° Β. ❑ 120° Γ. ❑ 30°
Δ. ❑ 130° Ε. ❑ 90°



7 Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 3. Αν ΔΓ=ΓΕ=1, τότε η περίμετρος του ΑΒΕΔ είναι

Α. ❑ 6 Β. ❑ 6,5 Γ. ❑ 7
Δ. ❑ 7,5 Ε. ❑ 8



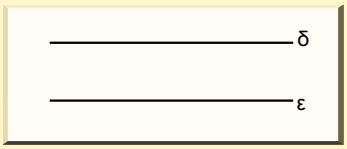
8 Δύο γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι συμπληρωματικές. Τότε το μέτρο της μικρότερης γωνίας του τριγώνου είναι

Α. ❑ 35° Β. ❑ 45° Γ. ❑ 50°
Δ. ❑ 46° Ε. ❑ 48°

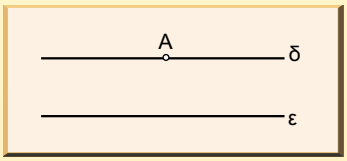
$\widehat{Γ}$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Η πρώτη έννοια με την οποία ασχοληθήκαμε στο 4ο κεφάλαιο ήταν οι δύο παράλληλες ευθείες (ομοεπίπεδες χωρίς κανένα κοινό σημείο).

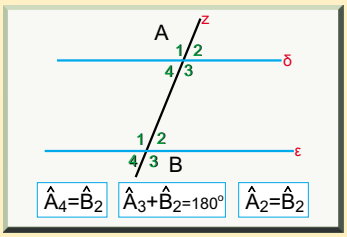


Αναφερθήκαμε στο αίτημα της παραλληλίας για τη μοναδικότητα της παράλληλης από σημείο προς ευθεία, και τονίσαμε τον καθοριστικό του ρόλο στην ιστορία της γεωμετρίας.

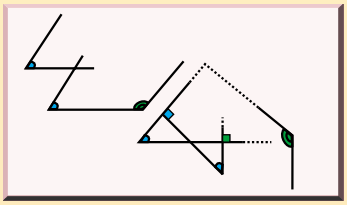


Μια τέμνουσα z δύο παραλλήλων δ και ε μας έδωσε τις εντός εναλλάξ γωνίες $\hat{A}_4$, $\hat{B}_2$ και $\hat{A}_3$, $\hat{B}_1$, τις εντός και επί τα αυτά μέρη $\hat{A}_3$, $\hat{B}_2$ και $\hat{A}_4$, $\hat{B}_1$, τις εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη $\hat{B}_2$, $\hat{A}_2$ κ.λ.π., όπως επίσης και τις σχέσεις που έχουν οι γωνίες αυτές.

Είδαμε ακόμη ότι κάθε μία από τις σχέσεις αυτές είναι ικανή για την παραλληλία των ευθειών δ και ε (κριτήρια παραλληλίας) και δώσαμε έναν τρόπο κατασκευής παραλλήλων ευθειών με τη βοήθεια των ίσων εντός εναλλάξ γωνιών.



Σ' αυτό το κεφάλαιο ακόμη ασχοληθήκαμε με δύο γωνίες που έχουν πλευρές παράλληλες μία προς μία ή κάθετες μία προς μία και αποδείξαμε ότι αυτές είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

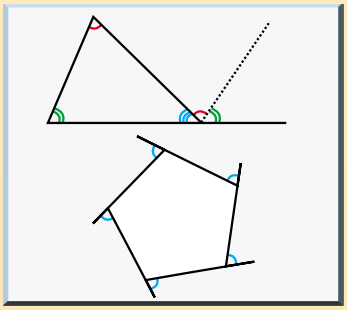


Το τελευταίο θέμα μελέτης του κεφαλαίου αυτού αφορούσε τις γωνίες ενός πολυγώνου. Συγκεκριμένα είδαμε ότι σε κάθε τρίγωνο

- το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του είναι ίσο με 180°.
- κάθε εξωτερική γωνία του είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του.

Γενικά σε κάθε κυρτό πολύγωνο με ν πλευρές

- το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του είναι ίσο με 180°ν-360°.
- το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του είναι ίσο με 360°.



Τέλος, αναφέραμε και τις συνέπειες αυτών των προτάσεων στα διάφορα τρίγωνα. Δηλαδή είδαμε ότι

- κάθε γωνία ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίση με 60°
- οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.