

## Παράρτημα 1

### Ανάγκη αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Ο Ευκλείδης είναι ο πρώτος που συστηματοποίησε κατά τρόπο αξιωματικό τη μελέτη της Γεωμετρίας. Έτσι, στην αρχή του πρώτου βιβλίου των "Στοιχείων", θέτει τους "όρους", δηλαδή διάφορους ορισμούς, τα "αιτήματα", δηλαδή προτάσεις που απαιτεί να συμβαίνουν, τις "κοινές έννοιες", προτάσεις που τις θεωρεί προφανείς και στη συνέχεια τα θεωρήματα ή προβλήματα για τα οποία παραθέτει και απόδειξη ή λύση. Για το διαχωρισμό αυτό, σε όρους, αιτήματα και κοινές έννοιες, που άλλωστε επαναλαμβάνεται εκτός από τα αιτήματα και σε άλλα βιβλία, δε δίνει καμιά εξήγηση. Είναι σκόπιμο να παραθέσουμε την εξήγηση που δίνει ο Πρόκλος, μελετητής των έργων του Ευκλείδη: *"Επειδή υποστηρίζουμε ότι η Επιστήμη αυτή, η Γεωμετρία, αποτελείται από προϋποθέσεις και ότι υπό ορισμένες αρχές αποδεικνύονται τα συμπεράσματα ... θα πρέπει ο συγγραφέας βιβλίου Στοιχειώδους Γεωμετρίας να αναφέρει χωριστά τις αρχές της Επιστήμης και χωριστά τα συμπεράσματα. Δεν υπάρχει ανάγκη να αιτιολογήσει τις αρχές, πρέπει όμως απαραίτητα να αιτιολογήσει τα συμπεράσματα. Διότι καμιά Επιστήμη δεν αποδεικνύει τις αρχές και δεν τις θέτει υπό συζήτηση, αλλά τις θεωρεί από μόνες τους ως βέβαιες... Εάν όμως κάποιος ρίξει στο ίδιο δοχείο τις αρχές και τα παράγωγα, θα προξενήσει αναστάτωση στην όλη περιοχή της γνώσης και θα αναμείξει τα μεταξύ τους άσχετα. Διότι η αρχή και το παράγωγο εξ αυτής, από την αρχή διακρίνονται".*

Μια επιστήμη για να μπορέσει να αναπτυχθεί είναι ανάγκη να ληφθούν μερικές προτάσεις ως αληθινές και γενικά να γίνουν ορισμένες παραδοχές. Οι προτάσεις, που είναι προφανείς και η αλήθειά τους γίνεται κατανοητή από οποιοδήποτε, χαρακτηρίζονται ως αξιώματα. Προτάσεις, όμως, που είμαστε αναγκασμένοι να τις δεχθούμε ως αληθινές για να κατανοήσουμε περαιτέρω γεγονότα, χαρακτηρίζονται ως αιτήματα (Αριστοτέλης). Οι έννοιες αξίωμα και αίτημα διαφέρουν εννοιολογικά, αν και σήμερα στα Μαθηματικά και

μάλιστα στη Γεωμετρία αντιμετωπίζονται ως ταυτόσημες.

Η Γεωμετρία, μια κατεξοχήν λογική Επιστήμη, έχει ανάγκη μιας αυστηρής αξιωματικής θεμελίωσης.

Με το να δεχτούμε ότι από δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία καταλήξαμε σε διάφορα συμπεράσματα, ένα από τα οποία είναι ότι δύο μη συμπίπτουσες ευθείες έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο (ένα σημείο τομής). Αν όμως δεχτούμε ότι από δύο σημεία διέρχονται περισσότερες μη συμπίπτουσες ευθείες, θα καταλήξουμε σε αποτελέσματα διαφορετικά από τα προηγούμενα, ένα από τα οποία θα είναι ότι δύο ευθείες, μη συμπίπτουσες, έχουν περισσότερα από ένα κοινά σημεία.

Από το παράδειγμα αυτό διαπιστώνουμε ότι σε πολλές περιπτώσεις, όταν δεχτούμε μία άλλη μορφή ενός ή περισσότερων αξιωμάτων, καταλήγουμε σε νέο επιστημονικό οικοδόμημα, ενώ σε άλλες περιπτώσεις αξιοποιώντας τα αξιώματα καταλήγουμε σε αντιφάσεις μ' αυτό που ισχύει στην πραγματικότητα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της πρώτης περίπτωσης είναι οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, που προέκυψαν από την παραδοχή διαφορετικής διατύπωσης του 5<sup>ου</sup> αιτήματος των "Στοιχείων" του Ευκλείδη. Στη δεύτερη περίπτωση, εφόσον κατά την αποδεικτική διαδικασία δε γίνεται κανένα λογικό σφάλμα, η αιτία της αντίφασης θα αποδοθεί στην αποδοχή του αιτήματος, το οποίο είμαστε υποχρεωμένοι να απορρίψουμε και να δεχτούμε μια άλλη διατύπωση του αιτήματος.

Δεν είναι σπάνιες οι περιπτώσεις όπου παρουσιάζονται σωστές αποδεικτικές διαδικασίες, χωρίς προηγουμένως να έχουν διευκρινιστεί με μια κατάλληλη πρόταση, θεώρημα ή αξίωμα, μια προγενέστερη λογική κατάσταση.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα εμφανίζεται στο 1ο θεώρημα-πρόβλημα του 1<sup>ου</sup> βιβλίου των "Στοιχείων" του Ευκλείδη. Προκειμένου να κατασκευάσει ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά  $AB$ , ορίζει την τρίτη κορυφή  $\Gamma$  του τριγώνου ως τομή των κύκλων  $(A, AB)$ ,  $(B, BA)$ . Πουθενά όμως προηγουμένως δεν εξηγεί ότι πραγματικά οι κύκλοι αυτοί τέμνονται. Το πρόβλημα αυτό λύνεται στο βιβλίο αυτό στην §2.1.1α, αφού, όμως, πρώτα δίνεται το αξίωμα 1.10 στην §1.5.1 και στη συνέχεια αποδεικνύεται το θεώρημα 4 στην §1.6.2.

Είναι προφανές ότι ένα Επιστημονικό Οικοδόμημα που στηρίζεται σε μικρό αριθμό αξιωμάτων είναι περισσότερο αξιόπιστο.

Δεν είναι σπάνιο, άλλωστε, να αρχίζει η οικοδόμηση μιας επιστημονικής οντότητας με ένα σχετικά μικρό αριθμό αξιωμάτων, που στη συνέχεια, προκειμένου να αντιμετωπιστούν νέα θέματα, αυξάνεται ο αριθμός τους.

Στο σημείο αυτό, κρίνουμε σκόπιμο να τονίσουμε ότι η "απόλυτα αξιωματικοποιημένη Γεωμετρία", όπως π.χ. έκανε ο Hilbert, δεν μπορεί να επιτελέσει εκπαιδευτικό έργο, διότι με την αφαίρεση που εισάγει, δεν μπορούν οι νέοι να αποκαλύψουν τα θέλητρά της για να γίνουν οι μύστες της.

Τα αξιώματα που δεχθήκαμε στο βιβλίο μας αυτό συγκρατούν το μαθητή στη Γεωμετρική πραγματικότητα, δεν τον ταλαιπωρούν σε ιδεατούς χώρους και άσκοπες θεωρητικές προσεγγίσεις. Τον βοηθούν να σκέπτεται, να συμπεραίνει, να αποφαινεται, να ενεργεί, στηριζόμενοι πάντοτε στα πραγματικά δεδομένα που αποκαλύπτονται συνεχώς μπροστά του.

## Παράρτημα 2 Σφαιρική Γεωμετρία

Η Γεωμετρία, κυρίως αυτή που αποκαλούμε Πρακτική Γεωμετρία, οφείλει τη γένεσή της στις πρακτικές ανάγκες της καθημερινής ζωής του ανθρώπου. Οι Έλληνες Θαλής, Πυθαγόρας, Πλάτωνας, Αριστοτέλης, Ευκλείδης κλπ. θέτουν τα θεμέλια μιας κατ' εξοχήν επιστήμης με πρωταρχικό εργαλείο τη Λογική. Από την εποχή ακόμα του Πλάτωνα τίθεται το θέμα της εγγραφής των κανονικών πολυέδρων σε σφαίρα. Ο έναστρος ουρανός με τη σφαιρική του μορφή και η αναγκαιότητα της μελέτης των θέσεων και κινήσεων των αστερών οδήγησε τους Έλληνες στην ανάπτυξη της Γωμετρίας της σφαίρας (Σφαιρική Γεωμετρία), η οποία με τη βοήθεια της Τριγωνομετρίας γίνεται η βάση της μελέτης της Σφαιρικής Αστρονομίας.

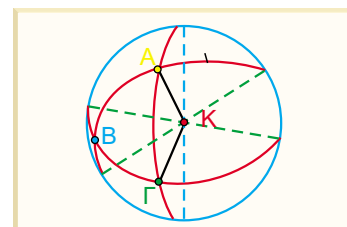
### 1. Σφαιρικά Τρίγωνα

Έστω ότι έχουμε μια σφαίρα  $K$ . Φέρουμε τρεις μέγιστους κύκλους της, οι οποίοι τέμνονται ανά δύο στα σημεία  $A, B, \Gamma$ . Σχηματίζεται ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές τα τόξα  $\widehat{AB}, \widehat{B\Gamma}, \widehat{\Gamma A}$  των τριών μέγιστων κύκλων.

Γωνία δύο τεμνομένων κύκλων της σφαίρας είναι η γωνία των εφαπτομένων τους στο σημείο τομής τους. Στην περίπτωση που πρόκειται για μέγιστους κύκλους, η γωνία τους είναι ίση με την αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης γωνίας των επιπέδων των δύο κύκλων.

Αν  $AB\Gamma$  είναι ένα σφαιρικό τρίγωνο με πλευρές τα τόξα  $\widehat{AB}, \widehat{B\Gamma}, \widehat{\Gamma A}$ , συμβολίζουμε με  $\gamma, \alpha, \beta$  τα αντίστοιχα μέτρα τους και με  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$  τις γωνίες των πλευρών-τόξων του.

Αποδεικνύεται ότι:



1. Κάθε πλευρά σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά και μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του. Δηλ.  $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$ .
2. Το άθροισμα των πλευρών σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερο των 4 ορθών, δηλαδή μικρότερο του μέγιστου κύκλου. Δηλαδή  $\alpha + \beta + \gamma < 4^\circ$ .
3. Το άθροισμα δύο γωνιών σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερο της τρίτης γωνίας του αυξημένης κατά δύο ορθές, δηλαδή  $B + \Gamma < A + 2^\circ$ .
4. Το άθροισμα των γωνιών σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο των 2 ορθών και μικρότερο των 6 ορθών, δηλαδή  $2^\circ < A + B + \Gamma < 6^\circ$ .
5. Κάθε πλευρά, όπως και κάθε γωνία, σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη των δύο ορθών.

Οι κατασκευές σφαιρικών τριγώνων γίνονται, όπως είδαμε, με το σφαιρικό διαβήτη.

Αποδεικνύεται ότι ένα τρίγωνο κατασκευάζεται όταν δοθούν:

- οι τρεις πλευρές του:  $\alpha, \beta, \gamma$ ,
- μία πλευρά και δύο προσκείμενες γωνίες:  $\alpha, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ ,
- δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία,  $\beta, \gamma, \widehat{A}$ ,
- οι τρεις γωνίες του:  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ .

Ακόμα αποδεικνύεται ότι δύο σφαιρικά τρίγωνα της ίδιας σφαίρας ή ίσων σφαιρών είναι ίσα ή συμμετρικά, όταν έχουν:

- τρεις πλευρές ίσες μία προς μία,
- τρεις γωνίες ίσες μία προς μία,
- δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες μία προς μία,
- μία πλευρά και τις δύο προσκείμενες σ' αυτή γωνία ίσες μία προς μία.

## ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## § 2.2

## Α' ΟΜΑΔΑ

1. Αν οι παρευρισκόμενοι τότε  $v^2 - v - 50 = 0$  κλπ.
2. α)  $\Sigma M = \Sigma B + \Sigma M$  κλπ. β)  $PM = PA - MA$  κλπ.
3. 10 παίκτες.
4.  $MN = MB + BG + GN$  κλπ.
5.  $MA = \frac{16}{7}$ ,  $MB = \frac{12}{7}$
6.  $v = 9$

## Β' ΟΜΑΔΑ

1.  $MN = AN - AM$  κλπ.
2.  $MG = AG - AM$  οπότε  $v \cdot MG = v \cdot AG - v \cdot AM$  κλπ.
3. Αν  $M$  μέσο της  $AD$  θα δείξουμε ότι  $M$  και μέσο της  $BG$ .

## § 2.3

## Α' ΟΜΑΔΑ

1.  $\widehat{\Delta O E} = \widehat{\Delta O B} + \widehat{B O E}$  κλπ.
2.  $\frac{2}{3} \angle, \frac{7}{5} \angle$
3. Αν  $\widehat{E O \Delta}$  η γωνία των διχοτόμων, να εκφρασθεί συνάρτηση των αρχικών γωνιών.
4.  $\widehat{A O B} + \widehat{B O G} + \widehat{G O A} = 4 \angle$  κλπ.

## Β' ΟΜΑΔΑ

1. Αν  $OE$  διχοτομεί την  $\widehat{\Delta O G}$  τότε  $OE$  διχοτόμος.
2.  $\widehat{P O \Delta} = \widehat{B O \Delta} - \widehat{P O B}$  κλπ.
3. Να δείξετε ότι  $\widehat{A O E} = \widehat{A O B} + \widehat{B O E} = 2 \angle$ .

## § 2.4

## Α' ΟΜΑΔΑ

1. Είναι η τομή ενός κυκλικού δίσκου και του εξωτερικού ενός άλλου.
2.  $\varphi = 45^\circ$
3. Η  $OM$  είναι διχοτόμος της  $\widehat{A O B}$  κλπ.
4. Αυξάνονται κατά  $15^\circ$ .

## Β' ΟΜΑΔΑ

1.  $\widehat{K \Lambda} = \widehat{K \Gamma} + \widehat{\Gamma \Delta} + \widehat{\Delta \Lambda} = \kappa$  κλπ.
2. Επειδή οι κύκλοι έχουν ακτίνα  $R$   $\Theta A$  διέρχονται από το  $O$ .
3. Υπάρχει αφύλακτη περιοχή.
4. Δείξτε ότι  $\widehat{A O M} = \widehat{M O B}$ .

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2<sup>ου</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1.  $MP = MB + BN + NP = \kappa$  κλπ.
2. Ισχύει  $\widehat{x} + \widehat{\omega} = 90^\circ$  και  $\widehat{y} + \widehat{\omega} = 180^\circ$ .
3.  $\widehat{A O B} = 64^\circ$ .
4. Θα είναι  $\widehat{A O K} = \widehat{B O \Lambda} = \widehat{\omega}$  και  $\widehat{A O K'} = \widehat{B' O \Lambda'}$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## § 3.1

## Α' ΟΜΑΔΑ

1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $AB \Delta$  και  $AG E$ .
2. Τα  $AB E$  και  $ED \Gamma$  είναι ίσα.
3. Να συγκρίνετε τα  $\Delta A E$ ,  $EB Z$ ,  $Z \Gamma \Delta$ .
4. Να συγκρίνετε τα  $\Delta A \Gamma$ ,  $AB E$ .
5. Να συγκρίνετε τα  $\Delta A \Gamma$  και  $AB E$ .
6. Να συγκρίνετε τα  $AB \Gamma$  και  $AB \Delta$ .
7. Να συγκρίνετε τα  $AB \Delta$  και  $A' B' \Delta'$ .
8. Τα  $\Delta AB$  και  $EAG$  είναι ίσα.
9. Να φέρετε τα αποστήματα των ίσων χορδών και να συγκρίνετε τρίγωνα.
10. Να προεκτείνετε τις  $AB$ ,  $A'B'$  κατά  $B \Delta = B \Gamma$  και  $B' \Delta' = B' \Gamma'$ .
11. Να συγκρίνετε τα  $OAB'$  και  $OBA'$ .
12. Τα  $BEM$  και  $\Gamma ZM$  είναι ίσα.
13. Τα ίχνη των υψών είναι και μέσα των πλευρών.
14. Τα  $\Delta AB$  και  $AEG$  είναι ίσα.

## Β' ΟΜΑΔΑ

1. Τα  $OBK$  και  $OGK$  είναι ίσα τρίγωνα.
2. Αν  $B \Delta$  διχοτόμος το  $\Delta \Gamma B$  είναι ισοσκελές.
3. α) Να συγκρίνετε τα  $OB \Gamma$ ,  $O \Delta \Delta$ . β) Να συγκρίνετε τα  $IAB$ ,  $I \Gamma \Delta$  και  $OIB$ ,  $OID$ .
4. Δείξτε ότι  $AB \Delta$  και  $AEH$  ίσα όπου  $H$  η τομή της

διαμέσου ΑΔ και της ΖΕ.

5. Να προεκτείνετε τις διαμέσους ΑΜ και Α'Μ' κατά  $ΜΔ=ΑΜ$  και  $Μ'Δ'=Α'Μ'$ .
6. Να πάρετε τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ και να δείξετε ότι  $ΟΚ=ΟΛ$ .
7. Αν οι επόπτες Α, Β και ο διαιτητής Δ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε οι επόπτες δε θα βλέπονται.
9. Οι ΖΟ και ΕΟ τέμνουν τη ΓΔ στα Η και Θ, δείξτε ότι  $ΖΕ=ΘΗ$ .
10. Αν Δ' και Ε' οι προβολές των Δ και Ε και Η η προβολή του Ο στην ε, συγκρίνετε τα Δ'ΔΒ, ΗΒΟ και ΟΗΓ, ΓΕΕ'.
11. Δείξτε ότι  $\widehat{\Gamma\Delta B'} = 180^\circ$ .
12. Δείξτε ότι  $\Gamma A = \Gamma E$ .

### § 3.2

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
2. Είναι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ευθείες.
3. Είναι ο κύκλος (Ο,λ) όπου λ το απόστημα της χορδής μήκους α.
4. Είναι η διχοτόμος της  $\widehat{xOy}$ .
5. Είναι ο κύκλος (Μ,μ<sub>α</sub>) όπου Μ μέσο της ΒΓ.
6. Είναι ο κύκλος (Α,ρ).

### § 3.3

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Τα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα γιατί έχουν ίσες πλευρές.
2. Όπως στην άσκηση 1Α.
3. Να πάρετε τυχαία σημεία Α, Β της Οκ, Ογ καθώς και τα συμμετρικά τους ως προς το Κ.
4. Αποδείξτε ότι το συμμετρικό τυχαίου σημείου Β της Οκ ανήκει στη συμμετρική της Ο'κ' και αντιστρόφως.
5. Το συμμετρικό του ΑΒΓΔ ως προς το Ο είναι το ΑΒΓΔ.

### § 3.4

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Ισχύει  $\widehat{B\Gamma\Delta} < \widehat{\Gamma} = \widehat{B}$ .
2. Τριγωνική ανισότητα.
3. Τριγωνική ανισότητα.
4. Οι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο. Στο ΟΑΒ ισχύει  $B\Gamma < OB + O\Gamma$  κλπ.

5. Τριγωνική ανισότητα στα ΑΔΒ και ΑΔΓ.
6. Κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές.
7. Τριγωνική ανισότητα στο ΔΕΖ και σχέση καθέτου και πλάγιας.
8. Τριγωνική ανισότητα και Εφαρμογή 1.
9. Να συγκρίνετε τα ΒΓΔ και ΒΕΔ.
10. Να συγκρίνετε τα ΑΒΔ, ΑΓΕ.

#### Β' ΟΜΑΔΑ

1. Να θεωρήσετε το Α' συμμετρικό του Α ως προς το Μ.
2. Επειδή  $\widehat{A} > 90^\circ$  άρα  $\widehat{A\epsilon B} < 90^\circ$  κλπ.
3. α) Να πάρετε στην ΑΓ τμήμα  $ΑΒ' = ΑΒ$ . β) Στην προέκταση της ΓΑ παίρνουμε  $ΑΒ'' = ΑΒ$ .
4. Η ΑΒ τέμνει την ε στο Μ και  $ΜΑ - ΜΒ = ΑΒ$ . Για το τυχαίο σημείο Μ' της ε:  $Μ'Β - Μ'Α < ΑΒ$  άρα κλπ.
5. Τριγωνική ανισότητα στα ΑΚΓ και ΒΚΔ.
6. Να προβάλλετε το Δ στη ΒΓ.
7. Τα σημεία της διχοτόμου ισαπέχουν από τις πλευρές.
8. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΔΓΕ.
9. Να συγκρίνετε τα στοιχεία των ΑΒΓ, ΔΒΓ και ΑΒΔ, ΑΓΔ.
10. Να θεωρήσετε τη διαγώνιο ΑΓ.
11. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΓΔΖ.

### § 3.5

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Να συγκρίνετε τα ΓΑΟ και ΔΟΒ.
2. Αν Κ μέσο της ΑΒ, τότε ο κύκλος (Κ,ΚΑ) και η ΑΓ εφάπτονται κλπ.
3. Τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΓΑΔ είναι ίσα.
4. Τα τρίγωνα ΒΟΑ, ΟΑΓ, ΓΑΔ είναι ίσα.

#### Β' ΟΜΑΔΑ

1. Είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{xOy}$ .
2. Αν ο κύκλος (Μ,ΜΔ) εφάπτεται με την ΑΒ στο Δ και  $ΜΕ \perp ΑΓ$ , τότε  $ΜΕ = ΜΔ$ .
3. Να δείξετε ότι  $\widehat{O\Gamma B} = 90^\circ$ .

### § 3.6

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Τα τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΔΛ είναι ίσα.
2. Αν Ν τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου και ΝΑ, ΝΒ εφάπτομενες τα ΑΚΝ και ΒΛΝ είναι ίσα.
3. Τα ΑΛΓ και ΑΚΔ είναι ίσα.
4. Αν α, β, γ οι ακίνες των κύκλων, τότε

$\alpha + \beta = AB = \beta\Gamma = \alpha + \gamma$  κλπ.

5. Να θεωρήσετε το ύψος ΟΜ του ΟΑΔ.
6. Η διάκεντρος ΚΛ τέμνει τους κύκλους στα Α και Β. Αν Μ, Ν τυχαία σημεία των κύκλων, δείξτε ότι  $AB < MN$ .

### §3.7

#### Α' ΟΜΑΔΑ

- 1.
2. Στη μία πλευρά της γωνίας Β να πάρετε σημείο Α ώστε  $BA = \alpha$ .
3. Η τρίτη κορυφή Γ θα βρίσκεται στον κύκλο (Α,β).
4. Είναι γνωστές και οι τρεις πλευρές του τριγώνου.
5. Στο ισοσκελές είναι γνωστές και οι τρεις πλευρές του.
6. Κατασκευή τριγώνου από δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.
7. Αν  $BA = \gamma$  η κορυφή Γ θα βρίσκεται στον κύκλο (Β,α).
8. Η κορυφή Α θα είναι η προβολή της Γ στην πλευρά Βχ της γωνίας  $\hat{B}$ .

#### ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3<sup>ου</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Τριγωνική ανισότητα στα  $AA\Gamma'$  και  $AA'B$  οπότε  $AA' < \tau$  κλπ.
2. Να θεωρήσετε τη διχοτόμο της  $\hat{A}$  και στην ΑΓ να πάρετε σημείο Ε ώστε  $AB = AE$ .
3. Να προεκτείνετε τη ΖΓ κατά  $GE = GZ$  και στην ε να πάρετε σημείο Η ώστε  $GH = GB$  και να δείξετε ότι  $ZH > Z\Delta$ .
4. α) Τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΜΣΟ.  
β) Διακρίνετε δύο περιπτώσεις ο ένας κύκλος είναι: i) στο εσωτερικό του άλλου, ii) στο εξωτερικό μέρος του άλλου.
5. Αν ΑΔ ύψος του τριγώνου, το ΔΑΓ είναι κατασκευάσιμο.
6. Αν ΑΔ ύψος, το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ κατασκευάζεται. Ασκ. 7Α.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Άθροισμα γωνιών του ΓΑΒ.
2. Σχηματίζονται παρά τη βάση ίσες γωνίες.
3. Σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα.
4. Η  $\hat{E}\Delta\Gamma$  είναι συμπληρωματική της  $\hat{\Gamma}$ .

5. Το ΓΒΔ είναι ισοσκελές.
6. Άθροισμα γωνιών ΚΒΓ.
7. Άθροισμα γωνιών τριγώνου.
8. Εξωτερικές γωνίες τριγώνου.
9. Το ΑΒΔ είναι ισοσκελές.
10. Άθροισμα γωνιών ΚΑΒ.
11. Δείξτε ότι  $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{E} = 180^\circ$ .
12. Σχηματίζονται ισοσκελή τρίγωνα.
13. Αν  $A < 90^\circ$  το ύψος είναι μέσα στο τρίγωνο.  
Αν  $A > 90^\circ$  το ύψος είναι έξω από το τρίγωνο.

#### Β' ΟΜΑΔΑ

1. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΓ είναι ισοσκελή.
2. Να θεωρήσετε σημείο Δ της ΒΓ ώστε  $AB = AD$ .
3. Η προέκταση της ΚΖ τέμνει την ΑΔ στο Ρ.
4. Δείξτε ότι  $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$ .
5. Άθροισμα γωνιών τριγώνων.
6. Τα τρίγωνα ΟΖΓ, ΟΕΔ καθώς και τα ΟΕΑ, ΟΒΖ είναι ίσα.
7. Θεωρούμε Μ το μέσο της ΔΓ. Τότε ΕΒΜ ισόπλευρο.
8. Το ΑΕΔ είναι ισοσκελές και η γωνία  $\hat{A}\hat{D}\hat{B} = 40^\circ + \hat{\Gamma}$ .
9. Στην Οψ να θεωρήσετε σημείο Γ ώστε  $B\Gamma = \alpha$  οπότε ΟΑΓ τελικά ισόπλευρο.
10. Άθροισμα γωνιών τριγώνου, εξωτερική γωνία τριγώνου.
11. Να θεωρήσετε το συμμετρικό Δ του Α ως προς το Κ.
12. Συμπληρωματικές γωνίες.
13. Άθροισμα γωνιών ισοσκελούς τριγώνου.
14. Βρείτε τα συμμετρικά δύο σημείων της ε ως προς το Ο.
15. Συμπληρωματικές γωνίες.

#### ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4<sup>ου</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Αν Αδ διχοτόμος τότε σχηματίζονται εντός εναλλάξ γωνίες ίσες αντίστροφα αν  $A\delta // B\Gamma$  τότε Αδ διχοτόμος.
2. Άθροισμα γωνιών τετραπλεύρων και τριγώνων.
3. Έστω  $\lambda = \frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{\Gamma}{4}$  και  $A + B + \Gamma = 180^\circ$  κλπ.
4. Εξωτερικές γωνίες τριγώνου.
5. Αν Ε το σημείο τομής της ΑΓ και της παράλληλης από το Δ προς την διχοτόμο της  $\hat{B}$  τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΕΔΑ είναι ισοσκελή.
6. Τα τρίγωνα ΛΑΒ και ΑΚΛ είναι ισοσκελή.
7. Δείξτε ότι οι φωτεινές ακτίνες σχηματίζουν με την ΒΓ εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## § 5.1

## Α' ΟΜΑΔΑ

1. Τα ΑΒΓΔ, ΑΓΒΕ είναι παραλληλόγραμμα.
2. Το ΒΜΖΔ είναι παραλληλόγραμμα.
3. Τα ΔΑΜ και ΓΜΒ είναι ισοσκελή κλπ.
4. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΒΕΓ είναι ίσα.
5. Με ισότιπες τριγώνων αποδείξτε ότι οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι ίσες.
6. Τα ΑΕΗ και ΖΓΘ είναι ίσα
7. Θεωρούμε την ΑΓ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΚΗ και ΘΚΓ.
8. Αποδείξτε ότι οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.
9. Τα ΒΚΜΔ και ΒΛΝΔ είναι παραλληλόγραμμα.
10.  $\widehat{B} = 2\widehat{E}$  και  $\widehat{A} = 2\widehat{Z}$  οπότε από το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων ΕΖΗ θα έχουμε  $\widehat{H} = 180 - \widehat{E} - \widehat{Z}$  κλπ.

## Β' ΟΜΑΔΑ

1. Τα ΔΒΕΓ και ΔΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμα κλπ.
2. Οι ΒΑ, ΕΖ τέμνονται στο Η, οι ΒΓ, ΕΔ στο Θ το ΒΗΕΘ είναι παραλληλόγραμμα κλπ.
3. Επειδή  $AB < AG$  έχουμε  $\widehat{\Gamma} < \widehat{B}$  οπότε  $\widehat{ZKB} < \widehat{B}$  άρα στο τρίγωνο ΒΖΚ έχουμε  $BZ < KZ$  ή  $BZ + AZ < KZ + AZ$  ή  $AB < KZ + AZ$  κλπ.
4. Οι ΑΕ και ΒΖ είναι παράλληλες και ίσες.
5. Αρκεί  $\Delta E \perp OE$ . Αποδείξτε ότι το ΑΔΕΓ έχει διχοτομούμενες διαγωνίους οπότε ΔΕ//ΓΑΜ κλπ.
6. Θεωρούμε την παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ που τέμνει την ΒΓ στο Η. Το ΒΕΗΔ είναι παραλληλόγραμμα.
7. Η ΕΖ τέμνει την ΑΒ στο Ν οπότε τα τρίγωνα ΑΝΕ και ΕΔΖ είναι ίσα κλπ.
8. Αν  $\widehat{B} \neq \widehat{\Gamma}$  έστω  $\widehat{B} < \widehat{\Gamma}$  τότε καταλήγουμε σε άτοπο με την βοήθεια του παραλληλογράμμου ΔΖΕΒ που σχηματίζουμε. Όμοια αν  $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ , οπότε  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$  άρα ΑΒΓ ισοσκελές.

## § 5.2

## Α' ΟΜΑΔΑ

1. Αποδείξτε ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και ότι οι διαγώνιοι είναι ίσες.
2. Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΗ.

3. Να αποδείξετε ότι ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμα με κάθετες διαγωνίους.
4. Οι διαγώνιοι του ΜΒΝΔ διχοτομούνται και είναι ίσες.
5. Αποδείξτε ότι σχηματίζονται ισόπλευρα τρίγωνα.
6. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ είναι ίσα.
7. Τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΔΖ, ΓΕΖ είναι ίσα.
8. Δείξτε ότι η γωνία  $\widehat{\Delta EZ} = 180^\circ$ .
9. Τα ΑΘΕ, ΒΕΖ, ΓΖΗ, ΔΗΘ είναι ίσα ισοσκελή τρίγωνα και η γωνία  $\widehat{\Theta EZ} = 90^\circ$ .
10. Το τρίγωνο ΒΓΚ είναι ισοσκελές ορθογώνιο.
11. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες με κάθετες διαμέτρους.

## Β' ΟΜΑΔΑ

1. Το ΕΗΖΘ είναι παραλληλόγραμμα με ίσες διαγωνίους.
2. Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΖΒ.
3. Αν ΔΕ η διχοτόμος αποδείξτε ότι  $\widehat{ADE} = \widehat{DEA} = 45^\circ$ .
4. Αν ΚΛ και ΜΝ τα κάθετα τμήματα να θεωρήσετε ΑΕ//ΚΛ, ΒΖ//ΝΜ και αποδείξτε ότι ΑΕ=ΒΖ.
5. Αν ΖΜ και ΜΔ οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές τότε  $MZ + MD = v_\gamma$ .
6. Αν ΜΔ και ΜΖ οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές τότε  $MD - MZ = v_\beta$ .
7. Αν ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές τότε  $MD + ME + MZ = v$ .
8. α) Δείξτε ότι οι γωνίες του σχηματιζόμενου τετραπλεύρου είναι ορθές.  
β) Δύο διαγώνιοι ενώνουν μέσα πλευρών είναι παράλληλες προς κάθετες πλευρές άρα είναι κάθετες.
9. α) Οι γωνίες του σχηματιζόμενου τετραπλεύρου είναι ορθές.  
β) Δύο διαδοχικές πλευρές του σχηματιζόμενου ορθογώνιου είναι ίσες.
10. α) Οι γωνίες του ΒΔΑΓ είναι ορθές.  
β) Οι ΓΔ, ΑΒ διχοτομούνται και  $\widehat{\Gamma A} = \widehat{\Gamma' A} \times'$ .

## § 5.3

## Α' ΟΜΑΔΑ

1. Αποδείξτε ότι Ε και Ζ μέσα των ΔΖ και ΕΒ αντίστοιχα.
2. Αν Κ,Λ,Μ,Ν είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμα.
3. Να θεωρήσετε το μέσο Ζ της ΑΒ.
4. Οι ΜΕ και ΔΜ είναι διάμεσοι ορθογώνιου προς την

υποτείνουσα άρα ΕΜΔ ισοσκελές κλπ.

- Τα Κ, Μ μέσα πλευρών του ορθογωνίου και ΑΛ διάμεσος.
- Αν Κ, Λ οι προβολές των Δ, Ε το ΔΚΛΕ είναι παραλληλόγραμμο.
- Θεωρούμε ΜΖ//ΒΕ κλπ.
- Αποδείξτε ότι  $\Delta M = \frac{AB}{2}$  και  $EZ = \frac{\Delta M}{2}$  χρησιμοποιώντας μέσα.
- Χρησιμοποιώντας μέσα αποδείξτε ότι δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες.
- Αν Κ το σημείο τομής των ΕΜ και ΖΝ τότε  $\widehat{K} = 90^\circ$  ή  $\widehat{ZEM} + \widehat{KZE} = 90^\circ$ .
- α) Το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο με κάθετες πλευρές άρα ορθογώνιο  
β) Παραλληλόγραμμο με διαδοχικές πλευρές ίσες.

### Β' ΟΜΑΔΑ

- Θεωρούμε την ΚΒ και δείχνουμε ότι  $ΑΛ \perp ΚΒ$ .
- Δείξτε ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
- Αν Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών τότε ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο. Χρησιμοποιώντας μέσα πλευρών δείξτε ότι  $K_1 K_2 // H\Theta$  και  $K_1 K_2 = 2H\Theta$  κλπ. όπου  $K_1, K_2, K_3, K_4$  συμμετρικά του Κ.
- Αν Μ μέσο της ΕΖ τότε  $ΜΔ = ΜΒ$  δηλαδή το Μ ανήκει στην μεσοκάθετο του ΒΔ που είναι η ΑΓ.
- Τα Δ και Μ είνι μέσα πλευρών τριγώνου.
- Να θεωρήσετε το μέσο Μ της ΑΒ οπότε  $ΜΕ = \frac{ΒΔ}{2}$ ,  $ΜΖ = \frac{ΑΓ}{2}$ . Στη συνέχεια τριγωνική ανισότητα στο ΜΕΖ.
- Είναι η ευθεία που ενώνει τα μέσα Λ, Κ των ΑΒ και ΑΓ.
- Οι πλευρές του ζητούμενου θα είναι διπλάσιες από το μήκος που δημιουργούν τα τρία μη συνευθειακά σημεία.
- Αν Μ μέσο της ΒΓ το ΑΒΜ είναι ισόπλευρο κλπ.
- Κ, Μ, Λ μέσα οπότε  $ΚΜ = \frac{ΕΓ}{2}$ ,  $ΜΛ = \frac{ΒΗ}{2}$ , ΕΓΑ, ΑΒΗ ίσα τρίγωνα κλπ.

### § 5.4

#### Α' ΟΜΑΔΑ

- Αν η διχοτόμος της  $\widehat{\Gamma}$  τέμνει την ΑΒ στο Ε η ΔΕ είναι

διχοτόμος της  $\widehat{\Delta}$ .

- Αν Ε μέσο της ΔΓ το ΑΒΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.
- Τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΕΔΓ είναι ισοσκελή.
- Αν Ο το κέντρο του ΑΒΓΔ και Κ η προβολή του στην (ε) τότε  $2OK = BE + \Delta H$  κλπ.
- $\widehat{A} = \widehat{B} = 108^\circ$  και  $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = 72^\circ$ .
- Αν Δ, Ε προβολές των Β, Γ στην (ε) τότε η ΑΜ είναι διάμεσος του τραpezίου ΒΔΕΓ.
- Η ΚΚ' είναι διάμεσος τραpezίων.
- Χρησιμοποιήστε ισότιπες τριγώνων.
- Το ΓΔΔΓ' ορθογώνιο και τα Δ'ΔΑ, Γ'ΤΒ ίσα ορθογώνια τρίγωνα.
- Μ, Ν μέσα των μη παραλλήλων Κ, Λ μέσα των διαγωνίων.

### Β' ΟΜΑΔΑ

- Αν οι διχοτόμοι των  $\widehat{B}$  και  $\widehat{A}$  τέμνουν την ΓΔ στα Ε και Ζ το ΚΛ είναι διάμεσος του ΒΑΕΖ.
- Από το Μ θεωρούμε τις ΜΕ//ΑΔ και ΜΖ//ΒΓ.
- Μέσα πλευρών τριγώνου και διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου.
- Ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ που ενώνει μέσα διαγωνίων τραpezίου.
- Αν Κ το κέντρο του κύκλου και Μ μέσο της ΒΓ τότε  $ΚΜ \perp ΒΓ$  και  $ΚΜ = \frac{ΑΔ}{2}$ .
- Αν Κ μέσο της ΑΔ τότε  $ΚΜ = \frac{ΑΔ}{2}$  κλπ.

### § 5.5

#### Α' ΟΜΑΔΑ

- Τα Ζ και Ε είναι βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΔΓ και ΑΒΓ.
- Να προβάλλετε στην ε και το μέσον Μ της ΒΘ.
- Τα ΕΔ, ΓΑ είναι ύψη του ΒΕΓ άρα Ζ το ορθόκεντρό του.
- Το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές άρα η διχοτόμος ΑΟ είναι μεσοκάθετος της ΖΕ.
- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
- Το Ο είναι βαρύκεντρο του ΑΒΓ και το Ε βαρύκεντρο του ΟΒΓ.
- Δείξτε ότι ΜΒ//ΓΕ.
- Το Μ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΓΔ.
- Το Ζ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ.
- α) ΚΛ//ΒΓ β) Οι διάμεσοι των δύο τριγώνων έχουν τους ίδιους φορείς.

11. Αν  $\Theta$  το βαρύκεντρο του  $\Delta B\Gamma$  το  $\Delta B\Theta\Gamma$  είναι ισοσκελές τα τρίγωνα  $\Theta E\Delta$  και  $\Theta \Delta\Gamma$  είναι ίσα.

12. Είναι ο κύκλος  $(M, \frac{\mu_a}{3})$  όπου  $M$  μέσο της  $B\Gamma$ .

**Β' ΟΜΑΔΑ**

1. Φέρνουμε  $H\Theta // BE$  και αποδεικνύουμε ότι  $A\Theta // ZH$ .

2.  $ZH = \frac{\Gamma K}{2} = KE$  και  $ZH // KE$ .

3. Το  $E$  είναι έγκεντρο του  $\Delta O\Delta\Gamma$  και το  $I$  παράκεντρο του  $\Delta O\Delta B$ .

4. Αποδείξτε ότι το  $B\eta\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5<sup>ου</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

1. Το τρίγωνο  $\Delta B\Delta$  έχει  $AB=a$ ,  $\Delta\Delta=\gamma$ ,  $B\Delta=\delta$  άρα κατασκευάζεται.

2. Αν  $AM$  η διάμεσος το  $\Delta M\Delta B$  είναι ισοσκελές με  $MA=MB=\mu_a$  και  $AB=\gamma$  άρα κατασκευάζεται.

3. Επειδή  $A\Theta$  γνωστό άρα το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  είναι επίσης γνωστό σημείο αφού  $\Theta M = \frac{1}{2} A\Theta$ , η  $B\Gamma \perp OM$  και τα  $A, B, \Gamma$  σημεία του  $(O, OA)$ .

4. Το  $\Theta B\Gamma$  κατασκευάζεται από τις πλευρές του ( $\Theta$  βαρύκεντρο).

5. α) Προεκτείνουμε την  $B\Delta$  κατά  $\Delta Z = \Delta A$  τότε  $BZ = \delta + a$  οπότε το  $\Delta BZ$  κατασκευάζεται διότι  $AB=a$ ,  $BZ = \delta + a$  και  $\widehat{ABZ} = 45^\circ$ .

β) Αν  $M$  μέσο της  $AB$  και  $MK = \lambda$  η απόσταση από την διαγώνιο  $B\Delta$  τότε  $AO = 2\lambda$  άρα  $A\Gamma = B\Delta = 4\lambda$  κλπ.

6. Θεωρούμε την βάση  $AB = \mu$  και τις γωνίες  $\widehat{BA} \times = \varphi$  και  $\widehat{AB} \psi = \omega$ . Αν  $BE = \lambda$  θεωρούμε  $E\Delta // B\psi$  κλπ.

7. Οι κορυφές  $\Delta, \Gamma$  θα βρίσκονται στην παράλληλη προς την  $AB$  σε απόσταση  $\upsilon$ . Επίσης θα είναι σημεία πλευρών γνωστών γωνιών.

8. Η μικρή βάση προβάλλεται στην μεγάλη και η θέση της προβολής καθορίζεται.

9. Αν  $\Gamma E // \Delta\Delta$  το  $\Gamma E\Delta$  κατασκευάζεται.

10. Θεωρούμε από το  $\Gamma$  παράλληλη προς την διαγώνιο  $\Delta B$ , που τέμνει την βάση  $AB$  στο  $E$ . Το τρίγωνο  $\Gamma A E$  κατασκευάζεται.

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6**

**§6.1**

**Α' ΟΜΑΔΑ**

1.  $\widehat{A} = 100^\circ$ ,  $\widehat{B} = 80^\circ$ ,  $\widehat{\Gamma} = 130^\circ$ ,  $\widehat{\Delta} = 50^\circ$ .

2.  $\widehat{B\Theta\Gamma} = 100^\circ$ ,  $\widehat{B\eta\Gamma} = 130^\circ$ .

3. Το τρίγωνο  $\Delta\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές.

4. Να φέρετε τις  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  και να εκφράσετε τη  $\widehat{B}$  σαν άθροισμα γωνιών.

5. Να δείξετε ότι  $E\Delta // KB$ .

6. Δείξτε ότι  $\widehat{\Gamma B\Delta} = 180^\circ$ .

7.  $\Sigma M$  διχοτόμος της  $\widehat{\Sigma}$  και  $\Sigma M \perp \Delta\Gamma$ .

8. Το  $OM$  είναι ύψος του ισοσκελούς  $\Delta O\Delta B$ .

9. Εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

10. Να φέρετε την κοινή εφαπτομένη στο  $A$ .

**Β' ΟΜΑΔΑ**

1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $\Delta O\Gamma M$  και  $\Delta O\eta M$ .

2. Στο  $\Delta M\Delta E$  οι προσκείμενες στη  $M\Delta$  γωνίες είναι ίσες.

3. Δείξτε ότι  $\widehat{\Sigma\Gamma A} = \widehat{\Sigma\Delta I}$ .

4. Το τρίγωνο  $\Gamma\eta B$  είναι ορθογώνιο.

5. Να δείξετε ότι  $\widehat{\Gamma\Delta\Delta} = \widehat{A\Gamma\Delta}$ .

6. Σχέση επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας.

7.  $K\Delta // A\Gamma$  και  $\epsilon // A\Gamma$ .

8. Γωνία χορδής και εφαπτομένης, εφαπτόμενα τμήματα.

9. Εκφράζουμε τη μια γωνία του  $\Delta M\eta\Delta$  σαν εξωτερική και την άλλη σαν άθροισμα γωνιών.

**§6.2**

**Α' ΟΜΑΔΑ**

1. Σχηματίζονται εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

2. Τα  $\Delta Z\Gamma B$  και  $\Gamma\eta E B$  είναι εγγεγραμμένα.

3. Το  $BZ\Gamma E$  είναι επίσης εγγράψιμο.

4. Η  $B\eta$  φαίνεται από τις  $\Gamma$  και  $\Delta$  με ίσες γωνίες.

5. Άθροισμα γωνιών τριγώνου.

6. Το  $\Delta B\Delta K$  είναι εγγράψιμο.

7. Το  $\Delta E M Z$  είναι εγγράψιμο.

8. Το  $BZ\Gamma E$  είναι εγγράψιμο.

**Β' ΟΜΑΔΑ**

1. Στο  $\Delta K\eta B\Delta$  η  $B\Delta$  φαίνεται από τις  $A$  και  $K$  με ίσες γωνίες.

2. Η προέκταση του ύψους  $A E$  τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο  $Z$ . Το τρίγωνο  $B\eta Z$  είναι ισοσκελές, οπότε  $Z$  συμμετρικό του  $H$  ως προς  $B\Gamma$  κλπ.

3. Στο  $\Delta E\Gamma O$  η  $A E$  φαίνεται από τις απέναντι κορυφές  $O, \Gamma$  με ίσες γωνίες.

4. Η  $E Z$  φαίνεται από τις κορυφές  $A$  και  $\Gamma$  με ίσες γωνίες.

5. Οι γωνίες  $\widehat{HMA}$  και  $\widehat{HBG}$  είναι ίσες.
6. β) Δείξτε ότι  $OZ \perp AD$  και επειδή  $AG$  διχοτόμος της  $\widehat{BAD}$  κλπ.
7. Το  $\Delta GKL$  είναι εγγράψιμο διότι  $\widehat{AGD} = \widehat{ALK}$ .
8. Αν  $MK, ML, MN$  οι προβολές του  $M$  στις  $AB, BG, GA$  δείξτε ότι η γωνία  $\widehat{KLN} = 180^\circ$ .

### § 6.3

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Η  $AK \perp \epsilon$  προσδιορίζει το μέσο  $K$  της ζητούμενης χορδής.
2. Αν  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων το  $O\Delta\Gamma$  κατασκευάζεται.
3. Η διάμετρος  $B\Gamma = 2\mu_a$ .
4. Είναι η μεσοπαράλληλος των  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ .
5.  $KM \parallel AB$  άρα  $\widehat{KM\Gamma} = \widehat{A}$  άρα το  $M$  βλέπει το σταθερό τμήμα  $K\Gamma$  με σταθερή γωνία  $\omega$ .
6. Είναι η διχοτόμος της  $\widehat{XO\gamma}$ .

#### Β' ΟΜΑΔΑ

1. Η  $OM$  είναι επίσης σταθερή οπότε το  $M$  είναι σημείο του κύκλου  $(O, OM)$ .
2. Αν  $I$  το έγκεντρο, τότε η  $\widehat{BI\Gamma} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$  άρα είναι σταθερή και βλέπει το σταθερό τμήμα  $B\Gamma$ .
3. Η κορυφή  $B$  βρίσκεται σε τόξο συγκεκριμένο.
4. Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AD$  κατά  $\Delta H = \Delta\Theta$  ( $\Theta$  βαρύκεντρο). Το  $B\Theta\Gamma H$  είναι παραλληλόγραμμο.
5. Αν  $O$  το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου το ισοσκελές  $OB\Gamma$  κατασκευάζεται.

### ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6<sup>ου</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των  $\Delta DZ$  και  $B\Delta E$  έχουν κοινά σημεία τα  $\Delta, M$ , να δείξετε ότι  $GEMZ$  εγγράψιμο.
2. α) Η  $\Gamma\Delta$  είναι διάμετρος. β)  $\Delta\Delta B H$  παραλληλόγραμμο.  
γ)  $O, M$  μέσα των  $\Gamma\Delta$  και  $B\Gamma$ .
3. Αν  $H, O$  ορθόκεντρο και περίκεντρο η διάμεσος  $AM$  τέμνει την  $HO$  στο  $\Theta$ . Δείξτε ότι είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.
4. Σχηματίζονται ορθογώνια παραλληλόγραμμο.
5. Οι  $BZ$  και  $\Delta\Gamma$  τέμνονται στο  $M$ . Δείξτε ότι  $\widehat{AME} = 180^\circ$ .
6. Η  $B\widehat{H\Gamma}$  είναι εγγεγραμμένη σε σταθερό τόξο άρα

είναι σταθερή. Αν  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  ύψη το  $HE\Delta D$  είναι εγγράψιμο άρα η  $\widehat{A}$  σταθερή και βλέπει τη χορδή  $B\Gamma$ .

7. Το  $AHOZ$  είναι εγγράψιμο και επειδή  $HO = OZ$  άρα  $AO$  διχοτόμος.
8. Η κάθετος  $\epsilon$  από το  $M$  προς την  $AB$  και η  $AG$  τέμνονται στο  $Z$ . Η ευθεία  $B\Delta$  τέμνει την  $\epsilon$  έστω στο  $Z'$ . Να δείξετε ότι τα  $Z$  και  $Z'$  συμπίπτουν.
9. Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Gamma A\Delta$  είναι ίσα.
10. Να δείξετε ότι η  $AZ$  είναι διχοτόμος της  $\widehat{H\Delta E}$ .
11. Έχει ορθές γωνίες και  $HE = HZ$ .
12. Αν  $M$  μέσο της  $\Gamma A$  η  $MK$  τέμνει τη  $B\Delta$  στο  $N$  το  $OMK\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμο.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

### § 7.1 7.2

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1.  $A\Delta = 6, \Gamma E = 5$ .
2. Θεωρούμε από το  $A$  τυχαία ημιευθεία  $Ax$  και παίρνουμε πάνω στην  $Ax$  τμήμα  $A\Gamma = a, \Gamma\Delta = 3a, \Delta E = 5a$  κλπ.
3. Να εφαρμόσετε δύο φορές το θεώρημα του Θαλή.
4. Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Θαλή.
5. Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Θαλή.
6. Να εφαρμόσετε δύο φορές το θεώρημα του Θαλή καθώς και το αντίστροφό του.
7. Όπως στην άσκηση 6.

#### Β' ΟΜΑΔΑ

1. Θεωρούμε  $\Delta Z \parallel B\Gamma$  κλπ.
2. Να θεωρήσετε από το  $A$  παράλληλη προς την  $\Gamma Z$  που τέμνει την  $B\Delta$  στο  $H$  και την  $B\Gamma$  στο  $\Theta$  και να συγκρίνεται τα τρίγωνα  $ABH$  και  $\Delta\Gamma E$ .
3. Έχουμε  $\frac{AE}{AZ} = \frac{\Delta E}{\Delta B}$  και  $\frac{AE}{A\Theta} = \frac{BE}{B\Delta}$  κλπ.
4. Θεωρούμε  $\Delta H \parallel \Gamma Z$  κλπ.
5.  $\frac{PG}{PA} = \frac{1}{3}$  οπότε με θεώρημα Θαλή έχουμε κλπ.
6. Ισχύει  $\frac{AG_1}{G_1M} = 2$  και  $\frac{AG_2}{G_2N} = 2$ .
7. Ισχυριστείτε ότι  $\Delta Z \parallel BE$  και  $\Delta H \parallel E\Gamma$ .
9. Να φέρεται την κοινή εφαπτομένη στο σημείο  $A$ .
10. Τα αποστήματα των ίσων χορδών είναι βάσεις τραapeζίου του οποίου η διάμεσος περνάει από το  $A$ .

## § 7.3

## Α' ΟΜΑΔΑ

1.  $\Delta A = 4\text{cm}$  και  $AZ = 20\text{cm}$ .
2. Η ΒΙ είναι εσωτερική διχοτόμος στο τρίγωνο ΑΒΔ.
3. Να στηριχτείτε στην προηγούμενη άσκηση 2Α.
4. Να αποδείξετε ότι  $\frac{AO}{OD} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$  και πάρτε τριγωνική ανισότητα στο ΑΒΓ.
5. Να εφαρμόσετε 3 φορές το Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου.
6. Το Ε είναι έγκεντρο, άρα ΓΕ διχοτόμος.
7. Εφαρμόστε Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΔΜΕ.
8.  $\frac{AD}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma}$  και  $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ .

## Β' ΟΜΑΔΑ

1. Πάρτε Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΜ και τριγωνική ανισότητα το ΑΒΓ.
2. Αποδείξτε ότι  $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AD}{\Delta\Gamma}$  και  $\Delta\Gamma = AB$ .
3. Οι ΟΔ και ΟΓ είναι διχοτόμοι του τριγώνου ΟΕΜ.
4. Αποδείξτε ότι η ΒΔ είναι εσωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΖ ( $\widehat{AB\Delta} = \widehat{BEZ}$  και  $\widehat{\Delta BZ} = \widehat{BEZ}$ ) και η ΒΕ εξωτερική διχοτόμος.
5. Αποδείξτε ότι  $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BD}{\Delta\Gamma}$  και  $\frac{AE}{E\Delta} = \frac{BA}{B\Delta}$ .
6. Η ΕΜ είναι εσωτερική διχοτόμος στο τρίγωνο ΓΕΔ.
7. Να εφαρμόσετε το Θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ και στη συνέχεια το Θεώρημα του Θαλή.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7<sup>ου</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Θεωρούμε τους λόγους  $\frac{AE}{\beta}$ ,  $\frac{AE}{\gamma}$ . Επειδή  $\Delta E // AB$  άρα Θεώρημα Θαλή κλπ.
2. Δύο φορές Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου και αντίστροφο Θεωρήματος Θαλή.
3. Οι  $\widehat{BAM} = \widehat{MAD}$  άρα ΑΜ διχοτόμος κλπ.
4. α)  $\frac{AI}{ID} = 2$  β) Δείξτε ότι  $\frac{AG}{GM} = \frac{AI}{ID}$  γ) Πρέπει να είναι ισόπλευρο.
5. ΔΕ διχοτόμος του ΒΔΓ και ΒΔ διχοτόμος του ΑΒΓ.
6. Θεώρημα διχοτόμων και αντίστροφο θεωρήματος Θαλή.
7. Αν Δ, Ε, Ζ συνευθειακά να θεωρήσετε από το Α την

ΑΡ//ΔΕ. Για το αντίστροφο να θεωρήσετε ότι η ΔΖ τέμνει την ΒΓ στο Ε' και να καταλήξετε σε άτοπο.

8. Να δείξετε ότι  $\frac{AZ}{BZ} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$  χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα και Θεώρημα Θαλή.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

## §8.1

## Α' ΟΜΑΔΑ

1. Σχηματίζονται όμοια τρίγωνα αφού οι ακτίνες του ήλιου είναι παράλληλες.
2. Στις δύο διαφορετικές θέσεις της ράβδου έχουμε όμοια τρίγωνα.
3. Τα τρίγωνα παραμένουν όμοια άρα θα έχουν ίσες γωνίες.
4. Έχουν ανάλογες πλευρές.
5. Τα ΑΔΕ και ΑΓΔ είναι όμοια.
6. Τα ΜΕΒ και ΜΓΔ είναι όμοια.
7. Τα ΜΗΒ και ΜΓΘ είναι όμοια.
8. Τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΒΓΖ έχουν κοινή τη  $\widehat{B}$  και ανάλογες τις πλευρές.
9. Τα ΒΓΔ και ΑΒΔ είναι όμοια.
10. Τα ΜΑΒ και ΜΔΓ είναι όμοια.
11. Τα ΔΑΖ και ΑΒΔ είναι όμοια.
12. Αν ΒΑΓ η τέμνουσα και Κ, Ο τα κέντρα των κύκλων τα ΚΑΒ και ΟΑΓ είναι όμοια.
13. Τα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι όμοια καθώς και τα ΕΑΒ και ΕΒΔ.
14. Τα ΔΑΒ και ΔΓΑ είναι όμοια.

## Β' ΟΜΑΔΑ

1. Τα ΕΑΒ και ΒΑΔ καθώς και τα ΕΑΓ και ΓΑΔ είναι όμοια.
2. Τα ΜΡΒ, ΜΓΔ καθώς και τα ΝΑΡ, ΝΓΔ είναι όμοια.
3. Δείξτε ότι  $BE \cdot \Delta Z = AB \cdot AD$ .
4. Αρκεί  $\frac{AE}{E\Delta} = \frac{AZ}{\Delta Z}$ . Όμως ΕΑΒ, ΖΑΓ και ΔΕΒ, ΔΖΓ είναι όμοια.
5. α) Να θεωρήσετε τη διάμετρο ΜΝ. β) Να γράψετε τη διάμετρο ΑΡ. γ) Χρησιμοποιείστε τα α, β) ερωτήματα.
6. Να θεωρήσετε  $BE // AD$  και  $B'E' // A'D'$  όπου ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' τραπέζια με  $AB // \Gamma D$  κλπ.
7. Να δείξετε ότι έχουν και ανάλογες πλευρές.
8. Αν ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' οι ρόμβοι και Ο, Ο' τα κέντρα τους, τότε ΟΑΒ, Ο'Α'Β' όμοια κλπ.

9. Να θεωρήσετε  $ΟΓ \perp ΔΕ$  και να δείξετε ότι  $ΟΓ = \frac{ΑΒ}{2}$ .

10. Να δείξετε ότι  $ΚΑ \cdot ΚΒ = 2\rho R$  όπου  $\rho, R$  οι ακίνες των κύκλων.

### ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8<sup>ου</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Αν  $ΑΔ$  η διχοτόμος της  $\hat{A}$  τα  $ΔΑΓ$  και  $ΑΒΓ$  είναι όμοια. Ενώ επειδή  $ΑΔ$  διχοτόμος άρα  $ΔΓ = \frac{αβ}{α+β}$  κλπ.

2. Τα  $ΟΓΖ$  και  $ΜΓΔ$  είναι όμοια ενώ  $ΜΕ$  διχοτόμος της  $\hat{ΔΜΓ}$ .

3. α) Τα  $ΒΓΖ$  και  $ΑΒΔ$  είναι όμοια. β) Στο  $ΑΗΒ$   $ΕΖ \parallel ΑΗ$  και  $Z$  μέσο  $ΑΒ$ .

4. Να προεκτείνετε την  $ΑΓ$  κατά  $ΑΕ = ΑΒ$ .

5. Αν κατασκευάσετε ένα τρίγωνο  $ΑΔΕ$  με  $\hat{Δ} = \omega$  και  $\hat{Ε} = \phi$ , τότε αυτό θα είναι όμοιο με το ζητούμενο.

6. Αν  $ΑΒΓΔ$  το εγγράψιμο να θεωρήσετε τη  $ΒΕ$  ( $E$  εκ της  $ΑΓ$ ) ώστε  $\hat{ΑΒΔ} = \hat{ΕΒΓ}$ , τότε τα  $ΒΓΕ, ΒΔΑ$  είναι όμοια καθώς και τα  $ΑΒΕ$  και  $ΔΒΓ$ .

7. β) Αρκεί  $\frac{ΚΒ}{ΚΓ} = \frac{ΔΒ}{ΔΓ}$ . Όμως τα  $ΚΒΖ, ΚΓΛ$  είναι όμοια κλπ.

8. Αν  $ΟΓ$  το βάθος της σκηνής, τότε  $ΟΓ = 8$  m.

9. Η  $ΛΚ$  είναι διχοτόμος της  $\hat{ΓΚΑ}$  άρα κλπ.

10. Να δείξετε ότι  $\frac{ΓΔ}{ΚΓ} = \frac{ΗΔ}{ΗΚ}$  όπου  $K$  το σημείο τομής των  $ΒΓ, ΔΕ$ .

οπότε...

9. Στο τρίγωνο  $ΔΑΒ$   $\hat{Δ} > 90^\circ$ .

10. 1<sup>ο</sup> Θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα  $ΑΒΔ$  και  $ΒΓΔ$ .

11. 1<sup>ο</sup> Θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο  $ΑΒΔ$ .

12.  $\Theta A = \frac{2}{3} \mu_a$  άρα  $\Theta A^2 = \frac{4}{9} \mu_a^2$ .

13. 1<sup>ο</sup> Θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο  $ΒΘΓ$  όπου  $\Theta$  το βαρύκεντρο.

14. Αντικαταστήστε το  $\mu_a^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$

15. 2<sup>ο</sup> Θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα  $ΑΒΓ, ΒΕΓ$ .

16. 2<sup>ο</sup> Θεώρημα διαμέσων στα  $ΑΒΓ, ΜΒΓ$ .

17.  $\mu_a^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$  όμοια  $\mu_\beta^2, \mu_\gamma^2$  κλπ. οπότε

$$\alpha = \frac{\sqrt{292}}{3}, \beta = \frac{\sqrt{208}}{3}, \gamma = \frac{10}{3}.$$

### Β' ΟΜΑΔΑ

1. Τα τρίγωνα  $ΓΕΟ$  και  $ΔΟΖ$  είναι ίσα.

2. Τα τρίγωνα  $ΔΑΟ$  και  $ΕΑΒ$  είναι ορθογώνια και τα  $ΔΓ, ΕΓ$  είναι ύψη τους.

3. Πυθαγόρειο Θεώρημα στα  $ΓΕΟ, ΓΑΟ, ΑΔΟ, ΓΒΑ$ .

4. Γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος στο  $ΑΒΓ$  αφού δείξουμε ότι  $\hat{B} < 90^\circ$ .

5. Τα  $E, B, Γ, Δ$  είναι συνευθειακά, θεωρήστε το ύψος  $ΑΗ$  του ορθογώνιου τριγώνου  $ΑΒΓ$  και υπολογίστε  $ΑΔ, ΑΕ$ .

6. Η  $ΓΕ$  είναι το μισό της προβολής της  $ΑΓ$  στην  $ΓΒ$ .

7. Αν  $H$  ορθόκεντρο τότε  $ΒΗ > ΒΕ$  και  $\hat{ΒΗΓ} > 90^\circ$ .

8. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα οξείας γωνίας στο  $ΟΚΒ$  όπου  $(K, x)$  ο ζητούμενος κύκλος.

9. Επειδή  $\hat{B} < 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} < 90^\circ$ . Εφαρμόστε το Θεώρημα οξείας γωνίας στο  $ΑΒΓ$ .

10. Αν  $\hat{ΑΜΒ} < 90^\circ$  τότε  $\hat{ΑΜΓ} > 90^\circ$ . Θεώρημα οξείας και αμβλείας γωνίας στα  $ΑΜΒ$  και  $ΑΜΓ$  αντίστοιχα.

11. Αν το  $P$  ανήκει στην  $ΚΓ$  τότε  $\hat{ΒΡΑ} < 90^\circ$  οπότε Θεώρημα οξείας γωνίας στο  $ΑΒΡ$ .

12.  $\alpha^3 > \beta^3$  άρα  $\alpha > \beta$  ή  $\alpha\beta^2 > \beta^3$  κλπ/

13. Θεωρούμε το ύψος  $ΑΔ$  και την  $ΓΚ$  ώστε  $\hat{ΑΓΚ} = 15^\circ$ . Τότε  $ΚΑΓ$  ισοσκελές με  $\hat{ΑΚΓ} > 90^\circ$ .

14. Θεωρούμε  $O$  το μέσο του  $ΚΘ$  και εφαρμόζουμε το 1<sup>ο</sup> Θεώρημα διαμέσων στα  $ΚΒΘ, ΑΒΔ, ΚΓΘ, ΑΓΔ$ .

15. Εφαρμόζουμε τη σχέση  $\beta^2 = \alpha \cdot \Gamma Δ$  κλπ στα τρίγωνα  $ΑΒΓ, ΑΔΒ, ΑΔΓ$ .

16. Η  $ΑΜ$  είναι η κοινή διάμεσος των  $ΑΒΓ$  και  $ΑΔΕ$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

### § 9.1

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Αν  $ΑΔ$  το ύψος εφαρμόστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο  $ΑΔΒ$ .

2. Πυθαγόρειο Θεώρημα στα  $ΓΔΚ, ΔΚΒ, ΑΓΔ$ .

3. Αν  $K$  το σημείο τομής των μη παραλλήλων τα  $ΑΓΚ, ΒΔΚ, ΚΓΔ, ΑΒΚ$  είναι ορθογώνια.

4. Το τρίγωνο  $ΓΕΟ$  είναι ορθογώνιο.

5. Αν  $ΛΓ \perp ΚΑ$  το  $ΓΚΛ$  είναι ορθογώνιο τρίγωνο ενώ το  $ΓΛΒΑ$  ορθογώνιο.

6. Αν  $ΑΒ \parallel ΓΔ$  εφαρμόζουμε το γενικευμένο Θεώρημα του Πυθαγόρα στα τρίγωνα  $ΑΓΔ, ΒΓΔ$ .

7. Θεώρημα αμβλείας γωνίας στο  $ΖΑΔ$  οπότε  $x = 7$ .

8. Το  $ΑΒΓ$  είναι οξυγώνιο άρα  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot ΑΔ$

17. Αν  $AB//\Gamma\Delta$  και  $\Lambda$  μέσο της  $\Gamma\Delta$  φέρνουμε  $\Lambda E//\Delta A$  και  $\Lambda Z//\Gamma B$  και εφαρμόζουμε το 1<sup>ο</sup> θεώρημα διαμέσων στο  $\Lambda E Z$ .
18. Από την σχέση  $MA^2 - MB^2 = K^2$  παίρνουμε τελικά  $MK^2 - M\Lambda^2 = \kappa^2 + R^2 - \rho^2$  και εφαρμόζουμε το 2<sup>ο</sup> Θεώρημα διαμέσων στο  $M\kappa\Lambda$ .
19. Η  $MO$  είναι διάμεσος των τριγώνων  $MA\Gamma$  και  $MB\Delta$ .

### § 9.2

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Η  $PS$  είναι εφαπτομένη ενώ οι  $PAB, P\Delta\Gamma$  τέμνουσες του κύκλου.
2. Δύναμη εσωτερικού σημείου.
3. Δύναμη του σημείου  $\Gamma$  ως προς τον κύκλο.
4. Οι  $AEM$  και  $\Gamma EB$  είναι τέμνουσες κύκλου.
5. Χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα  $ab = \frac{1}{4} [(a + b)^2 - (a - b)^2]$  για τα  $\Gamma A$  και  $\Gamma B$ .
6. Βλέπε πρόβλημα 9.10.

#### Β' ΟΜΑΔΑ

1. Δύναμη του σημείου  $A$  ως προς τον κύκλο τον περιγεγραμμένο περι το  $B\Gamma E\Delta$ .
2. Ισχύει  $BE \cdot BA = B\Delta \cdot B\Gamma$  και  $A\Delta$  διχοτόμος.
3. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα διχοτόμου και δύναμης των  $B$  και  $\Gamma$ .
4. Αντίστροφο θεώρημα διχοτόμου και  $A\Delta \cdot A\Gamma = AE \cdot AB$ .
5. Αν  $O$  το κέντρο του κύκλου τότε  $OA = OB = OG$  οπότε το  $O$  είναι το περίκεντρο.
6. Αν  $Z$  το σημείο επαφής του κύκλου με την  $AB$  ισχύει  $AZ = (r - a)$  κλπ.

### ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Δείξτε ότι το  $ZHE\Delta$  είναι εγγράψιμο.
2. Το  $AE\kappa\Delta$  είναι εγγράψιμο οπότε η δύναμη του σημείου  $B$  ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο και σχέση  $\mu_B^2 = \frac{2a^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4}$  δίνουν την λύση.
3. Αν  $Z$  η τομή της  $A\Delta$  με τον περιγεγραμμένο περί το τρίγωνο κύκλο τα τρίγωνα  $ABZ$  και  $A\Delta\Gamma$  είναι όμοια.
4. Θεώρημα διαμέσων και δύναμη των σημείων  $M$ .
5. Αν  $M$  σημείο του τόπου τότε  $M\kappa^2 + M\Lambda^2 = \text{σταθερό}$  άρα ο ζητούμενος τόπος θα είναι κύκλος.
6. Αν  $M$  σημείο του τόπου τότε  $M\kappa^2 - M\Lambda^2 = \text{σταθερό}$ . Από το 2<sup>ο</sup> Θεώρημα διαμέσων αποδεικνύεται ότι το  $M$  ανήκει σε ευθεία κάθετη επί της διακέντρου σε σταθερό σημείο.

7. Αν  $M$  σημείο του τόπου τότε  $MO$  σταθερό άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος  $(O, OM)$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

### § 10.1 10.2

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1.  $E_{AB\Gamma} = \frac{\beta\gamma\sqrt{3}}{4}$  β)  $E_{AB\Gamma} = 18(\sqrt{3} + 1)$   
γ)  $E_{AB\Gamma} = 24\sqrt{3}$ .
2.  $E_{AB\Gamma\Delta} = 384\sqrt{3}$
3.  $E_{AB\Gamma} = \frac{24}{5}$
4.  $a = 8, \beta = 4$
5.  $E_{AB\Gamma\Delta} = 50\sqrt{3}$
6.  $\nu = 3\sqrt{3}\kappa$  και  $E = 12\sqrt{3}\kappa^2$
7.  $E_{AB\Gamma\Delta} = 10\sqrt{2}$
8. Να θεωρήσετε το ύψος  $AH$  και να υποθέσετε ότι  $A\Delta, AE$  είναι οι ζητούμενες.
9. Η  $A\Delta$  είναι κοινή βάση τριγώνων με ίσα ύψη.
10. Σχηματίζονται παραλληλόγραμμα που οι διαγωνίες τους τα χωρίζουν σε ισοδύναμα τρίγωνα.
11. Βλέπε άσκηση 10.
12. Τα  $AEZ\Delta$  και  $Z\Gamma BE$  είναι τραπέζια με ίσες διαστάσεις.
13.  $E = \frac{1}{2} \beta\gamma$  και  $a^2 = \beta^2 + \gamma^2$ .
14.  $E_{AB\Gamma} = E_{AB\Gamma_0} + E_{AB\Gamma_1} - E_{B\Gamma_1\Gamma_0} = \dots$
15. Να εκφράσετε τα  $\rho, \rho_a, \nu_a$  συναρτήσει του εμβαδού  $E$  και των πλευρών  $a, \beta, \gamma$  του τριγώνου.

#### Β' ΟΜΑΔΑ

1.  $E_{AB\kappa\Gamma} = \frac{5}{7} E_{\kappa\Lambda\Gamma\Delta}$
2. Τα τρίγωνα  $BE\Gamma$  και  $B\Gamma Z$  έχουν ίσες βάσεις και κοινό ύψος άρα κτλ.
3. Να θεωρήσετε την  $BM//A\Delta$  τότε  $BM\Gamma$  ισόπλευρο κλπ.
4.  $\Gamma\kappa$  εφαπτομένη και  $\Gamma BE$  τέμνουσα του κύκλου.
5.  $E_{AB\Gamma\Delta} = 25$
6. Να θεωρήσετε από το  $E$  την  $E\chi//B\Gamma$ .
7.  $E = 1290, \nu_a = 60, R \approx 34, \rho = 15$ .
8. Δείξτε ότι η μια διαγώνιος είναι ίση με την πλευρά του ρόμβου.

9.  $E_{AB\Gamma\Delta} = 60$ .
10. Επειδή το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι περιγεγραμμένο άρα  $AD + B\Gamma = AB + \Gamma\Delta$ .
11. Οι διάμεσοι  $ZM$  και  $EN$  χωρίζουν τα τρίγωνα  $ZB\Delta$  και  $E\Delta\Gamma$  σε ισοδύναμα τρίγωνα.
12. Αν  $M$  μέσο της  $BE$  το  $B\Delta M$  είναι επίσης ισοπλευρο πλευράς  $a$ .
13. Οι  $K\Lambda$  και  $KM$  τέμνουν την  $B\Delta$  και  $P$  και  $I$ . Τα τρίγωνα  $PNK$  και  $P\Lambda B$  καθώς και τα  $NKI$  και  $M\Delta I$  είναι ίσα άρα και ισοδύναμα οπότε κλπ.
14. Αν  $AB < A\Gamma$  και το  $E_{AB\Gamma}$  είναι μέγιστο τότε αν  $M$  μέσο του μη κυρτού τόξου  $B\Gamma$  θα έχουμε  $E_{MB\Gamma} > E_{AB\Gamma}$  άτοπο κλπ.
15.  $x = MB = \frac{a}{4}$ .
16. Και το ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$  θα είναι τότε σταθερό.

### § 10.3

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Αν  $v_1, v_2$  τα ύψη τότε  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{8}$ .
2. Αν  $AD$  το ύψος του  $AB\Gamma$  που τέμνει την  $K\Lambda$  στο  $M$  τότε  $AM = M\Delta$  κλπ.
3. Τα  $AB\Gamma$  και  $K\Lambda M$  έχουν παραπληρωματικές γωνίες.
4. Να υπολογίσετε τα  $A\Delta, B\Delta, \Gamma\Delta$  κλπ.
5. Έχουν ίσες γωνίες και παραπληρωματικές γωνίες άρα θεώρημα 10.11.
6. Αν  $B\Delta$  ύψος να εκφράσετε τα εμβαδά των τριγώνων συναρτήσει του ύψους  $B\Delta$ .
7. α) Τα  $AKB$  και  $A\Lambda\Gamma$  έχουν κοινή την γωνία  $A$ .  
β) Το  $A\Lambda PK$  είναι κοινό τμήμα των ισοδύναμων τριγώνων του ερωτήματος α.
8. Αν  $AH, \Gamma Z$  κάθετες στη  $B\Delta$  τότε  $AH = \Gamma Z$  κλπ.

#### Β' ΟΜΑΔΑ

1. Τα  $OZE$  και  $\Gamma AB$  έχουν τις γωνίες  $\Gamma$  και  $O$  παραπληρωματικές άρα θεώρημα 10.11.
2. Επειδή  $EZ // B\Gamma$  άρα  $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$  και τα  $AEZ$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια κλπ.
3. Με την βοήθεια του Θεωρήματος 10.11 έχουμε  $E_{\Gamma EZ} = 4\text{cm}^2$ ,  
 $E_{A\Delta Z} = 9\text{cm}^2$  και  $E_{\Delta EZ} = 7\text{cm}^2$
4. Να θεωρήσετε τα ύψη του τριγώνου τότε  $\frac{K\Delta}{v_a} = \frac{E_{K\Gamma B}}{E_{AB\Gamma}}$  κλπ.

5.  $\widehat{\Gamma B} = 135^\circ$  και  $\widehat{I\Lambda B} = 45^\circ$  ενώ  $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$  οπότε από το Θεώρημα 10.11 κλπ.
6. Τα τρίγωνα  $B\Delta A$  και  $\Gamma B A$  είναι όμοια κλπ.

### § 10.4

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1. Αν  $x$  η πλευρά του τετραγώνου τότε  $x^2 = a \cdot b$  άρα  $x$  κατασκευάσιμο.
2. Η ζητούμενη πλευρά  $x$  είναι  $4^n$  ανάλογος των  $u$  και της διαμέσου  $K\Lambda$  του τραpezίου.
3. Η πλευρά  $x$  του ισοσκελούς τριγώνου θα είναι  $n \cdot 4^n$  ανάλογος των  $\beta, \gamma$ .
4. Αν  $x, \psi$  οι διαστάσεις τότε  $x\psi = a^2$  και  $x + \psi = k$  κλπ.
5. Αν  $\Delta N$  η ζητούμενη τότε  $\frac{E_{\Delta\Delta N}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{1}{3}$  κλπ.
6. Αν  $\Gamma E$  η ζητούμενη τότε  $\Gamma E = K\Lambda$  όπου  $K\Lambda$  η διάμεσος.
7. Να θεωρήσετε  $AK // \Sigma\Delta$  και  $B\Lambda // \Sigma\Gamma$ . Αν  $\Sigma M$  η ζητούμενη τότε  $M$  μέσο της  $K\Lambda$ .

#### ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10<sup>ου</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1.  $a = 10, E = 24$ .
2. Αν  $\Delta$  το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου και της  $B\Gamma$  τότε  $B\Delta = t - \beta, \Gamma\Delta = t - \gamma$ . Συγχρόνως δύναμη του  $B$  είναι  $B\Delta^2$  κλπ.
3. Από το μέσο  $M$  μιας εκ των μη παραλλήλων θεωρούμε παράλληλη προς την άλλη του τέμνει τις παράλληλες στα  $E$  και  $Z$ . Το  $M\Delta E, MAZ$  ισοδύναμα κλπ.
4. Αν  $M, K, \Lambda$  τα σημεία επαφής του τριγώνου και του εγγεγραμμένου κύκλου τότε  $\frac{E_{AM\Lambda}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{1}{15}$  κλπ.  
Συγχρόνως  $AB\Gamma$  ορθογώνιο με  $E = 30$  οπότε τελικά  $E_{K\Lambda M} = \frac{60}{13}$ .
5.  $\frac{E_{\Delta\Delta E}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{1}{12}$  κλπ οπότε τελικά  $E_{\Delta E I \Theta H Z} = 118$ .
6.  $\widehat{E\Lambda H} = 150^\circ, \widehat{A} = 30^\circ$  άρα Θεώρημα 10.11  $\frac{E_{\Lambda H E}}{E_{AB\Gamma}} = \dots = 1$  κλπ.
7. Επειδή  $\widehat{B\Lambda Z} = \widehat{Z\Lambda\Gamma}$  άρα Θεώρημα 10.11 κλπ.
8.  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  διαδοχικοί γεωμετρικής πρόδου άρα  $AB \cdot \Delta A = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta, \widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$  άρα κλπ.
9. Θεώρημα 10.11 στα  $Z\Gamma B, IBA$  κλπ.
10. Ισχύει  $E_{AB\Gamma\Delta} = E_{AB\Gamma} + E_{A\Gamma\Delta} = E_{AB\Delta} + E_{B\Delta\Gamma}$ . Συγχρόνως



$$E_{AB\Gamma} = \frac{a \cdot b \cdot A\Gamma}{4R}$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

### § 11.1

#### Α' ΟΜΑΔΑ

- α)  $\varphi_{20}=162^\circ$  β)  $v=40$  γ)  $v=15$  δ) Δεν υπάρχει τέτοιο πολύγωνο.
- Χρησιμοποιήστε τον τύπο  $\varphi_v = 180 - \frac{360}{v}$ .
- Πρόκειται για κανονικό εξάγωνο οπότε  $R=4$ .
- $v=6$  οπότε  $R=12$ .
- Χρησιμοποιήστε τη σχέση  $a_v^2 + \frac{\lambda_v^2}{4} = R^2$
- $\frac{E}{E'} = \frac{\sqrt{3}}{4}$
- $\frac{\Pi_{10}}{\Gamma'_{10}} = \frac{4}{7}$  και  $\frac{E_{10}}{E'_{10}} = \frac{16}{49}$
- Τα  $v$ -γωνα είναι όμοια οπότε κλπ.
- $\lambda'_3 = 2\sqrt{3}R$  και  $\lambda'_6 = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ .
- α) Αν  $AB=\lambda_v$ ,  $\Delta E=\lambda'_v$ ,  $a_v=OH$  τα τρίγωνα  $HOB$ ,  $BO\Delta$  είναι όμοια.  
β)  $E'_6=2R^2\sqrt{3}$ ,  $E'_3=3\sqrt{3}R^2$ .
- $E_{MAB} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})R^2$ .

#### Β' ΟΜΑΔΑ

- Με συγκρίσεις τριγώνων δείξτε ότι  $AB=BG$  και  $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta}$  όπου  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  τυχαίες πλευρές του  $v$ -γώνου.
- Σχηματίζονται ίσα ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς  $\lambda'_6 = \frac{\lambda_3}{3}$  ενώ  $\frac{E}{E'} = 3$ .
- $BE \cdot EZ = AE \cdot E\Delta$  οπότε  $EZ = \frac{R\sqrt{10}}{10}$ .
- Το  $\Delta E$  είναι εφαπτόμενο τμήμα, άρα  $\Delta E^2 = \Delta B \cdot \Delta A$ .
- Η  $\Gamma B$  είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου  $A\Gamma E$ ,  $E_{A\Gamma E} = 2R^2$ .
- Πυθαγόρειο θεώρημα στο  $M\Gamma N$ .
- α)  $\widehat{AB\Gamma} = 60^\circ$ ,  $\widehat{A\Gamma B} = 45^\circ$ , β)  $AH = \frac{R\sqrt{6}}{2}$ ,  
γ)  $B\Gamma = \frac{R}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ , δ)  $E = \frac{R^2}{4}(\sqrt{3} + 3)$ .

- α) Δείξτε ότι  $E\Delta // A\Gamma$ .  
β) Αν  $B\Gamma'$  η διχοτόμος της  $\widehat{ABE}$  δείξτε ότι  $\widehat{\Gamma'B\Gamma} = 90^\circ$ .  
γ) Αν  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $P$  τα σημεία τομής των διαγωνίων, τότε  $\widehat{P\Lambda K} = 108^\circ$  κλπ.  
δ) Τα τρίγωνα  $MB\Gamma$  και  $BA\Gamma$  είναι όμοια.
- Αν η  $OB$  τέμνει την  $A\Delta$  στο  $\Lambda$ , τότε α) σχηματίζονται ισοσκελή τρίγωνα, άρα  $A\Delta - AB = \dots$  β) τα τρίγωνα  $\Lambda OA$  και  $O\Lambda\Delta$  είναι όμοια κλπ.  
γ)  $A\Delta^2 + AB^2 = (A\Delta - AB)^2 + 2A\Delta \cdot AB = \dots$
- $AB = \lambda_5$ ,  $\Gamma$  μέσο του τόξου  $AB$ , άρα  $\Gamma B = \lambda_{10}$ . Δείξτε ότι  $\Gamma B = \Gamma E$ .
- Αν  $AB = \lambda_v$  και  $\Gamma$  μέσο του τόξου  $AB$ , τότε  $A\Gamma = \lambda_{2v}$  θα έχουμε  $E_{2v} = vE_{O\Lambda\Gamma B}$  κλπ.
- Αν  $AB = \lambda_v$  και  $\Gamma$  μέσο του τόξου  $AB$ , τότε  $A\Gamma = \lambda_{2v}$ ,  $OK = a_v$ ,  $O\Delta = a_{2v}$ . Τα  $O$ ,  $\Delta$  είναι μέσα πλευρών τριγώνου κλπ.
- Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Αρχιμήδη. Οπότε  $\lambda_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$  και  $a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,  $E_8 = 2\sqrt{2}R^2$ .
- $E = 18(\sqrt{2} - 1)$

### § 11.2

#### Α' ΟΜΑΔΑ

- Περίπου 640.
- $S_{\widehat{\Gamma A}} = \frac{5\pi}{6}$
- 20π.
- Περίπου 1,04.
- Το κέντρο των κύκλων είναι βαρύκεντρο του ισοπλεύρου τριγώνου οπότε  $L = \frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$ .
- $L = 12\pi$ .

#### Β' ΟΜΑΔΑ

- Αν  $T$  η ζητούμενη περίμετρος, τότε  $T = \pi \cdot a$ .
- $T = \pi \cdot a$ .
- $S_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R}{4}$ ,  $S_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{2\pi R}{3}$ ,  $S_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{13\pi R}{12}$
- Επειδή  $\beta + \gamma = 2\rho + \alpha$ , άρα  $\rho = 1$  κλπ.
- Αν  $(K, \rho)$  ο εφαπτόμενος κύκλος,  $\Gamma$  και  $\Delta$  τα μέσα των  $OA$ ,  $OB$ , τότε  $OK = R - \rho$ ,  $K\Delta = \rho + \frac{R}{2}$  και  $O\Delta = \frac{R}{2}$  κλπ.
- Αν  $T$  η περίμετρος, τότε  $T = \frac{a(\pi + \sqrt{3} - 1)}{2}$ .

§11.3

**Α΄ ΟΜΑΔΑ**

1.  $E = 16(8 - \pi)$ .
2.  $E = \frac{R^2}{2} (4 - \pi)$
3. Αν  $\rho$  η ακτίνα του μικρού κύκλου, τότε  $\rho = a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ .
4.  $E = \frac{3\pi R^2}{8}$ .
5.  $E = 2a^2$ .
6. Αν  $E_1, E_2, E_3$  τα εμβαδά, τότε  $E_3 = E_2 = \frac{\pi a^2}{8}$  ενώ

$$E_1 = \frac{4a^2 - \pi a^2}{4}$$

7.  $E = \frac{2\sqrt{3}R^2 - \pi R^2}{2}$  ενώ  $T = \pi R$  όπου  $T$  η περίμετρος.

8.  $E = \frac{a^2}{2} (\pi - 2)$ .

9.  $E_T = 4R^2, \frac{E_1}{E_2} = 4$ .

**Β΄ ΟΜΑΔΑ**

1.  $E = \frac{a^2}{2} (2 + \pi(\sqrt{2} - 2))$ .

2.  $E = \frac{R^2}{6} (3\sqrt{3} - \pi)$ .

3.  $E = \frac{a^2(\pi - 3)}{24}$ .

4.  $E = \pi R^2 (2\sqrt{3} - 3)^2$ .

5.  $E = \frac{\pi - 2}{8} R^2$ .

6.  $E = 2a^2(\pi - 2)$ .

7.  $E = \frac{\sqrt{3}R^2}{2}$ .

8.  $E = \frac{R^2}{12} (3\sqrt{3} - \pi)$ .

9. Βλέπε άσκηση 7B  $E = \frac{4\pi R^2}{3}$

10.  $E = \frac{R^2}{3} (3\sqrt{3} - \pi)$ .

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11<sup>ου</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

1. Αν  $x, y$  οι ακτίνες των ζητούμενων κύκλων και  $E_1, E_2$  τα εμβαδά αυτών τότε  $E_1 = \frac{1}{3} E, E_2 = \frac{2}{3} E$  όπου  $E$  το

εμβαδό του αρχικού κύκλου.

2. Αν  $AB = a$  και  $AH = x$  τότε  $AZ = x, ZH = x\sqrt{2}$  και  $H\Theta = x\sqrt{2} \dots$
3. Ισχύει  $E_{(\Delta MB\Gamma\Omega\Delta)} = E_{\kappa\tau\mu(BE\Gamma)} + 2[E_{B\Delta M} - E_{\kappa\tau\mu(\Delta\Theta M)}]$  οπότε τελικά  $E_{(\Delta MB\Gamma\Omega\Delta)} = \frac{3}{8} a^2 \sqrt{3} - \frac{1}{12} a^2 \sqrt{3}$ .
4. Αν  $2x$  και  $2y$  τα μήκη των χορδών και  $y$  και  $a$  τα αποστήματά τους αντίστοιχα, έχουμε  $\beta + x = y + a, a^2 + \beta^2 = R^2 = x^2 + y^2$ .
5. Βλέπε άσκηση 8 Β΄ Ομάδας κεφαλαίου 11 παράγραφος 3.
6. Αν  $K$  η προβολή του  $\Delta$  στην  $MA$  έχουμε  $\Delta M \cdot \Delta A = MA \cdot \Delta K = MA \cdot \frac{\Delta E}{2} \dots$

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12**

§ 12.1

**Α΄ ΟΜΑΔΑ**

1. Κοινά σημεία τους τα  $A$  και  $B$ .
2. Αν τα τρία σημεία ήταν συνευθειακά τότε και τα τέσσερα θα ήταν συνεπίεδα άτοπο.
3. Οι κύκλοι έχουν κοινό κέντρο, άρα τα επίπεδά τους τέμνονται κατά ευθεία κλπ.
4. Αν δεν συνέτρεχαν θα όριζαν 3 σημεία, αναγκαστικά συνεπίεδες.

**Β΄ ΟΜΑΔΑ**

1. Κάθε ένα από τα 10 αυτά επίπεδα τέμνει τα υπόλοιπα 9 κατά 9 το πολύ ευθείες.
2. Αν οι ευθείες ήταν συνεπίεδες...
3. Έστω  $A$  το σημείο τομής της  $\epsilon$  με το  $\Pi$ . Θεωρούμε ευθεία  $\delta$  που ανήκει στο  $\Pi$ , έστω  $\delta // \epsilon$ . Τότε, άτοπο.
4. Οι ευθείες  $\epsilon, \delta$  ορίζουν ένα επίπεδο  $P$ .

§ 12.2

**Α΄ ΟΜΑΔΑ**

1. Αν  $AM$  ύψος του  $AB\Gamma$  τότε  $\Delta M \perp B\Gamma$ .
2. Είναι τα παράλληλα επίπεδα σε απόσταση  $a$  από το δοθέν.
3. Χρησιμοποιήστε μέθοδο απαγωγής στο άτοπο.
4. Η  $ME$  είναι κάθετη στις  $\Gamma\Delta$  και  $MA$ .
5. Αν το επίπεδο  $P$  περιέχει την  $(\epsilon)$  και τέμνει το  $(\Pi)$  σε ευθεία  $\delta$  τότε  $\delta // \epsilon$  γιατί αν  $n$  ( $\delta$ ) τέμνει την  $(\epsilon)$  τότε άτοπο.
6. Θεώρημα Θαλή.

7. Σχηματίζεται τετράπλευρο με δύο απέναντι γωνίες ορθές.
8. Να θεωρήσετε από το A την  $Ax//A_1B_1$ .
9. Θεώρημα Θαλή.

### Β' ΟΜΑΔΑ

1. Είναι η κάθετη στο Π στο περίκεντρο του τριγώνου.
2. Αν  $A', B'$  οι προβολές των A και B στην  $\epsilon$  τότε να δείξετε ότι  $AA' = BB'$ . Προς τούτο να θεωρήσετε επίπεδο ( $\Sigma$ ) κάθετο στην ( $\epsilon$ ) που ορίζει τις αντίστοιχες επίπεδες των διέδρων  $xOz, zOy, xOy$  και να προβάλλετε τα A, B στο ( $\Sigma$ ).
3. Να φέρετε τα ύψη AD και GE του ABΓ. Δείξτε ότι  $A'D \perp B'G$  και ότι η ευθεία των ορθόκεντρων HH' είναι ορθογώνια προς τις BΓ, AB.
4. Αποδείξτε ότι  $MN//AB$  και  $MP//AG$  άρα το επίπεδο των M, N, P είναι παράλληλο στο (Π).
5. Θεώρημα Θαλή.
6. i) Αν AG, BD μη ασύμβατες τότε ορίζουν επίπεδο AΔΓB άτοπο.  
ii) BD είναι κάθετη στο επίπεδο (A, M, Γ) άρα  $MN \perp BD$ , ενώ  $MN \perp AG$  κλπ.
7. i) Σύγκριση τριγώνων.  
ii) Οι OD, AD είναι κάθετες στην MN.
8. Να θεωρήσετε ευθεία η  $\perp z$  στο σημείο A του επιπέδου ( $\Sigma$ ).
9. Με Πυθαγόρειο θεώρημα δείξτε ότι και το AEF είναι ορθογώνιο τρίγωνο.
10. Να θεωρήσετε  $B\delta//\epsilon_1$  και  $\Gamma\eta//AB$  και χρησιμοποιήστε Πυθαγόρειο θεώρημα.

### ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. i) Δείξτε ότι  $EZ//AG$  και  $BD//HZ$ .  
ii) Θεωρούμε το μέσο Θ της AD και φέρνουμε την ΗΘ.
2. i) Θεωρήστε τις  $\epsilon_1, \epsilon_2$  κατά τις οποίες το  $\Sigma$  τέμνει τα Π και Ρ τότε  $\epsilon_1//\epsilon_2$ .  
ii) Αν  $\omega$  και  $\varphi$  οι γωνίες των διέδρων τότε  $\omega = \varphi$  οπότε κλπ.
3. Φέρνουμε ευθεία Mx παράλληλη προς την AB.
4. i) Δείξτε ότι οι  $O_1M \perp B\Gamma$  και  $O_2M \perp B\Gamma$ .  
ii) Δείξτε ότι  $MN \perp O_1O_2$  και  $MN \perp B\Gamma$ .
5. i) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο τεμνόμενες ευθείες σε κάθε επίπεδο, οι οποίες είναι παράλληλες με αντίστοιχες στο άλλο επίπεδο.  
ii) Δείξτε ότι οι κορυφές του ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και ότι οι διαγώνιες διχοτομούνται.
6. Έστω T το κάθετο επίπεδο της  $\epsilon$  στο O. Θεωρήστε

τις προβολές των A, B, Σ στο T.

7. Πυθαγόρειο θεώρημα και θεώρημα 3 καθέτων.
8. Δείξτε ότι  $xy \perp (AB, A'B')$  και  $xy \perp (AB, A'B'')$ .
9. Εφαρμόστε το 2<sup>ο</sup> θεώρημα των διαμέσων.
10. Φέρνουμε την AA' κάθετη στο επίπεδο ρ και την A'K που τέμνει τον κύκλο στα B και Γ ( $A'B < A\Gamma$ ).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

### § 13.1

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1.  $v = 10 \text{ m}$ ,  $E_{\text{ολ}} = 468 \text{ m}^2$ ,  $V = 540 \text{ m}^3$ .
2.  $E = 72$ .
3. Επειδή  $V = E_{\beta} \cdot v = E_{\kappa} \cdot \lambda$  άρα αρκεί  $\frac{v^2}{\lambda^2} = \frac{3}{4}$ .
4.  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 8\sqrt{3}$ .
5.  $\alpha = 12\sqrt{3}$ ,  $\beta = 6\sqrt{3}$ ,  $\gamma = 6$ .
6. Να θεωρήσετε τριγωνικό πρίσμα ABΓ, A'B'Γ' και ένα επίπεδο ΔΔ'Ε'Ε παράλληλο στην BB'Γ'Τ κ.λ.π.

#### Β' ΟΜΑΔΑ

1. Οι ΚΛ, AB τέμνονται στο Σ, οι ΛΜ, ΒΓ τέμνονται στο Τ. Η ΣΤ είναι η τομή των επιπέδων (Κ, Λ, Μ) και ABΓΔ. Με θεώρημα Θαλή  $\Delta N = \frac{20}{3}$ .
2. Είναι διάμεσοι τριγώνων και το σημείο τομής τους είναι το κέντρο βάρους.
3.  $E_{\text{ολ}} = 648a^2$ ,  $V = 810a^3$  βλέπε και άσκηση 1Α.
4. Αν Κ το κέντρο του παραλληλεπιπέδου και ΕΕ' το τμήμα με άκρα στις απέναντι έδρες διερχόμενο από το Κ. Με ίσα τρίγωνα δείξτε ότι  $KE = KE'$ .
5. Να πάρετε μία κάθετη τομή του ΔΕΖ. Αν ΔΗ  $\perp$  ΔΕΖ το εμβαδό του ΔΕΖ είναι  $\frac{1}{2} ZE \cdot \Delta H$  κ.λ.π.

### § 13.2

#### Α' ΟΜΑΔΑ

1.  $E = 64(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$ ,  $V = 256 \text{ cm}^3$ .
2.  $E_{\text{φφ}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $E = 3R^2(\sqrt{3} + 1)$ ,  $V = R^3\sqrt{3}$ .
3. Είναι 30°.
4.  $E = 9\sqrt{3}a^2$ ,  $V = \frac{3\sqrt{6}}{2} a^3$ .
5. Οι έδρες του τετραέδρου είναι ισόπλευρα τρίγωνα

$$E_{ολ} = a^2\sqrt{3} \text{ ενώ } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

**Β' ΟΜΑΔΑ**

- $E = \frac{99}{4}$  και  $V = \frac{21}{4}$ .
- Η τομή (ε) των (Σ,Α,Β) και (Σ,Δ,Γ) είναι ευθεία παράλληλη στις ΑΒ,ΓΔ ενώ η γωνία των επιπέδων αυτών είναι η  $\widehat{ΜΣΝ}$  όπου ΣΜ, ΣΝ κάθετες στις ΑΒ, ΓΔ. Δείξτε ότι  $\widehat{ΜΣΝ} = 90^\circ$ .
- $E = \frac{\sqrt{36V^2 + a^6}}{a} + a^2$ .
- $V = 324\sqrt{3} \cdot a^3$ .
- $E_{ολ} = \frac{1}{2}a^2(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5})$ .
- Τα τρίγωνα της παράπλευρης επιφάνειας ανά δύο είναι ίσα.

**§ 13.3-13.4-13.5****Α' ΟΜΑΔΑ**

- $V = 63\pi \text{ m}^3$ .
- $K = 36240 \text{ δρχ/ημέρα}$ .
- $V = 240\pi$ ,  $E_{ολ} = 200\pi$ .
- Ο λόγος ομοιότητας προκύπτει από την ομοιότητα των ορθογωνίων.
- $E_n = 135\pi \text{ cm}^2$ .
- $E_n = 2\pi\sqrt{5}$ .
- 
- Είναι κώλυρος κώνος με  $V = 124\pi \text{ cm}^3$  και  $E_n = 55\pi \text{ cm}^2$ .
- $E_{σφ} = 64\pi \text{ cm}^2$ .
- Λάβετε υπ' όψιν το Πυθαγόρειο θεώρημα.
- $V = 3\pi a^3$ .

**Β' ΟΜΑΔΑ**

- Αν  $V_1$  ο όγκος που αντιστοιχεί στο κυρτογώνιο τόξο ΑΒ και  $V_2$  ο υπόλοιπος τότε  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}$ .
- Το στερεό με το μικρό ύψος έχει μικρότερη επιφάνεια και όγκο.
- Ο όγκος του στερεού είναι η διαφορά των όγκων

που γράφεται με ακτίνα  $a + \gamma$  από αυτόν που γράφεται με ακτίνα  $\gamma$ .

- Ο ζητούμενος όγκος είναι  $V = 81(4\pi - 3\sqrt{3})$ . Η τομή δημιουργεί όμοια τρίγωνα κ.λ.π.
- Ο ζητούμενος όγκος είναι η διαφορά του όγκου ενός κώλυρου κώνου και ενός κυλίνδρου. Έτσι  $V = 90\pi$  ενώ  $E = 48\pi$ .
- Αν  $\Theta$  η τομή του παράλληλου επιπέδου (Ρ) και του ύψους του κώνου ΚΟ και Μ κοινό σημείο του επιπέδου Ρ και του κώνου, το  $\Theta Μ$  είναι σταθερό.
- Ο τόπος είναι σφαίρα (Κ,ΜΚ) όπου  $ΜΚ = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2 - AB^2}$ .
- $R = 10(\sqrt{5} - 2)$ .
- $V = \frac{\pi R^3}{3}$  και  $E = 3\pi R^2$ .

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 13<sup>ου</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

- Τα εφαπτόμενα επίπεδα ορίζονται από εφαπτόμενες στον κύλινδρο και γενέτιρες.
- Αν ΑΒΓΔ Α'Β'Γ'Δ' το πρίσμα και οι διαγώνιοι ΑΓ, Β'Δ, Δ'Β διέρχονται από το Κ δείξτε ότι και η διαγώνιος ΑΓ' διέρχεται από το Κ.
- Να φέρετε τις διχοτόμους των γωνιών  $\widehat{ΑΜΒ}$  και της παραπληρωματικής της.
- Με προσθαφαίρεση όγκων έχουμε  $V = 4\pi a^3$ .
- Ο όγκος και το εμβαδό του εγγεγραμμένου πρίσματος είναι  $V = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$  και  $E = 5Ru + \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ .
- Οι 3 κορυφές της βάσης ορίζουν σφαίρα κέντρου Κ. Πρέπει το Κ να απέχει από τις κορυφές ίση απόσταση.
- $E = \frac{a^2}{2}(\sqrt{67} + \sqrt{3} + \sqrt{19})$ .
- Να θεωρήσετε μία τομή του κώνου (Κ,Α,Β) με επίπεδο που διέρχεται από το ύψος του ΚΗ. Το Ο είναι σημείο του ΚΗ, η  $ΚΓ \perp ΚΑ$  και  $ΓΚΟ$ , ΗΚΑ είναι όμοια κ.λ.π.
- Να θεωρήσετε μία κάθετη τομή που διέρχεται από το ύψος της και τέμνει την βάση στα μέσα δύο απέναντι πλευρών.

## Ευρετήριο όρων

**A**

άθροισμα γωνιών 29  
 " ευθ. τμήματος 19  
 αίτημα Ευκλείδιο 6  
 ακμή πρίσματος 347  
 άκρο ευθ. τμήματος 18  
 " τόξου 38  
 ακτίνα κανονικού πολυγώνου 288  
 " κύκλου 37  
 " σφαίρας 372  
 ακτίνιο 302  
 αμβλεία γωνία 27  
 αμβλυγώνιο τρίγωνο 53  
 αναλογία 186  
 ανάπτυγμα κώνου 369  
 άνισα ευθ. τμήματα 18  
 άνισες γωνίες 26  
 αντίστροφο 32  
 αξίωμα 16  
 αξίωμα παραλληλίας 107  
 αξιώματα επιπέδου 316  
 άξονας συμμετρίας 73  
 απαγωγή σε άτοπο 31  
 απόδειξη 31  
 απόσταση ασύμβατων ευθειών 333  
 " δύο σημείων 21  
 " παράλληλων επιπέδων 329  
 " σημείου από επίπεδο 328  
 " σημείου από ευθεία 28  
 απόστημα κανονικού πολυγώνου 288  
 " χορδής 61  
 αριθμός  $\pi$  303  
 "  $\varphi$  248  
 αρμονική τετράδα σημείων 197

**B**

βαρύκεντρο τριγώνου 149  
 βάσεις τραpezίου 143  
 βάση ισοσκελούς τριγώνου 54  
 " πρίσματος 347

**Γ**

γενέτειρα πρισματικής επιφάνειας 346  
 Γεωμετρία του χώρου 315  
 Γεωμετρία θεωρητική 12  
 Γεωμετρία πρακτική 12  
 γεωμετρική κατασκευή ριζών εξισώσεων 244  
 " κατασκευή στο χώρο 22  
 γεωμετρικής κατασκευής στάδια 92  
 γεωμετρικό σχήμα 16  
 γεωμετρικός τόπος 40, 68  
 γινόμενο αριθμού επί γωνία 30

" αριθμού με ευθ. τμήμα 20  
 γωνία 25  
 " απέναντι 54  
 " δίεδρη 330  
 " δύο επιπέδων 331  
 " δύο ευθειών στο χώρο 329  
 " εγγεγραμμένη σε κύκλο 157  
 " εξωτερική πολυγώνου 47  
 " επίκεντρο 38  
 " επίπεδα της δίεδρης 331  
 " εσωτερική πολυγώνου 47  
 " ευθείας και επιπέδου 330  
 " περιεχόμενη 54  
 " τριεδρη 343  
 " υπό χορδής και εφαπτομένης 159  
 γωνίες διαδοχικές 29  
 " εντός εναλλάξ 106  
 " εντός και επί τα αυτά 106  
 " εντός, εκτός και επί τα αυτά 106  
 " εφεξής 29  
 " κατακορυφήν 30  
 " παραπληρωματικές 30  
 " προσκείμενες 54  
 " συμπληρωματικές 30  
 γωνιών σύγκριση 26

**Δ**

διαγώνιο επίπεδο πρίσματος 347  
 διαγώνιος πολυγώνου 47  
 " πρίσματος 347  
 διαίρεση ευθ. τμήματος από σημείο 187  
 διάμεσος τραpezίου 143  
 " τριγώνου 54  
 διάμετρος κύκλου 37  
 " σφαίρας 372  
 διαφορά γωνιών 29  
 " ευθύγραμμων τμημάτων 19  
 " τόξων 40  
 διχοτόμος γωνίας 27  
 " τριγώνου 54  
 δύναμη σημείου ως προς κύκλο 243

**E**

έγκεντρο τριγώνου 148  
 εμβαδό κανονικής πυραμίδας 358  
 " κόλουρου κώνου 368  
 " κυκλικού δίσκου 307  
 " κυκλικού τομέα 308  
 " κυλίνδρου 364  
 " κώνου 368  
 " παραλληλογράμμου 260  
 " σχήματος 258  
 " τετραγώνου 259

" τραapeζίου 261  
 " τριγώνου 262  
 εμβαδού αξιώματα 257  
 εξωτερικό γωνίας 25  
 " σημείο κύκλου 37  
 επίπεδα κάθετα 331  
 επίπεδα παράλληλα 320  
 επίπεδο 15  
 " μεσοκάθετο σε ευθ. τμήμα 334  
 " μεσοπαράλληλο 335  
 εσωτερικό γωνίας 25  
 " σημείο κύκλου 37  
 ευθεία 15  
 " τμήμα, μηδενικό 18  
 " τμήματα ασύμμετρα 185  
 ευθεία γωνία 26  
 " διακεντρική κύκλου 86  
 " εξωτερική σε κύκλο 85  
 " εφαπτόμενη σε κύκλο 85  
 " κάθετη σε επίπεδο 323  
 " παράλληλη σε επίπεδο 326  
 " πλάγια σε επίπεδο 330  
 " τέμνουσα κύκλο 85  
 ευθείες ασύμβατες 319  
 ευθείες ορθογώνιες 329  
 " παράλληλες 105

**H**

ημιεπίπεδο 25  
 ημιευθεία 17

**Θ**

θεώρημα 31  
 θεώρημα 1ο διαμέσων 233  
 " 2ο των διαμέσων 233  
 " διχοτόμων 195  
 " Θαλή ειδική περίπτωση 189  
 " Θαλή 188  
 " για επίπεδα 327  
 " Πυθαγόρειο 227  
 " Αντίστροφο 227  
 θωρήματα Πάππου 374

**I**

ιδιότητες παραλληλογράμμου 123  
 ίσα τόξα 39  
 " τρίγωνα 55  
 ίσες γωνίες 26  
 ισοδύναμα επίπεδα σχήματα 258  
 ισόπλευρο τρίγωνο 53  
 ισοσκελές τρίγωνο 53  
 ίχνος ευθ. τμήματος 78

**K**

κανονικά στερεά 378  
 κάθετες ευθείες 28  
 κατασκευή κανονικού πολυγώνου 290  
 " προοπτική 209  
 " τετάρτης αναλόγου 189

κατασκευή μέσης αναλόγου 228  
 κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου 288  
 κέντρο κανονικού πολυγώνου 288  
 " κύκλου 37  
 " συμμετρίας 72  
 " σφαίρας 372  
 κόλυρος κώνος 367  
 κορυφές πολυγωνικής γραμμής 47  
 κορυφή γωνίας 25  
 " πρίσματος 347  
 " πυραμίδας 356  
 κριτήρια εγγραφισιμότητας τετραπλεύρων 168  
 κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων 60  
 " ισότητας τριγώνων 55  
 " ομοιότητας τριγώνων 214  
 " παραλληλογράμμων 124, 125  
 κύβος 348  
 κυκλικός δακτύλιος  
 " δίσκος 37  
 κύκλοι εφαπτόμενοι εξωτερικά 89  
 " εφαπτόμενοι εσωτερικά 89  
 " εφαπτόμενοι 89  
 " ομόκεντροι 89  
 " τεμνόμενοι 89  
 κύκλος 37  
 κύκλος εγγεγραμμένος σε τρίγωνο 148  
 " παρεγγεγραμμένος σε τρίγωνο 150  
 " περιγεγραμμένος σε τρίγωνο 147  
 " " σε τετράπλευρο 167  
 " του Απολλώνιου 198  
 κύλινδρος ορθός 363  
 κυρτή γωνία 26  
 κυρτό πολύγωνο 47  
 " πολυέδρο 345  
 " σύνολο 37  
 " τόξο 38  
 κώνος 367

**Λ**

λήμμα 31  
 λόγος ευθύγραμμων τμημάτων 184  
 " ομοιότητας 208

**M**

μέση ανάλογος 186  
 μεσοκάθετη ευθ. τμήματος 28  
 μετρική σχέση 225  
 μετρικές σχέσεις σε ορθογώνια τρίγωνα 226  
 " σχέσεις σε τρίγωνα 225  
 μέτρο γωνίας 40  
 μη κυρτή γωνία 26  
 μη κυρτό πολύγωνο 47  
 " " τόξο 38  
 μηδενική γωνία 25  
 μήκος ευθ. τμήματος  
 " κύκλου 301  
 " τόξου 302  
 μοίρα 40

**N**

νόμος ημιτόνων 264

**O**

όγκος κόλουρης πυραμίδας 359

" κόλουρου κώνου 369

" κυλίνδρου 364

" κώνου 368

" πρίσματος 351

" πυραμίδας 359

" σφαίρας 375

οξεία γωνία 27

οξυγώνιο τρίγωνο 53

όμοια σχήματα 208

ορθή γωνία 27

ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο 348

" παραλληλόγραμμο 130

" τρίγωνο 53

ορθόκεντρο τριγώνου 148

**Π**

παραλληλεπίπεδο 347

παραλληλόγραμμο 123

παράκεντρο 149

παράπλευρη επιφάνεια κυλίνδρου 363

" επιφάνεια πρίσματος 347

παράπλευρο ύψος πυραμίδας 356

περιγεγραμμένη πυραμίδα σε κώνο 368

περίκεντρο τριγώνου 147

πλευρές γωνίας 25

πλήρης γωνία 25

πολυγωνικό χωρίο 47

πολύγωνο 47

πολύγωνο κανονικό 286

πολύεδρο 344

πόρισμα 31

πρίσμα 346

πρίσμα εγγεγραμμένο σε κύλινδρο 363

" κανονικό 347

" ορθό 347

πρισματική επιφάνεια 346

πρόβλημα της χρυσής τομής 245

προβολή σημείου σε επίπεδο 327

" ευθυγράμμου τμήματος σε ευθεία 78

" σημείου σε ευθεία 78

" σχήματος σε επίπεδο 328

προτάσεις 31

πυραμίδα 356

" κανονική 356

**P**

ριζικός άξονας δύο κύκλων

ρόμβος 13

**Σ**

σημείο 15

σημεία αντιδιαμετρικά 37

σημείο επαφής ευθείας με κύκλο

" " κύκλων 89

σκαληνό τρίγωνο 53

συμμετρία αξονική 72

" κεντρική 71

συμμετρικά σημεία 19

συμμετρικό σημείου ως προς ευθεία 29

συμπεράσματα 32

σύνορο ημιχώρων

σφαίρα 372

**T**

τεθλασμένη γραμμή 46

τέταρτη ανάλογος 186

τεταρτοκύκλιο 38

τετραγωνισμός πολυγώνων 279

τετράγωνο 132

τόξο αντίστοιχο εγγεγραμμένης γωνίας 157

" επίκεντρης γωνίας 38

τραπέζιο 143

τραπέζιο ισοσκελές 144

τριγωνική ανισότητα 77

τρίεδρη γωνία 343

τύπος του Ήρωνα 263

**Υ**

υπόθεση 31

υποτείνουσα 54

ύψος κυλίνδρου 363

" πρίσματος 347

" τραpezίου 143

" τριγώνου 55

**Φ**

φορέας ευθ. τμήματος 18

**X**

χορδή κύκλου 37

" σφαίρας 372