Παράρτημα 1
Ανάγκη αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Ο Ευκλείδης είναι ο πρώτος που συστηματοποίησε κατά τρόπο αξιωματικό τη μελέτη της Γεωμετρίας. ΄Ετσι, στην αρχή του πρώτου βιβλίου των "Στοιχείων", θέτει τους "όρους", δηλαδή διάφορους ορισμούς, τα "αιτήματα", δηλαδή προτάσεις που απαιτεί να συμβαίνουν, τις "κοινές έννοιες", προτάσεις που τις θεωρεί προφανείς και στη συνέχεια τα θεωρήματα ή προβλήματα για τα οποία παραθέτει και απόδειξη ή λύση. Για το διαχωρισμό αυτό, σε όρους, αιτήματα και κοινές έννοιες, που άλλωστε επαναλαμβάνεται εκτός από τα αιτήματα και σε άλλα βιβλία, δε δίνει καμιά εξήγηση. Είναι σκόπιμο να παραθέσουμε την εξήγηση που δίνει ο Πρόκλος, μελετητής των έργων του Ευκλείδη: "*Επειδή υποστηρίζουμε ότι η Επιστήμη αυτή, η Γεωμετρία, αποτελείται από προϋποθέσεις και ότι υπό ορισμένες αρχές αποδεικνύονται τα συμπεράσματα ... θα πρέπει ο συγγραφέας βιβλίου Στοιχειώδους Γεωμετρίας να αναφέρει χωριστά τις αρχές της Επιστήμης και χωριστά τα συμπεράσματα. Δεν υπάρχει ανάγκη να αιτιολογήσει τις αρχές, πρέπει όμως απαραίτητα να αιτιολογήσει τα συμπεράσματα. Διότι καμιά Επιστήμη δεν αποδεικνύει τις αρχές και δεν τις θέτει υπό συζήτηση, αλλά τις θεωρεί από μόνες τους ως βέβαιες... Εάν όμως κάποιος ρίξει στο ίδιο δοχείο τις αρχές και τα παράγωγα, θα προξενήσει αναστάτωση στην όλη περιοχή της γνώσης και θα αναμείξει τα μεταξύ τους άσχετα. Διότι η αρχή και το παράγωγο εξ αυτής, από την αρχή διακρίνονται*".

Μια επιστήμη για να μπορέσει να αναπτυχθεί είναι ανάγκη να ληφθούν μερικές προτάσεις ως αληθινές και γενικά να γίνουν ορισμένες παραδοχές. Οι προτάσεις, που είναι προφανείς και η αλήθειά τους γίνεται κατανοητή από οποιοδήποτε, χαρακτηρίζονται ως αξιώματα. Προτάσεις, όμως, που είμαστε αναγκασμένοι να τις δεχθούμε ως αληθινές για να κατανοήσουμε περαιτέρω γεγονότα, χαρακτηρίζονται ως αιτήματα (Αριστοτέλης). Οι έννοιες αξίωμα και αίτημα διαφέρουν εννοιολογικά, αν και σήμερα στα Μαθηματικά και μάλιστα στη Γεωμετρία αντιμετωπίζονται ως ταυτόσημες.

Η Γεωμετρία, μια κατεξοχήν λογική Επιστήμη, έχει ανάγκη μιας αυστηρής αξιωματικής θεμελίωσης.

Με το να δεχτούμε ότι από δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία καταλήξαμε σε διάφορα συμπεράσματα, ένα από τα οποία είναι ότι δύο μη συμπίπτουσες ευθείες έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο (ένα σημείο τομής). Αν όμως δεχτούμε ότι από δύο σημεία διέρχονται περισσότερες μη συμπίπτουσες ευθείες, θα καταλήξουμε σε αποτελέσματα διαφορετικά από τα προηγούμενα, ένα από τα οποία θα είναι ότι δύο ευθείες, μη συμπίπτουσες, έχουν περισσότερα από ένα κοινά σημεία.

Από το παράδειγμα αυτό διαπιστώνουμε ότι σε πολλές περιπτώσεις, όταν δεχτούμε μία άλλη μορφή ενός ή περισσοτέρων αξιωμάτων, καταλήγουμε σε νέο επιστημονικό οικοδόμημα, ενώ σε άλλες περιπτώσεις αξιοποιώντας τα αξιώματα καταλήγουμε σε αντιφάσεις μ' αυτό που ισχύει στην πραγματικότητα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της πρώτης περίπτωσης είναι οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, που προέκυψαν από την παραδοχή διαφορετικής διατύπωσης του $5^{ου}$ αιτήματος των "Στοιχείων" του Ευκλείδη. Στη δεύτερη περίπτωση, εφόσον κατά την αποδεικτική διαδικασία δε γίνεται κανένα λογικό σφάλμα, η αιτία της αντίφασης θα αποδοθεί στην αποδοχή του αιτήματος, το οποίο είμαστε υποχρεωμένοι να απορρίψουμε και να δεχτούμε μια άλλη διατύπωση του αιτήματος.

Δεν είναι σπάνιες οι περιπτώσεις όπου παρουσιάζονται σωστές αποδεικτικές διαδικασίες, χωρίς προηγουμένως να έχουν διευκρινιστεί με μια κατάλληλη πρόταση, θεώρημα ή αξίωμα, μια προγενέστερη λογική κατάσταση.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα εμφανίζεται στο 1ο θεώρημα-πρόβλημα του $1^{ου}$ βιβλίου των "Στοιχείων" του Ευκλείδη. Προκειμένου να κατασκευάσει ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά ΑΒ, ορίζει την τρίτη κορυφή Γ του τριγώνου ως τομή των κύκλων (Α, ΑΒ), (Β, ΒΑ). Πουθενά όμως προηγουμένως δεν εξηγεί ότι πραγματικά οι κύκλοι αυτοί τέμνονται. Το πρόβλημα αυτό λύνεται στο βιβλίο αυτό στην §2.1.1α, αφού, όμως, πρώτα δίνεται το αξίωμα 1.10 στην §1.5.1 και στη συνέχεια αποδεικνύεται το θεώρημα 4 στην §1.6.2.

Είναι προφανές ότι ένα Επιστημονικό Οικοδόμημα που στηρίζεται σε μικρό αριθμό αξιωμάτων είναι περισσότερο αξιόπιστο.

Δεν είναι σπάνιο, άλλωστε, να αρχίζει η οικοδόμηση μιας επιστημονικής οντότητας με ένα σχετικά μικρό αριθμό αξιωμάτων, που στη συνέχεια, προκειμένου να αντιμετωπιστούν νέα θέματα, αυξάνεται ο αριθμός τους.

Στο σημείο αυτό, κρίνουμε σκόπιμο να τονίσουμε ότι η "απόλυτα αξιωματικοποιημένη Γεωμετρία", όπως π.χ. έκανε ο Hilbert, δεν μπορεί να επιτελέσει εκπαιδευτικό έργο, διότι με την αφαίρεση που εισάγει, δεν μπορούν οι νέοι να αποκαλύψουν τα θέλγητρά της για να γίνουν οι μύστες της.

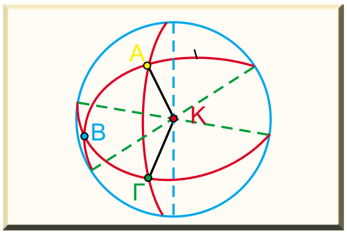
Τα αξιώματα που δεχθήκαμε στο βιβλίο μας αυτό συγκρατούν το μαθητή στη Γεωμετρική πραγματικότητα, δεν τον ταλαιπωρούν σε ιδεατούς χώρους και άσκοπες θεωρητικές προσεγγίσεις. Τον βοηθούν να σκέπτεται, να συμπεραίνει, να αποφαίνεται, να ενεργεί, στηριζόμενοι πάντοτε στα πραγματικά δεδομένα που αποκαλύπτονται συνεχώς μπροστά του.

Παράρτημα 2
Σφαιρική Γεωμετρία

Η Γεωμετρία, κυρίως αυτή που αποκαλούμε Πρακτική Γεωμετρία, οφείλει τη γένεσή της στις πρακτικές ανάγκες της καθημερινής ζωής του ανθρώπου. Οι Έλληνες Θαλής, Πυθαγόρας, Πλάτωνας, Αριστοτέλης, Ευκλείδης κλπ. θέτουν τα θεμέλια μιας κατ' εξοχήν επιστήμης με πρωταρχικό εργαλείο τη Λογική. Από την εποχή ακόμα του Πλάτωνα τίθεται το θέμα της εγγραφής των κανονικών πολυέδρων σε σφαίρα. Ο έναστρος ουρανός με τη σφαιρική του μορφή και η αναγκαιότητα της μελέτης των θέσεων και κινήσεων των αστέρων οδήγησε τους Έλληνες στην ανάπτυξη της Γωμετρίας της σφαίρας (Σφαιρική Γεωμετρία), η οποία με τη βοήθεια της Τριγωνομετρίας γίνεται η βάση της μελέτης της Σφαιρικής Αστρονομίας.

1. Σφαιρικά Τρίγωνα

Έστω ότι έχουμε μια σφαίρα Κ. Φέρουμε τρεις μέγιστους κύκλους της, οι οποίοι τέμνονται ανά δύο στα σημεία Α, Β, Γ. Σχηματίζεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma A}$ των τριών μέγιστων κύκλων.



Γωνία δύο τεμνομένων κύκλων της σφαίρας είναι η γωνία των εφαπτομένων τους στο σημείο τομής τους. Στην περίπτωση που πρόκειται για μέγιστους κύκλους, η γωνία τους είναι ίση με την αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης γωνίας των επιπέδων των δύο κύκλων.

Αν ΑΒΓ είναι ένα σφαιρικό τρίγωο με πλευρές τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma A}$, συμβολίζουμε με γ, α, β τα αντίστοιχα μέτρα τους και με $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ τις γωνίες των πλευρών-τόξων του.

Αποδεικνύεται ότι:

1. Κάθε πλευρά σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά και μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του. Δηλ. $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$.
2. Το άθροισμα των πλευρών σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερο των 4 ορθών, δηλαδή μικρότερο του μέγιστου κύκλου. Δηλαδή $\alpha+\beta+\gamma<4^{\llcorner}$.
3. Το άθροισμα δύο γωνιών σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερο της τρίτης γωνίας του αυξημένης κατά δύο ορθές, δηλαδή $B+\Gamma<A+2^{\llcorner}$.
4. Το άθροισμα των γωνιών σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο των 2 ορθών και μικρότερο των 6 ορθών, δηλαδή $2^{\llcorner}<A+B+\Gamma<6^{\llcorner}$.
5. Κάθε πλευρά, όπως και κάθε γωνία, σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη των δύο ορθών.

Οι κατασκευές σφαιρικών τριγώνων γίνονται, όπως είδαμε, με το σφαιρικό διαβήτη.

Αποδεικνύεται ότι ένα τρίγωνο κατασκευάζεται όταν δοθούν:

- οι τρεις πλευρές του: α, β, γ,
- μία πλευρά και δύο προσκείμενες γωνίες: α, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$,
- δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία, β, γ, $\widehat{A}$,
- οι τρεις γωνίες του: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$.

Ακόμα αποδεικνύεται ότι δύο σφαιρικά τρίγωνα της ίδιας σφαίρας ή ίσων σφαιρών είναι ίσα ή συμμετρικά, όταν έχουν:

- τρεις πλευρές ίσες μία προς μία,
- τρεις γωνίες ίσες μία προς μία,
- δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες μία προς μία,
- μία πλευρά και τις δύο προσκείμενες σ' αυτή γωνία ίσες μία προς μία.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

§ 2.2

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αν οι παρευρισκόμενοι τότε $\nu^2 - \nu - 50 = 0$ κλπ.
2. α) ΣΜ=ΣΒ+ΒΜ κλπ. β)ΡΜ=ΡΑ–ΜΑ κλπ.
3. 10 παίκτες.
4. ΜΝ=ΜΒ+ΒΓ+ΓΝ κλπ.
5. $MA = \frac{16}{7}$, $MB = \frac{12}{7}$
6. ν=9

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. ΜΝ=ΑΝ–ΑΜ κλπ.
2. ΜΓ=ΑΓ–ΑΜ οπότε ν·ΜΓ=ν·ΑΓ–ν·ΑΜ κλπ.
3. Αν Μ μέσο της ΑΔ θα δείξουμε ότι Μ και μέσο της ΒΓ.

§ 2.3

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. $\widehat{\Delta OE} = \widehat{\Delta OB} + \widehat{BOE}$ κλπ.
2. $\frac{2}{3}\llcorner$, $\frac{7}{5}\llcorner$
3. Αν $\widehat{EO\Delta}$ η γωνία των διχοτόμων, να εκφρασθεί συνάρτηση των αρχικών γωνιών.
4. $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma OA} = 4\llcorner$ κλπ.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αν ΟΕ διχοτομεί την $\widehat{\Delta O\Gamma}$ τότε ΟΕ διχοτόμος.
2. $\widehat{PO\Delta} = \widehat{BO\Delta} - \widehat{POB}$ κλπ.
3. Να δείξετε ότι $\widehat{AOE} = \widehat{AOB} + \widehat{BOE} = 2\llcorner$.

§ 2.4

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Είναι η τομή ενός κυκλικού δίσκου και του εξωτερικού ενος άλλου.
2. $\varphi = 45°$
3. Η ΟΜ είναι δοχοτόμος της $\widehat{AOB}$ κλπ.
4. Αυξάνονται κατά 15°.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. $\widehat{K\Lambda} = \widehat{K\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta} + \widehat{\Delta\Lambda}$ =κλπ.
2. Επειδή οι κύκλοι έχουν ακτίνα R ΘΑ διέρχονται από το Ο.
3. Υπάρχει αφύλακτη περιοχή.
4. Δείξτε ότι $\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΜΡ=ΜΒ+ΒΝ+ΝΡ= κλπ.
2. Ισχύει $\widehat{x} + \widehat{\omega} = 90°$ και $\widehat{y} + \widehat{\omega} = 180°$.
3. $\widehat{AOB} = 64°$.
4. Θα είναι $\widehat{AOK} = \widehat{BO\Lambda} = \widehat{\omega}$ και $\widehat{AOK'} = \widehat{B'O\Lambda'}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

§ 3.1

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ.
2. Τα ΑΒΕ και ΕΔΓ είναι ίσα.
3. Να συγκρίνετε τα ΔΑΕ, ΕΒΖ, ΖΓΔ.
4. Να συγκρίνετε τα ΑΔΓ, ΑΒΕ.
5. Να συγκρίνετε τα ΑΔΓ και ΑΒΕ.
6. Να συγκρίνετε τα ΑΒΓ και ΑΒΔ.
7. Να συγκρίνετε τα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄.
8. Τα ΔΑΒ και ΕΑΓ είναι ίσα.
9. Να φέρετε τα αποστήματα των ίσων χορδών και να συγκρίνετε τρίγωνα.
10. Να προεκτείνετε τις ΑΒ, Α΄Β΄ κατά ΒΔ=ΒΓ και Β΄Δ΄=Β΄Γ΄.
11. Να συγκρίνετε τα ΟΑΒ΄ και ΟΒΑ΄.
12. Τα ΒΕΜ και ΓΖΜ είναι ίσα.
13. Τα ίχνη των υψών είναι και μέσα των πλευρών.
14. ΤΑ ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Τα ΟΒΚ και ΟΓΚ είναι ίσα τρίγωνα.
2. Αν ΒΔ διχοτόμος το ΔΓΒ είναι ισοσκελές.
3. α) Να συγκρίνετε τα ΟΒΓ, ΟΑΔ. β) Να συγκρίνετε τα ΙΑΒ, ΙΓΔ και ΟΙΒ, ΟΙΔ.
4. Δείξτε ότι ΑΒΔ και ΑΕΗ ίσα όπου Η η τομή της

διαμέσου ΑΔ και της ΖΕ.

5. Να προεκτείνετε τις διαμέσους ΑΜ και Α΄Μ΄ κατά ΜΔ=ΑΜ και Μ΄Δ΄=Α΄Μ΄.
6. Να πάρετε τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ και να δείξετε ότι ΟΚ=ΟΛ.
7. Αν οι επόπτες Α, Β και ο διαιτητής Δ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε οι επόπτες δε θα βλέπονται.
9. Οι ΖΟ και ΕΟ τέμνουν τη ΓΔ στα Η και Θ, δείξτε ότι ΖΕ=ΘΗ.
10. Αν Δ΄ και Ε΄ οι προβολές των Δ και Ε και Η η προβολή του Ο στην ε, συγκρίνετε τα Δ΄ΔΒ, ΗΒΟ και ΟΗΓ, ΓΕΕ΄.
11. Δείξτε ότι $Γ'\widehat{Δ}B' = 180°$.
12. Δείξτε ότι ΓΑ=ΓΕ.

§ 3.2

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
2. Είναι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ευθείες.
3. Είναι ο κύκλος (Ο,λ) όπου λ το απόστημα της χορδής μήκους α.
4. Είναι η διχοτόμος της $x\widehat{O}y$.
5. Είναι ο κύκλος (Μ,$μ_α$) όπου Μ μέσο της ΒΓ.
6. Είναι ο κύκλος (Α,ρ).

§ 3.3

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Τα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα γιατί έχουν ίσες πλευρές.
2. Όπως στην άσκηση 1Α.
3. Να πάρετε τυχαία σημεία Α, Β της Οx, Οy καθώς και τα συμμετρικά τους ως προς το Κ.
4. Αποδείξτε ότι το συμμετρικό τυχαίου σημείου Β της Οx ανήκει στη συμμετρική της Ο΄x΄ και αντιστρόφως.
5. Το συμμετρικό του ΑΒΓΔ ως προς το Ο είναι το ΑΒΓΔ.

§ 3.4

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Ισχύει $B\widehat{Γ}Δ < \widehat{Γ} = \widehat{B}$.
2. Τριγωνική ανισότητα.
3. Τριγωνική ανισότητα.
4. Οι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο. Στο ΟΑΒ ισχύει ΒΓ<ΟΒ+ΟΓ κλπ.
5. Τριγωνική ανισότητα στα ΑΔΒ και ΑΔΓ.
6. Κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές.
7. Τριγωνική ανισότητα στο ΔΕΖ και σχέση καθέτου και πλάγιας.
8. Τριγωνική ανισότητα και Εφαρμογή 1.
9. Να συγκρίνετε τα ΒΓΔ και ΒΕΔ.
10. Να συγκρίνετε τα ΑΒΔ, ΑΓΕ.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Να θεωρήσετε το Α΄ συμμετρικό του Α ως προς το Μ.
2. Επειδή $\widehat{A} > 90°$ άρα $A\widehat{E}B < 90°$ κλπ.
3. α) Να πάρετε στην ΑΓ τμήμα ΑΒ΄=ΑΒ. β) Στην προέκταση της ΓΑ παίρνουμε ΑΒ΄΄=ΑΒ.
4. Η ΑΒ τέμνει την ε στο Μ και ΜΑ–ΜΒ=ΑΒ. Για το τυχαίο σημείο Μ΄ της ε: Μ΄Β–Μ΄Α<ΑΒ άρα κλπ.
5. Τριγωνική ανισότητα στα ΑΚΓ και ΒΚΔ.
6. Να προβάλλετε το Δ στη ΒΓ.
7. Τα σημεία της διχοτόμου ισαπέχουν από τις πλευρές.
8. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΔΓΕ.
9. Να συγκρίνετε τα στοιχεία των ΑΒΓ, ΔΒΓ και ΑΒΔ, ΑΓΔ.
10. Να θεωρήσετε τη διαγώνιο ΑΓ.
11. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΓΔΖ.

§ 3.5

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Να συγκρίνετε τα ΓΑΟ και ΔΟΒ.
2. Αν Κ μέσο της ΑΒ, τότε ο κύκλος (Κ,ΚΑ) και η ΑΓ εφάπτονται κλπ.
3. Τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΓΑΔ είναι ίσα.
4. Τα τρίγωνα ΒΟΑ, ΟΑΓ, ΓΑΔ είναι ίσα.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$.
2. Αν ο κύκλος (Μ,ΜΔ) εφάπτεται με την ΑΒ στο Δ και ΜΕ⊥ΑΓ, τότε ΜΕ=ΜΔ.
3. Να δείξετε ότι $O\widehat{Γ}B = 90°$.

§ 3.6

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Τα τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΔΛ είναι ίσα.
2. Αν Ν τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου και ΝΑ, ΝΒ εφαπτόμενες τα ΑΚΝ και ΒΛΝ είναι ίσα.
3. ΤΑ ΑΛΓ και ΑΚΔ είναι ίσα.
4. Αν α, β, γ οι ακτίνες των κύκλων, τότε

α+β=ΑΒ=ΒΓ=α+γ κλπ.

5. Να θεωρήσετε το ύψος ΟΜ του ΟΑΔ.
6. Η διάκεντρος ΚΛ τέμνει τους κύκλους στα Α και Β. Αν Μ, Ν τυχαία σημεία των κύκλων, δείξτε ότι ΑΒ<ΜΝ.

§3.7

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1.
2. Στη μία πλευρά της γωνίας Β να πάρετε σημείο Α ώστε ΒΑ=α.
3. Η τρίτη κορυφή Γ θα βρίσκεται στον κύκλο (Α,β).
4. Είναι γνωστές και οι τρεις πλευρές του τριγώνου.
5. Στο ισοσκελές είναι γνωστές και οι τρεις πλευρές του.
6. Κατασκευή τριγώνου από δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.
7. Αν ΒΑ=γ η κορυφή Γ θα βρίσκεται στον κύκλο (Β,α).
8. Η κορυφή Α θα είναι η προβολή της Γ στην πλευρά Βx της γωνίας $\widehat{B}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Τριγωνική ανισότητα στα ΑΑ΄Γ΄ και ΑΑ΄Β οπότε ΑΑ΄<τ κλπ.
2. Να θεωρήσετε τη διχοτόμο της $\widehat{A}$ και στην ΑΓ να πάρετε σημείο Ε ώστε ΑΒ=ΑΕ.
3. Να προεκτείνετε τη ΖΓ κατά ΓΕ=ΓΖ και στην ε να πάρετε σημείο Η ώστε ΓΗ=ΓΒ και να δείξετε ότι ΖΗ>ΖΔ.
4. α) Τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΜΣΟ.
   β) Διακρίνετε δύο περιπτώσεις ο ένας κύκλος είναι: i) στο εσωτερικό του άλλου, ii) στο εξωτερικό μέρος του άλλου.
5. Αν ΑΔ ύψος του τριγώνου, το ΔΑΓ είναι κατασκευάσιμο.
6. Αν ΑΔ ύψος, το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ κατασκευάζεται. Ασκ. 7Α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αθροισμα γωνιών του ΓΑΒ.
2. Σχηματίζονται παρά τη βάση ίσες γωνίες.
3. Σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα.
4. Η $E\widehat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματική της $\widehat{\Gamma}$.
5. Το ΓΒΔ είναι ισοσκελές.
6. Άθροισμα γωνιών ΚΒΓ.
7. Άθροισμα γωνιών τριγώνου.
8. Εξωτερικές γωνίες τριγώνου.
9. Το ΑΒΔ είναι ισοσκελές.
10. Άθροισμα γωνιών ΚΑΒ.
11. Δείξτε ότι $\Delta\widehat{A}E = 180°$.
12. Σχηματίζονται ισοσκελή τρίγωνα.
13. Αν $A<90°$ το ύψος είναι μέσα στο τρίγωνο. Αν $A>90°$ το ύψος είναι έξω από το τρίγωνο.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΓ είναι ισοσκελή.
2. Να θεωρήσετε σημείο Δ της ΒΓ ώστε ΑΒ=ΑΔ.
3. Η προέκταση της ΚΖ τέμνει την ΑΔ στο Ρ.
4. Δείξτε ότι $\widehat{A}+\widehat{B}=90°$.
5. Άθροισμα γωνιών τριγώνων.
6. Τα τρίγωνα ΟΖΓ, ΟΕΔ καθώς και τα ΟΕΑ, ΟΒΖ είναι ίσα.
7. Θεωρούμε Μ το μέσο της ΔΓ. Τότε ΕΒΜ ισόπλευρο.
8. Το ΑΕΔ είναι ισοσκελές και η γωνία $A\widehat{\Delta}B = 40° + \widehat{\Gamma}$.
9. Στην Οψ να θεωρήσετε σημείο Γ ώστε ΒΓ=α οπότε ΟΑΓ τελικά ισόπλευρο.
10. Άθροισμα γωνιών τριγώνου, εξωτερική γωνία τριγώνου.
11. Να θεωρήσετε το συμμετρικό Δ του Α ως προς το Κ.
12. Συμπληρωματικές γωνίες.
13. Άθροισμα γωνιών ισοσκελούς τριγώνου.
14. Βρείτε τα συμμετρικά δύο σημείων της ε ως προς το Ο.
15. Συμπληρωματικές γωνίες.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Αν Αδ διχοτόμος τότε σχηματίζονται εντός εναλλάξ γωνίες ίσες αντίστροφα αν Αδ//ΒΓ τότε Αδ διχοτόμος.
2. Άθροισμα γωνιών τετραπλεύρων και τριγώνων.
3. Έστω $\lambda = \frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{\Gamma}{4}$ και $A+B+\Gamma=180°$ κλπ.
4. Εξωτερικές γωνίες τριγώνου.
5. Αν Ε το σημείο τομής της ΑΓ και της παράλληλης από το Δ προς την διχοτόμο της $\widehat{B}$ τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΕΔΑ είναι ισοσκελή.
6. Τα τρίγωνα ΛΑΒ και ΑΚΛ είναι ισοσκελή.
7. Δείξτε ότι οι φωτεινές ακτίνες σχηματίζουν με την ΒΓ εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

§ 5.1

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Τα ΑΒΓΔ, ΑΓΒΕ είναι παραλληλόγραμμα.
2. Το ΒΜΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.
3. Τα ΔΑΜ και ΓΜΒ είναι ισοσκελή κλπ.
4. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΒΕΓ είναι ίσα.
5. Με ισότητες τριγώνων αποδείξτε ότι οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι ίσες.
6. Τα ΑΕΗ και ΖΓΘ είναι ίσα
7. Θεωρούμε την ΑΓ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΚΗ και ΘΚΓ.
8. Αποδείξτε ότι οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.
9. Τα ΒΚΜΔ και ΒΛΝΔ είναι παραλληλόγραμμα.
10. $\widehat{B}=2\widehat{E}$ και $\widehat{A}=2\widehat{Z}$ οπότε από το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων ΕΖΗ θα έχουμε $\widehat{H}=180-\widehat{E}-\widehat{Z}$ κλπ.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Τα ΔΒΕΓ και ΔΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμα κλπ.
2. Οι ΒΑ, ΕΖ τέμνονται στο Η, οι ΒΓ, ΕΔ στο Θ το ΒΗΕΘ είναι παραλληλόγραμμο κλπ.
3. Επειδή ΑΒ<ΑΓ έχουμε $\widehat{\Gamma}<\widehat{B}$ οπότε $Z\widehat{K}B<\widehat{B}$ άρα στο τρίγωνο ΒΖΚ έχουμε ΒΖ<ΚΖ ή ΒΖ+ΑΖ<ΚΖ+ΑΖ ή ΑΒ<ΚΖ+ΑΖ κλπ.
4. Οι ΑΕ και ΒΖ είναι παράλληλες και ίσες.
5. Αρκεί ΔΕ⊥ΟΕ. Αποδείξτε ότι το ΑΔΕΓ έχει διχοτομούμενες διαγωνίους οπότε ΔΕ//ΓΑΜ κλπ.
6. Θεωρούμε την παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ που τέμνει την ΒΓ στο Η. Το ΒΕΗΔ είναι παραλληλόγραμμο.
7. Η ΕΖ τέμνει την ΑΒ στο Ν οπότε τα τρίγωνα ΑΝΕ και ΕΔΖ είναι ίσα κλπ.
8. Αν $\widehat{B}\neq\widehat{\Gamma}$ έστω $\widehat{B}<\widehat{\Gamma}$ τότε καταλήγουμε σε άτοπο με την βοήθεια του παραλληλογράμμου ΔΖΕΒ που σχηματίζουμε. Όμοια αν $\widehat{B}>\widehat{\Gamma}$, οπότε $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$ άρα ΑΒΓ ισοσκελές.

§ 5.2

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αποδείξτε ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και ότι οι διαγώνιοι είναι ίσες.
2. Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΗ.
3. Να αποδείξετε ότι ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο με κάθετες διαγωνίους.
4. Οι διαγώνιοι του ΜΒΝΔ διχοτομούνται και είναι ίσες.
5. Αποδείξτε ότι σχηματίζονται ισόπλευρα τρίγωνα.
6. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ είναι ίσα.
7. Τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΔΖ, ΓΕΖ είναι ίσα.
8. Δείξτε ότι η γωνία $\Delta\widehat{E}Z=180°$.
9. Τα ΑΘΕ, ΒΕΖ, ΓΖΗ, ΔΗΘ είναι ίσα ισοσκελή τρίγωνα και η γωνία $\Theta\widehat{E}Z=90°$.
10. Το τρίγωνο ΒΓΚ είναι ισοσκελές ορθογώνιο.
11. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες με κάθετες διαμέτρους.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Το ΕΗΖΘ είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους.
2. Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΖΒ.
3. Αν ΔΕ η διχοτόμος αποδείξτε ότι $A\widehat{\Delta}E=\Delta\widehat{E}A=45°$.
4. Αν ΚΛ και ΜΝ τα κάθετα τμήματα να θεωρήσετε ΑΕ//ΚΛ, ΒΖ//ΝΜ και αποδείξτε ότι ΑΕ=ΒΖ.
5. Αν ΖΜ και ΜΔ οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές τότε ΜΖ+ΜΔ=$υ_γ$.
6. Αν ΜΔ και ΜΖ οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές τότε ΜΔ–ΜΖ=$υ_β$.
7. Αν ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές τότε ΜΔ+ΜΕ+ΜΖ=υ.
8. α) Δείξτε ότι οι γωνίες του σχηματιζόμενου τετραπλεύρου είναι ορθές.

   β) Δύο διαγώνιοι ενώνουν μέσα πλευρών είναι παράλληλες προς κάθετες πλευρές άρα είναι κάθετες.
9. α) Οι γωνίες του σχηματιζόμενου τετραπλεύρου είναι ορθές.

   β) Δύο διαδοχικές πλευρές του σχηματιζόμενου ορθογωνίου είναι ίσες.
10. α) Οι γωνίες του ΒΔΑΓ είναι ορθές.

    β) Οι ΓΔ, ΑΒ διχοτομούνται και $\Delta\widehat{\Gamma}A=\Gamma'\widehat{A}x'$.

§ 5.3

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αποδείξτε ότι Ε και Ζ μέσα των ΔΖ και ΕΒ αντίστοιχα.
2. Αν Κ,Λ,Μ,Ν είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.
3. Να θεωρήσετε το μέσο Ζ της ΑΒ.
4. Οι ΜΕ και ΔΜ είναι διάμεσοι ορθογωνίου προς την

υποτείνουσα άρα ΕΜΔ ισοσκελές κλπ.

5. Τα Κ, Μ μέσα πλευρών του ορθογωνίου και ΑΛ διάμεσος.
6. Αν Κ, Λ οι προβολές των Δ, Ε το ΔΚΛΕ είναι παραλληλόγραμμο.
7. Θεωρούμε ΜΖ//ΒΕ κλπ.
8. Αποδείξτε ότι $ΔΜ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΕΖ = \frac{ΔΜ}{2}$ χρησιμοποιώντας μέσα.
9. Χρησιμοποιώντας μέσα αποδείξτε ότι δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες.
10. Αν Κ το σημείο τομής των ΕΜ και ΖΝ τότε $\widehat{Κ} = 90°$ ή $Ζ\widehat{Ε}Μ + Κ\widehat{Ζ}Ε = 90°$.
11. α) Το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο με κάθετες πλευρές άρα ορθογώνιο
    β) Παραλληλόγραμμο με διαδοχικές πλευρές ίσες.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Θεωρούμε την ΚΒ και δείχνουμε ότι ΑΛ⊥ΚΒ.
2. Δείξτε ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
3. Αν Ε,Ζ,Η,Θ τα μέσα των πλευρών τότε ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο. Χρησιμοποιώντας μέσα πλευρών δείξτε ότι K_1K_2//ΗΘ και
    $K_1 K_2$=2ΗΘ κλπ.όπου K_1, K_2, K_3, K_4 συμμετρικά του Κ.
4. Αν Μ μέσο της ΕΖ τότε ΜΔ=ΜΒ δηλαδή το Μ ανήκει στην μεσοκάθετο του ΒΔ που είναι η ΑΓ.
5. Τα Δ και Μ είνι μέσα πλευρών τριγώνου.
6. Να θεωρήσετε το μέσο Μ της ΑΒ οπότε $ΜΕ = \frac{ΒΔ}{2}$, $ΜΖ = \frac{ΑΓ}{2}$. Στη συνέχεια τριγωνική ανισότητα στο ΜΕΖ.
7. Είναι η ευθεία που ενώνει τα μέσα Λ, Κ των ΑΒ και ΑΓ.
8. Οι πλευρές του ζητούμενου θα είναι διπλάσιες από το μήκος που δημιουργούν τα τρία μη συνευθειακά σημεία.
9. Αν Μ μέσο της ΒΓ το ΑΒΜ είναι ισόπλευρο κλπ.
10. Κ, Μ, Λ μέσα οπότε $ΚΜ = \frac{ΕΓ}{2}$, $ΜΛ = \frac{ΒΗ}{2}$, ΕΓΑ, ΑΒΗ ίσα τρίγωνα κλπ.

§ 5.4

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αν η διχοτόμος της $\widehat{Γ}$ τέμνει την ΑΒ στο Ε η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\widehat{Δ}$.
2. Αν Ε μέσο της ΔΓ το ΑΒΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.
3. Τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΕΔΓ είναι ισοσκελή.
4. Αν Ο το κέντρο του ΑΒΓΔ και Κ η προβολή του στην (ε) τότε 2ΟΚ=ΒΕ+ΔΗ κλπ.
5. $\widehat{Α} = \widehat{Β} = 108°$ και $\widehat{Γ} = \widehat{Δ} = 72°$.
6. Αν Δ, Ε προβολές των Β,Γ στην (ε) τότε η ΑΜ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΒΔΕΓ.
7. Η ΚΚ΄ είναι διάμεσος τραπεζίων.
8. Χρησιμοποιήστε ισότητες τριγώνων.
9. Το ΓΔΔ΄Γ΄ ορθογώνιο και τα Δ΄ΔΑ, Γ΄ΓΒ ίσα ορθογώνια τρίγωνα.
10. Μ, Ν μέσα των μη παραλλήλων Κ, Λ μέσα των διαγωνίων.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αν οι διχοτόμοι των $\widehat{Β}$ και $\widehat{Α}$ τέμνουν την ΓΔ στα Ε και Ζ το ΚΛ είναι διάμεσος του ΒΑΕΖ.
2. Από το Μ θεωρούμε τις ΜΕ//ΑΔ και ΜΖ//ΒΓ.
3. Μέσα πλευρών τριγώνου και διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου.
4. Ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ που ενώνει μέσα διαγωνίων τραπεζίου.
5. Αν Κ το κέντρο του κύκλου και Μ μέσο της ΒΓ τότε ΚΜ⊥ΒΓ και $ΚΜ = \frac{ΑΔ}{2}$.
6. Αν Κ μέσο της ΑΔ τότε $ΚΜ = \frac{ΑΔ}{2}$ κλπ.

§ 5.5

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Τα Ζ και Ε είναι βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΔΓ και ΑΒΓ.
2. Να προβάλλετε στην ε και το μέσον Μ της ΒΘ.
3. Τα ΕΔ, ΓΑ είναι ύψη του ΒΕΓ άρα Ζ το ορθόκεντρό του.
4. Το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές άρα η διχοτόμος ΑΟ είναι μεσοκάθετος της ΖΕ.
5. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
6. Το Ο είναι βαρύκεντρο του ΑΒΓ και το Ε βαρύκεντρο του ΟΒΓ .
7. Δείξτε ότι ΜΒ//ΓΕ.
8. Το Μ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΓΔ.
9. Το Ζ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ.
10. α) ΚΛ//ΒΓ β) Οι διάμεσοι των δύο τριγώνων έχουν τους ίδιους φορείς.

11. Αν Θ το βαρύκεντρο του ΑΒΓ το ΒΘΓ είναι ισοσκελές τα τρίγωνα ΘΕΒ και ΘΔΓ είναι ίσα.
12. Είναι ο κύκλος $\left(M, \frac{\mu_\alpha}{3}\right)$ όπου Μ μέσο της ΒΓ.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Φέρνουμε ΗΘ//ΒΕ και αποδεικνύουμε ότι ΑΘ//ΖΗ.
2. $ZH = \frac{\Gamma K}{2} = KE$ και ΖΗ//ΚΕ.
3. Το Ε είναι έγκεντρο του ΟΔΓ και το Ι παράκεντρο του ΟΑΒ.
4. Αποδείξτε ότι το ΒΗΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Το τρίγωνο ΑΒΔ έχει ΑΒ=α, ΑΔ=γ, ΒΔ=δ άρα κατασκευάζεται.
2. Αν ΑΜ η διάμεσος το ΜΑΒ είναι ισοσκελές με ΜΑ=ΜΒ=μ_α και ΑΒ=γ άρα κατασκευάζεται.
3. Επειδή ΑΘ γνωστό άρα το μέσο Μ της ΒΓ είναι επίσης γνωστό σημείο αφού $\Theta M = \frac{1}{2}A\Theta$, η ΒΓ⊥ΟΜ και τα Α, Β, Γ σημεία του (Ο, ΟΑ).
4. Το ΘΒΓ κατασκευάζεται από τις πλευρές του (Θ βαρύκεντρο).
5. α) Προεκτείνουμε την ΒΔ κατά ΔΖ=ΔΑ τότε ΒΖ=δ+α οπότε το ΑΒΖ κατασκευάζεται διότι ΑΒ=α, ΒΖ=δ+α και $A\widehat{B}Z = 45°$.
β) Αν Μ μέσο της ΑΒ και ΜΚ=λ η απόσταση από την διαγώνιο ΒΔ τότε ΑΟ=2λ άρα ΑΓ=ΒΔ=4λ κλπ.
6. Θεωρούμε την βάση ΑΒ=μ και τις γωνίες $B\widehat{A}\times = \varphi$ και $A\widehat{B}\psi = \omega$. Αν ΒΕ=λ θεωρούμε ΕΔ//Βψ κλπ.
7. Οι κορυφές Δ, Γ θα βρίσκονται στην παράλληλη προς την ΑΒ σε απόσταση υ. Επίσης θα είναι σημεία πλευρών γνωστών γωνιών.
8. Η μικρή βάση προβάλεται στην μεγάλη και η θέση της προβολής καθορίζεται.
9. Αν ΓΕ//ΑΔ το ΓΕΒ κατασκευάζεται.
10. Θεωρούμε από το Γ παράλληλη προς την διαγώνιο ΔΒ, που τέμνει την βάση ΑΒ στο Ε. Το τρίγωνο ΓΑΕ κατασκευάζεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

§6.1

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. $\widehat{A} = 100°$, $\widehat{B} = 80°$, $\widehat{\Gamma} = 130°$, $\widehat{\Delta} = 50°$.
2. $B\widehat{O}\Gamma = 100°$, $B\widehat{M}\Gamma = 130°$.
3. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.
4. Να φέρετε τις ΑΓ και ΒΔ και να εκφράσετε τη $\widehat{B}$ σαν άθροισμα γωνιών.
5. Να δείξετε ότι ΕΛ//ΚΒ.
6. Δείξτε ότι $\Gamma\widehat{B}\Delta = 180°$.
7. ΣΜ διχοτόμος της $\widehat{\Sigma}$ και ΣΜ⊥ΑΓ.
8. Το ΟΜ είναι ύψος του ισοσκελούς ΑΟΒ.
9. Εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.
10. Να φέρετε την κοινή εφαπτομένη στο Α.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΓΜ και ΟΒΜ.
2. Στο ΜΔΕ οι προσκείμενες στη ΜΔ γωνίες είναι ίσες.
3. Δείξτε ότι $\Sigma\widehat{I}A = \Sigma\widehat{A}I$.
4. Το τρίγωνο ΓΝΒ είναι ορθογώνιο.
5. Να δείξετε ότι $\Gamma\widehat{A}\Delta = A\widehat{\Gamma}\Delta$.
6. Σχέση επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας.
7. ΚΛ//ΑΓ και ε//ΑΓ.
8. Γωνία χορδής και εφαπτομένης, εφαπτόμενα τμήματα.
9. Εκφράζουμε τη μια γωνία του ΜΒΔ σαν εξωτερική και την άλλη σαν άθροισμα γωνιών.

§6.2

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Σχηματίζονται εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.
2. Τα ΔΖΓΒ και ΓΗΕΒ είναι εγγεγραμμένα.
3. Το ΒΖΓΕ είναι επίσης εγγράψιμο.
4. Η ΒΕ φαίνεται από τις Γ και Δ με ίσες γωνίες.
5. Άθροισμα γωνιών τριγώνου.
6. Το ΑΒΔΚ είναι εγγράψιμο.
7. Το ΑΕΜΖ είναι εγγράψιμο.
8. Το ΒΖΓΕ είναι εγγράψιμο.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Στο ΑΚΒΛ η ΒΛ φαίνεται από τις Α και Κ με ίσες γωνίες.
2. Η προέκταση του ύψους ΑΕ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ζ. Το τρίγωνο ΒΗΖ είναι ισοσκελές, οπότε Ζ συμμετρικό του Η ως προς ΒΓ κλπ.
3. Στο ΑΕΓΟ η ΑΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Ο, Γ με ίσες γωνίες.
4. Η ΕΖ φαίνεται από τις κορυφές Α και Γ με ίσες γωνίες.

5. Οι γωνίες $\widehat{HMA}$ και $\widehat{HB\Gamma}$ είναι ίσες.
6. β) Δείξτε ότι ΟΖ⊥ΑΔ και επειδή ΑΓ διχοτόμος της $\widehat{BA\Delta}$ κλπ.
7. Το ΔΓΚΛ είναι εγγράψιμο διότι $\widehat{A\Gamma\Delta}=\widehat{\Delta\Lambda K}$.
8. Αν ΜΚ, ΜΛ, ΜΝ οι προβολές του Μ στις ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ δείξτε ότι η γωνία $\widehat{K\Lambda N}=180°$.

§ 6.3

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Η ΑΚ⊥ε προσδιορίζει το μέσο Κ της ζητούμενης χορδής.
2. Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων το ΟΔΓ κατασκευάζεται.
3. Η διάμετρος $B\Gamma=2\mu_\alpha$.
4. Είναι η μεσοπαράλληλος των ε_1 και ε_2.
5. ΚΜ//ΑΒ άρα $\widehat{KM\Gamma}=\widehat{A}$ άρα το Μ βλέπει το σταθερό τμήμα ΚΓ με σταθερή γωνία ω.
6. Είναι η διχοτόμος της $\widehat{xOy}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Η ΟΜ είναι επίσης σταθερή οπότε το Μ είναι σημείο του κύκλου (Ο,ΟΜ).
2. Αν Ι το έγκεντρο, τότε η $\widehat{BI\Gamma}=90°+\dfrac{\widehat{A}}{2}$ άρα είναι σταθερή και βλέπει το σταθερό τμήμα ΒΓ.
3. Η κορυφή Β βρίσκεται σε τόξο συγκεκριμένο.
4. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΔ κατά ΔΗ=ΔΘ (Θ. βαρύκεντρο). Το ΒΘΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.
5. Αν Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου το ισοσκελές ΟΒΓ κατασκευάζεται.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των ΑΔΖ και ΒΔΕ έχουν κοινά σημεία τα Δ, Μ, να δείξετε ότι ΓΕΜΖ εγγράψιμο.
2. α) Η ΓΔ είναι διάμετρος. β) ΑΔΒΗ παραλληλόγραμμο.
   γ) Ο, Μ μέσα των ΓΔ και ΒΓ.
3. Αν Η, Ο ορθόκεντρο και περίκεντρο η διάμεσος ΑΜ τέμνει την ΗΟ στο Θ. Δείξτε ότι είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.
4. Σχηματίζονται ορθογώνια παραλληλόγραμμα.
5. Οι ΒΖ και ΔΓ τέμνονται στο Μ. Δείξτε ότι $\widehat{AME}=180°$.
6. Η $\widehat{BH\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη σε σταθερό τόξο άρα είναι σταθερή. Αν ΒΔ και ΓΕ ύψη το ΗΕΑΔ είναι εγγράψιμο άρα η $\widehat{A}$ σταθερή και βλέπει τη χορδή ΒΓ.
7. Το ΑΗΟΖ είναι εγγράψιμο και επειδή ΗΟ=ΟΖ άρα ΑΟ διχοτόμος.
8. Η κάθετος ε από το Μ προς την ΑΒ και η ΑΓ τέμνονται στο Ζ. Η ευθεία ΒΔ τέμνει την ε έστω στο Ζ΄. Να δείξετε ότι τα Ζ και Ζ΄ συμπίπτουν.
9. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΑΔ είναι ίσα.
10. Να δείξετε ότι η ΑΖ είναι διχοτόμος της $\widehat{HAE}$.
11. Έχει ορθές γωνίες και ΗΕ=ΗΖ.
12. Αν Μ μέσο της ΓΑ η ΜΚ τέμνει τη ΒΔ στο Ν το ΟΜΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

§ 7.1 7.2

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. ΑΔ=6, ΓΕ=5.
2. Θεωρούμε από το Α τυχαία ημιευθεία Αx και παίρνουμε πάνω στην Αx τμήμα ΑΓ=α, ΓΔ=3α, ΔΕ=5α κλπ.
3. Να εφαρμόσετε δύο φορές το θεώρημα του Θαλή.
4. Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Θαλή.
5. Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Θαλή.
6. Να εφαρμόσετε δύο φορές το θεώρημα του Θαλή καθώς και το αντίστροφό του.
7. Όπως στην άσκηση 6.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Θεωρούμε ΔΖ//ΒΓ κλπ.
2. Να θεωρήσετε από το Α παράλληλη προς την ΓΖ που τέμνει την ΒΔ στο Η και την ΒΓ στο Θ και να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΓΕ.
3. Έχουμε $\dfrac{AE}{AZ}=\dfrac{\Delta E}{\Delta B}$ και $\dfrac{AE}{A\Theta}=\dfrac{BE}{B\Delta}$ κλπ.
4. Θεωρούμε ΔΗ//ΓΖ κλπ.
5. $\dfrac{PG}{PA}=\dfrac{1}{3}$ οπότε με θεώρημα Θαλή έχουμε κλπ.
6. Ισχύει $\dfrac{AG_1}{G_1M}=2$ και $\dfrac{AG_2}{G_2N}=2$.
7. Ισχυριστείτε ότι ΔΖ//ΒΕ και ΔΗ//ΕΓ.
9. Να φέρεται την κοινή εφαπτομένη στο σημείο Α.
10. Τα αποστήματα των ίσων χορδών είναι βάσεις τραπεζίου του οποίου η διάμεσος περνάει από το Α.

§ 7.3

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. ΔΑ=4cm και ΑΖ=20cm.
2. Η ΒΙ είναι εσωτερική διχοτόμος στο τρίγωνο ΑΒΔ.
3. Να στηριχτείτε στην προηγούμενη άσκηση 2Α.
4. Να αποδείξετει ότι $\frac{ΑΟ}{ΟΔ}=\frac{β+γ}{α}$ και πάρτε τριγωνική ανισότητα στο ΑΒΓ.
5. Να εφαρμόσετε 3 φορές το Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου.
6. Το Ε είναι έγκεντρο, άρα ΓΕ διχοτόμος.
7. Εφαρμόστε Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΔΜΕ.
8. $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ και $ΑΒ=\frac{ΒΓ}{2}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Πάρτε Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΜ και τριγωνική ανισότητα το ΑΒΓ.
2. Αποδείξτε ότι $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΑΔ}{ΔΓ}$ και ΔΓ=ΑΒ.
3. Οι ΟΔ και ΟΓ είναι διχοτόμοι του τριγώνου ΟΕΜ.
4. Αποδείξτε ότι η ΒΔ είναι εσωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΖ ($\widehat{ΑΒΔ}=\widehat{ΒΕΖ}$ και $\widehat{ΔΒΖ}=\widehat{ΒΕΖ}$) και η ΒΕ εξωτερική διχοτόμος.
5. Αποδείξτε ότι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΔΓ}$ και $\frac{ΑΕ}{ΕΔ}=\frac{ΒΑ}{ΒΔ}$.
6. Η ΕΜ είναι εσωτερική διχοτόμος στο τρίγωνο ΓΕΔ.
7. Να εφαρμόσετε το Θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ και στη συνέχεια το Θεώρημα του Θαλή.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Θεωρούμε τους λόγους $\frac{ΑΕ}{β}$, $\frac{ΑΕ}{γ}$. Επειδή ΔΕ//ΑΒ άρα Θεώρημα Θαλή κλπ.
2. Δύο φορές Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου και αντίστροφο Θεωρήματος Θαλή.
3. Οι $\widehat{ΒΑΜ}=\widehat{ΜΑΔ}$ άρα ΑΜ διχοτόμος κλπ.
4. α) $\frac{ΑΙ}{ΙΔ}=2$ β) Δείξτε ότι $\frac{AG}{GM}=\frac{ΑΙ}{ΙΔ}$ γ) Πρέπει να είναι ισόπλευρο.
5. ΔΕ διχοτόμος του ΒΔΓ και ΒΔ διχοτόμος του ΑΒΓ.
6. Θεώρημα διχοτόμων και αντίστροφο θεωρήματος Θαλή.
7. Αν Δ, Ε, Ζ συνευθειακά να θεωρήσετε από το Α την ΑΡ//ΔΕ. Για το αντίστροφο να θεωρήσετε ότι η ΔΖ τέμνει την ΒΓ στο Ε΄ και να καταλήξετε σε άτοπο.
8. Να δείξετε ότι $\frac{ΑΖ}{ΒΖ}=\frac{ΓΑ}{ΓΒ}$ χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα και Θεώρημα Θαλή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

§8.1

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Σχηματίζονται όμοια τρίγωνα αφού οι ακτίνες του ήλιου είναι παράλληλες.
2. Στις δύο διαφορετικές θέσεις της ράβδου έχουμε όμοια τρίγωνα.
3. Τα τρίγωνα παραμένουν όμοια άρα θα έχουν ίσες γωνίες.
4. ΄Εχουν ανάλογες πλευρές.
5. Τα ΑΔΕ και ΑΓΔ είναι όμοια.
6. Τα ΜΕΒ και ΜΓΔ είναι όμοια.
7. Τα ΜΗΒ και ΜΓΘ είναι όμοια.
8. Τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΒΓΖ έχουν κοινή τη $\widehat{Β}$ και ανάλογες τις πλευρές.
9. Τα ΒΓΔ και ΑΒΔ είναι όμοια.
10. Τα ΜΑΒ και ΜΔΓ είναι όμοια.
11. Τα ΔΑΖ και ΑΒΔ είναι όμοια.
12. Αν ΒΑΓ η τέμνουσα και Κ, Ο τα κέντρα των κύκλων τα ΚΑΒ και ΟΑΓ είναι όμοια.
13. Τα ΑΒΔ κα ΑΕΓ είναι όμοια καθώς και τα ΕΑΒ και ΕΒΔ.
14. Τα ΔΑΒ και ΔΓΑ είναι όμοια.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Τα ΕΑΒ και ΒΑΔ καθώς και τα ΕΑΓ και ΓΑΔ είναι όμοια.
2. Τα ΜΡΒ, ΜΓΔ καθώς και τα ΝΑΡ, ΝΓΔ είναι όμοια.
3. Δείξτε ότι ΒΕ·ΔΖ=ΑΒ·ΑΔ.
4. Αρκεί $\frac{ΑΕ}{ΕΔ}=\frac{ΑΖ}{ΔΖ}$. ΄Ομως ΕΑΒ, ΖΑΓ και ΔΕΒ, ΔΖΓ είναι όμοια.
5. α) Να θεωρήσετε τη διάμετρο ΜΝ. β) Να γράψετε τη διάμετρο ΑΡ. γ) Χρησιμοποιείστε τα α, β) ερωτήματα.
6. Να θεωρήσετε ΒΕ//ΑΔ και Β΄Ε΄//Α΄Δ΄ όπου ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄ τραπέζια με ΑΒ//ΓΔ κλπ.
7. Να δείξετε ότι έχουν και ανάλογες πλευρές.
8. Αν ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄ οι ρόμβοι και Ο, Ο΄ τα κέντρα τους, τότε ΟΑΒ, Ο΄Α΄Β΄ όμοια κλπ.

9. Να θεωρήσετε ΟΓ⊥ΔΕ και να δείξετε ότι $ΟΓ=\frac{ΑΒ}{2}$.

10. Να δείξετε ότι ΚΑ·ΚΒ=2ρR όπου ρ, R οι ακτίνες των κύκλων.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Αν ΑΔ η διχοτόμος της $\widehat{Α}$ τα ΔΑΓ και ΑΒΓ είναι όμοια. Ενώ επειδή ΑΔ διχοτόμος άρα $ΔΓ=\frac{αβ}{α+β}$ κλπ.
2. Τα ΟΓΖ και ΜΓΔ είναι όμοια ενώ ΜΕ διχοτόμος της $Δ\widehat{Μ}Γ$.
3. α) Τα ΒΓΖ και ΑΒΔ είναι όμοια. β) Στο ΑΗΒ ΕΖ//ΑΗ και Ζ μέσο ΑΒ.
4. Να προεκτείνετε την ΑΓ κατά ΑΕ=ΑΒ.
5. Αν κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΔΕ με $\widehat{Δ}=ω$ και $\widehat{Ε}=φ$, τότε αυτό θα είναι όμοιο με το ζητούμενο.
6. Αν ΑΒΓΔ το εγγράψιμο να θεωρήσετε τη ΒΕ (Ε εκ της ΑΓ) ώστε $Α\widehat{Β}Δ=Ε\widehat{Β}Γ$, τότε τα ΒΓΕ, ΒΔΑ είναι όμοια καθώς και τα ΑΒΕ και ΔΒΓ.
7. β) Αρκεί $\frac{ΚΒ}{ΚΓ}=\frac{ΔΒ}{ΔΓ}$. Όμως τα ΚΒΖ, ΚΓΛ είναι όμοια κλπ.
8. Αν ΟΓ το βάθος της σκηνής, τότε ΟΓ=8 m.
9. Η ΛΚ είναι διχοτόμος της $Γ\widehat{Κ}Α$ άρα κλπ.
10. Να δείξετε ότι $\frac{ΓΔ}{ΓΚ}=\frac{ΗΔ}{ΗΚ}$ όπου Κ το σημείο τομής των ΒΓ, ΔΕ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

§ 9.1

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αν ΑΔ το ύψος εφαρμόστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΒ.
2. Πυθαγόρειο Θεώρημα στα ΓΔΚ, ΔΚΒ, ΑΓΔ.
3. Αν Κ το σημείο τομής των μη παραλλήλων τα ΑΓΚ, ΒΔΚ, ΚΓΔ, ΑΒΚ είναι ορθογώνια.
4. Το τρίγωνο ΓΕΟ είναι ορθογώνιο.
5. Αν ΛΓ⊥ΚΑ το ΓΚΛ είναι ορθογώνιο τρίγωνο ενώ το ΓΛΒΑ ορθογώνιο.
6. Αν ΑΒ//ΓΔ εφαρμόζουμε το γενικευμένο Θεώρημα του Πυθαγόρα στα τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ.
7. Θεώρημα αμβλείας γωνίας στο ΖΑΔ οπότε x=7.
8. Το ΑΒΓ είναι οξυγώνιο άρα $α^2=β^2+γ^2-2β·ΑΔ$ οπότε....
9. Στο τρίγωνο ΔΑΒ $\widehat{Δ}>90°$.
10. 1^0 Θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ.
11. 1^0 Θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΔ.
12. $ΘΑ=\frac{2}{3}μ_α$ άρα $ΘΑ^2=\frac{4}{9}μ_α{}^2$.
13. 1^0 Θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΒΘΓ όπου Θ το βαρύκεντρο.
14. Αντικαταστήστε το $μ_α{}^2=\frac{2β^2+2γ^2-α^2}{4}$
15. 2^0 Θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΕΓ.
16. 2^0 Θεώρημα διαμέσων στα ΑΒΓ, ΜΒΓ.
17. $μ_α{}^2=\frac{2β^2+2γ^2-α^2}{4}$ όμοια $μ_β^2$, $μ_γ{}^2$ κλπ. οπότε $α=\frac{\sqrt{292}}{3}$, $β=\frac{\sqrt{208}}{3}$, $γ=\frac{10}{3}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Τα τρίγωνα ΓΕΟ και ΔΟΖ είναι ίσα.
2. Τα τρίγωνα ΔΑΟ και ΕΑΒ είναι ορθογώνια και τα ΔΓ, ΕΓ είναι ύψη τους.
3. Πυθαγόρειο Θεώρημα στα ΓΕΟ, ΓΑΟ, ΑΔΟ, ΓΒΑ.
4. Γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος στο ΑΒΓ αφού δείξουμε ότι $\widehat{Β}<90°$.
5. Τα Ε, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά, θεωρήστε το ύψος ΑΗ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και υπολογίστε ΑΔ, ΑΕ.
6. Η ΓΕ είναι το μισό της προβολής της ΑΓ στην ΓΒ.
7. Αν Η ορθόκεντρο τότε ΒΗ>ΒΕ και $Β\widehat{Η}Γ>90°$.
8. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα οξείας γωνίας στο ΟΚΒ όπου (Κ, x) ο ζητούμενος κύκλος.
9. Επειδή $\widehat{Β}<90°$ και $\widehat{Γ}<90°$. Εφαρμόστε το Θεώρημα οξείας γωνίας στο ΑΒΓ.
10. Αν $Α\widehat{Μ}Β<90°$ τότε $Α\widehat{Μ}Γ>90°$. Θεώρημα οξείας και αμβλείας γωνίας στα ΑΜΒ και ΑΜΓ αντίστοιχα.
11. Αν το Ρ ανήκει στην ΚΓ τότε $Β\widehat{Ρ}Α<90°$ οπότε Θεώρημα οξείας γωνίας στο ΑΒΡ.
12. $α^3>β^3$ άρα α>β ή $αβ^2>β^3$ κλπ/
13. Θεωρούμε το ύψος ΑΔ και την ΓΚ ώστε $Α\widehat{Γ}Κ=15°$. Τότε ΚΑΓ ισοσκελές με $Α\widehat{Κ}Γ>90°$.
14. Θεωρούμε Ο το μέσο του ΚΘ και εφαρμόζουμε το 1^0 Θεώρημα διαμέσων στα ΚΒΘ, ΑΒΔ, ΚΓΘ, ΑΓΔ.
15. Εφαρμόζουμε τη σχέση $β^2=α·ΓΔ$ κλπ στα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΒ, ΑΔΓ.
16. Η ΑΜ είναι η κοινή διάμεσος των ΑΒΓ και ΑΔΕ.

17. Αν ΑΒ//ΓΔ και Λ μέσο της ΓΔ φέρνουμε ΛΕ//ΔΑ και ΛΖ//ΓΒ και εφαρμόζουμε το 1^0 θεώρημα διαμέσων στο ΛΕΖ.
18. Από την σχέση $MA^2 – MB^2 = K^2$ παίρνουμε τελικά $MK^2 – M\Lambda^2 = \kappa^2 + R^2 – \rho^2$ και εφαρμόζουμε το 2^0 Θεώρημα διαμέσων στο ΜΚΛ.
19. Η ΜΟ είναι διάμεσος των τριγώνων ΜΑΓ και ΜΒΔ.

§ 9.2

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Η ΡΣ είναι εφαπτομένη ενώ οι ΡΑΒ, ΡΔΓ τέμνουσες του κύκλου.
2. Δύναμη εσωτερικού σημείου.
3. Δύναμη του σημείου Γ ως προς τον κύκλο.
4. Οι ΑΕΜ και ΓΕΒ είναι τέμνουσες κύκλου.
5. Χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα $\alpha\beta = \frac{1}{4}[(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2]$ για τα ΓΑ και ΓΒ.
6. Βλέπε πρόβλημα 9.10.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Δύναμη του σημείου Α ως προς τον κύκλο τον περιγεγραμμένο περι το ΒΓΕΔ.
2. Ισχύει ΒΕ·ΒΑ=ΒΔ·ΒΓ και ΑΔ διχοτόμος.
3. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα διχοτόμου και δύναμης των Β και Γ.
4. Αντίστροφο θεώρημα διχοτόμου και ΑΔ·ΑΓ=ΑΕ·ΑΒ.
5. Αν Ο το κέντρο του κύκλου τότε ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ οπότε το Ο είναι το περίκεντρο.
6. Αν Ζ το σημείο επαφής του κύκλου με την ΑΒ ισχύει ΑΖ=(τ–α) κλπ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Δείξτε ότι το ΖΗΕΔ είναι εγγράψιμο.
2. Το ΑΕΚΔ είναι εγγράψιμο οπότε η δύναμη του σημείου Β ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο και σχέση $\mu_\beta{}^2 = \dfrac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4}$ δίνουν την λύση.
3. Αν Ζ η τομή της ΑΔ με τον περιγεγραμμένο περί το τρίγωνο κύκλο τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΔΓ είναι όμοια.
4. Θεώρημα διαμέσων και δύναμη των σημείων Μ.
5. Αν Μ σημείο του τόπου τότε $MK^2 + M\Lambda^2$=σταθερό άρα ο ζητούμενος τόπος θα είναι κύκλος.
6. Αν Μ σημείο του τόπου τότε $MK^2 – M\Lambda^2$=σταθερό. Από το 2^0 Θεώρημα διαμέσων αποδεικνύεται ότι το Μ ανήκει σε ευθεία κάθετη επί της διακέντρου σε σταθερό σημείο.
7. Αν Μ σημείο του τόπου τότε ΜΟ σταθερό άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος (Ο, ΟΜ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

§ 10.1 10.2

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. $E_{AB\Gamma} = \dfrac{\beta\gamma\sqrt{3}}{4}$ β) $E_{AB\Gamma} = 18(\sqrt{3}+1)$ γ) $E_{AB\Gamma} = 24\sqrt{3}$.
2. $E_{AB\Gamma\Delta} = 384\sqrt{3}$
3. $E_{AB\Gamma} = \dfrac{24}{5}$
4. α=8, β=4
5. $E_{AB\Gamma\Delta} = 50\sqrt{3}$
6. $\upsilon = 3\sqrt{3}\kappa$ και $E = 12\sqrt{3}\kappa^2$
7. $E_{AB\Gamma\Delta} = 10\sqrt{2}$
8. Να θεωρήσετε το ύψος ΑΗ και να υποθέσετε ότι ΑΔ, ΑΕ είναι οι ζητούμενες.
9. Η ΑΔ είναι κοινή βάση τριγώνων με ίσα ύψη.
10. Σχηματίζονται παραλληλόγραμμα που οι διαγώνιές τους τα χωρίζουν σε ισοδύναμα τρίγωνα.
11. Βλέπε άσκηση 10.
12. Τα ΑΕΖΔ και ΖΓΒΕ είναι τραπέζια με ίσες διαστάσεις.
13. $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$ και $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.
14. $E_{AB\Gamma} = E_{ABI_\alpha} + E_{ABI_\alpha} - E_{B\Gamma I_\alpha} = \ldots$
15. Να εκφράσετε τα ρ, ρ_α, υ_α συναρτήσει του εμβαδού Ε και των πλευρών α,β, γ του τριγώνου.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. $E_{AB\Lambda K} = \frac{5}{7} E_{K\Lambda\Gamma\Delta}$
2. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΓΖ έχουν ίσες βάσεις και κοινό ύψος άρα κτλ.
3. Να θεωρήσετε την ΒΜ//ΑΔ τότε ΒΜΓ ισόπλευρο κλπ.
4. ΓΚ εφαπτομένη και ΓΒΕ τέμνουσα του κύκλου.
5. $E_{AB\Gamma\Delta} = 25$
6. Να θεωρήσετε από το Ε την Εx//ΒΓ.
7. Ε=1290, υ_α=60, R≈34, ρ=15.
8. Δείξτε ότι η μια διαγώνιος είναι ίση με την πλευρά του ρόμβου.

9. $E_{ΑΒΓΔ}=60$.
10. Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγεγραμμένο άρα ΑΔ+ΒΓ=ΑΒ+ΓΔ.
11. Οι διάμεσοι ΖΜ και ΕΝ χωρίζουν τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΕΔΓ σε ισοδύναμα τρίγωνα.
12. Αν Μ μέσο της ΒΕ το ΒΜΔ είναι επίσης ισόπλευρο πλευράς α.
13. Οι ΚΛ και ΚΜ τέμνουν την ΒΔ και Ρ και Ι. Τα τρίγωνα ΡΝΚ και ΡΛΒ καθώς και τα ΝΚΙ και ΜΔΙ είναι ίσα άρα και ισοδύναμα οπότε κλπ.
14. Αν ΑΒ<ΑΓ και το $E_{ΑΒΓ}$ είναι μέγιστο τότε αν Μ μέσο του μη κυρτού τόξου ΒΓ θα έχουμε $E_{ΜΒΓ}>E_{ΑΒΓ}$ άτοπο κλπ.
15. $x=MB=\frac{\alpha}{4}$.
16. Και το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι τότε σταθερό.

§ 10.3

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αν $υ_1$, $υ_2$ τα ύψη τότε $\frac{υ_1}{υ_2}=\frac{1}{8}$.
2. Αν ΑΔ το ύψος του ΑΒΓ που τέμνει την ΚΛ στο Μ τότε ΑΜ=ΜΔ κλπ.
3. Τα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν παραπληρωματικές γωνίες.
4. Να υπολογίσετε τα ΑΔ, ΒΔ, ΓΔ κλπ.
5. ΄Εχουν ίσες γωνίες και παραπληρωματικές γωνίες άρα θεώρημα 10.11.
6. Αν ΒΔ ύψος να εκφράσετε τα εμβαδά των τριγώνων συναρτήσει του ύψους ΒΔ.
7. α) Τα ΑΚΒ και ΑΛΓ έχουν κοινή την γωνία Α.
   β) Το ΑΛΡΚ είναι κοινό τμήμα των ισοδύναμων τριγώνων του ερωτήματος α.
8. Αν ΑΗ, ΓΖ κάθετες στη ΒΔ τότε ΑΗ=ΓΖ κλπ.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Τα ΟΖΕ και ΓΑΒ έχουν τις γωνίες Γ και Ο παραπληρωματικές άρα θεώρημα 10.11.
2. Επειδή ΕΖ//ΒΓ άρα $\frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\frac{2}{3}$ και τα ΑΕΖ και ΑΒΓ είναι όμοια κλπ.
3. Με την βοήθεια του Θεωρήματος 10.11 έχουμε $E_{ΓΕΖ}=4cm^2$,
   $E_{ΑΔΖ}=9cm^2$ και $E_{ΔΕΖ}=7cm^2$
4. Να θεωρήσετε τα ύψη του τριγώνου τότε $\frac{ΚΔ}{υ_α}=\frac{E_{ΚΓΒ}}{E_{ΑΒΓ}}$ κλπ.

5. $\widehat{ΓΙΒ}=135°$ και $\widehat{ΙΑΒ}=45°$ ενώ $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$ οπότε από το Θεώρημα 10.11 κλπ.
6. Τα τρίγωνα ΒΔΑ και ΓΒΑ είναι όμοια κλπ.

§ 10.4

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αν x η πλευρά του τετραγώνου τότε $x^2=α\cdotβ$ άρα x κατασκευάσιμο.
2. Η ζητούμενη πλευρά x είναι 4^n ανάλογος των υ και της διαμέσου ΚΛ του τραπεζίου.
3. Η πλευρά x του ισοσκελούς τριγώνου θα είναι η 4^n ανάλογος των β, γ.
4. Αν x, ψ οι διαστάσεις τότε $xψ=α^2$ και x+ψ=κ κλπ.
5. Αν ΔΝ η ζητούμενη τότε $\frac{E_{ΑΔΝ}}{E_{ΑΒΓ}}=\frac{1}{3}$ κλπ.
6. Αν ΓΕ η ζητούμενη τότε ΓΕ=ΚΛ όπου ΚΛ η διάμεσος.
7. Να θεωρήσετε ΑΚ//ΣΔ και ΒΛ//ΣΓ. Αν ΣΜ η ζητούμενη τότε Μ μέσο της ΚΛ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. α=10, Ε=24.
2. Αν Δ το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου και της ΒΓ τότε ΒΔ=τ-β, ΓΔ=τ-γ. Συγχρόνως δύναμη του Β είναι $ΒΔ^2$ κλπ.
3. Από το μέσο Μ μιας εκ των μη παραλλήλων θεωρούμε παράλληλη προς την άλλη του τέμνει τις παράλληλες στα Ε και Ζ. Το ΜΔΕ, ΜΑΖ ισοδύναμα κλπ.
4. Αν Μ, Κ, Λ τα σημεία επαφής του τριγώνου και του εγγεγραμμένου κύκλου τότε $\frac{E_{ΑΜΛ}}{E_{ΑΒΓ}}=\frac{1}{15}$ κλπ.
   Συγχρόνως ΑΒΓ ορθογώνιο με Ε=30 οπότε τελικά $E_{ΚΛΜ}=\frac{60}{13}$.
5. $\frac{E_{ΑΔΕ}}{E_{ΑΒΓ}}=\frac{1}{12}$ κλπ οπότε τελικά $E_{ΔΕΙΘΗΖ}=118$.
6. $\widehat{ΕΑΗ}=150°$, $\widehat{A}=30°$ άρα Θεώρημα 10.11 $\frac{E_{ΑΗΕ}}{E_{ΑΒΓ}}=...=1$ κλπ.
7. Επειδή $\widehat{ΒΑΖ}=\widehat{ΖΑΓ}$ άρα Θεώρημα 10.11 κλπ.
8. ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ διαδοχικοί γεωμετρικής προόδου άρα ΑΒ·ΔΑ=ΒΓ·ΓΔ, $\widehat{A}+\widehat{Γ}=180°$ άρα κλπ.
9. Θεώρημα 10.11 στα ΖΓΒ, ΙΒΑ κλπ.
10. Ισχύει $E_{ΑΒΓΔ}=E_{ΑΒΓ}+E_{ΑΓΔ}=E_{ΑΒΔ}+E_{ΒΔΓ}$. Συγχρόνως

$E_{ΑΒΓ} = \frac{α \cdot β \cdot ΑΓ}{4R}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

§ 11.1

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. α) $φ_{20}=162°$ β) $ν=40$ γ) $ν=15$ δ) δεν υπάρχει τέτοιο πολύγωνο.
2. Χρησιμοποιήστε τον τύπο $φ_ν = 180 - \frac{360}{ν}$.
3. Πρόκειται για κανονικό εξάγωνο οπότε $R=4$.
4. $ν=6$ οπότε $R=12$.
5. Χρησιμοποιήσετε τη σχέση $α_ν^2 + \frac{λ_ν^2}{4} = R^2$
6. $\frac{E}{E'} = \frac{\sqrt{3}}{4}$
7. $\frac{Π_{10}}{Π'_{10}} = \frac{4}{7}$ και $\frac{E_{10}}{E'_{10}} = \frac{16}{49}$
8. Τα ν-γωνα είναι όμοια οπότε κλπ.
9. $λ'_3 = 2\sqrt{3}R$ και $λ'_6 = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.
10. α) Αν $ΑΒ=λ_ν$, $ΔΕ=λ'_ν$, $α_ν=ΟΗ$ τα τρίγωνα ΗΟΒ, ΒΟΔ είναι όμοια.
β) $E'_6=2R^2\sqrt{3}$, $E'_3=3\sqrt{3}R^2$.
11. $E_{ΜΑΒ} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)R^2$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Με συγκρίσεις τριγώνων δείξετε ότι ΑΒ=ΒΓ και $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΒΓΔ}$ όπου ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ τυχαίες πλευρές του ν-γώνου.
2. Σχηματίζονται ίσα ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $λ'_6 = \frac{λ_3}{3}$ ενώ $\frac{E}{E'} = 3$.
3. ΒΕ·ΕΖ=ΑΕ·ΕΔ οπότε $ΕΖ = \frac{R\sqrt{10}}{10}$.
4. Το ΔΕ είναι εφαπτόμενο τμήμα, άρα $ΔΕ^2=ΔΒ \cdot ΔΑ$.
5. Η ΓΒ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΑΓΕ, $E_{ΑΓΕ}=2R^2$.
6. Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΜΓΝ.
7. α) $\widehat{ΑΒΓ} = 60°$, $\widehat{ΑΓΒ} = 45°$, β) $ΑΗ = \frac{R\sqrt{6}}{2}$,
γ) $ΒΓ = \frac{R}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$, δ) $E = \frac{R^2}{4}(\sqrt{3}+3)$.
8. α) Δείξτε ότι ΕΔ//ΑΓ.
β) Αν ΒΓ΄ η διχοτόμος της $\widehat{ΑΒΕ}$ δείξτε ότι $\widehat{Γ'ΒΓ} = 90°$.
γ) Αν Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ τα σημεία τομής των διαγωνίων, τότε $\widehat{ΡΚΛ} = 108°$ κλπ.
δ) Τα τρίγωνα ΜΒΓ και ΒΑΓ είναι όμοια.
9. Αν η ΟΒ τέμνει την ΑΔ στο Λ, τότε α) σχηματίζονται ισοσκελή τρίγωνα, άρα ΑΔ–ΑΒ=... β) τα τρίγωνα ΛΟΑ και ΟΑΔ είναι όμοια κλπ.
γ) $ΑΔ^2+ΑΒ^2=(ΑΔ-ΑΒ)^2+2ΑΔ \cdot ΑΒ=...$
10. $ΑΒ=λ_5$, Γ μέσο του τόξου ΑΒ, άρα $ΓΒ=λ_{10}$. Δείξτε ότι ΓΒ=ΓΕ.
11. Αν $ΑΒ=λ_ν$ και Γ μέσο του τόξου ΑΒ, τότε $ΑΓ=λ_{2ν}$ θα έχουμε $E_{2ν}=νE_{ΟΑΓΒ}$ κλπ.
12. Αν $ΑΒ=λ_ν$ και Γ μέσο του τόξου ΑΒ, τότε $ΑΓ=λ_{2ν}$, $ΟΚ=α_ν$, $ΟΔ=α_{2ν}$ Τα Ο, Δ είναι μέσα πλευρών τριγώνου κλπ.
13. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Αρχιμήδη. Οπότε $λ_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ και $α_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $E_8 = 2\sqrt{2}R^2$.
14. $E = 18(\sqrt{2}-1)$

§11.2

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Περίπου 640.
2. $S_{\overset{\frown}{ΓΔ}} = \frac{5π}{6}$
3. 20π.
4. Περίπου 1,04.
5. Το κέντρο των κύκλων είναι βαρύκεντρο του ισοπλεύρου τριγώνου οπότε $L = \frac{2πα\sqrt{3}}{3}$.
6. $L=12π$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αν Τ η ζητούμενη περίμετρος, τότε $T=π \cdot α$.
2. $T=π \cdot α$.
3. $S_{\overset{\frown}{ΑΒ}} = \frac{πR}{4}$, $S_{\overset{\frown}{ΒΓ}} = \frac{2πR}{3}$, $S_{\overset{\frown}{ΑΓ}} = \frac{13πR}{12}$
4. Επειδή $β+γ=2ρ+α$, άρα $ρ=1$ κλπ.
5. Αν (Κ,ρ) ο εφαπτόμενος κύκλος, Γ και Δ τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, τότε ΟΚ=R–ρ, $ΚΔ = ρ + \frac{R}{2}$ και $ΟΔ = \frac{R}{2}$ κλπ.
6. Αν Τ η περίμετρος, τότε $T = \frac{α(π+\sqrt{3}-1)}{2}$.

§11.3

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. $E=16(8-\pi)$.
2. $E=\frac{R^2}{2}(4-\pi)$
3. Αν ρ η ακτίνα του μικρού κύκλου, τότε $\rho=\alpha_4=\frac{R\sqrt{2}}{2}$.
4. $E=\frac{3\pi R^2}{8}$.
5. $E=2\alpha^2$.
6. Αν E_1, E_2, E_3 τα εμβαδά, τότε $E_3=E_2=\frac{\pi\alpha^2}{8}$ ενώ $E_1=\frac{4\alpha^2-\pi\alpha^2}{4}$
7. $E=\frac{2\sqrt{3}R^2-\pi R^2}{2}$ ενώ $T=\pi R$ όπου T η περίμετρος.
8. $E=\frac{\alpha^2}{2}(\pi-2)$.
9. $E_T=4R^2$, $\frac{E_1}{E_2}=4$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. $E=\frac{\alpha^2}{2}(2+\pi(\sqrt{2}-2))$.
2. $E=\frac{R^2}{6}(3\sqrt{3}-\pi)$.
3. $E=\frac{\alpha^2(\pi-3)}{24}$.
4. $E=\pi R^2(2\sqrt{3}-3)^2$.
5. $E=\frac{\pi-2}{8}R^2$.
6. $E=2\alpha^2(\pi-2)$.
7. $E=\frac{\sqrt{3}R^2}{2}$.
8. $E=\frac{R^2}{12}(3\sqrt{3}-\pi)$.
9. Βλέπε άσκηση 7Β $E=\frac{4\pi R^2}{3}$
10. $E=\frac{R^2}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Αν x,y οι ακτίνες των ζητούμενων κύκλων και E_1, E_2 τα εμβαδά αυτών τότε $E_1=\frac{1}{3}E$, $E_2=\frac{2}{3}E$ όπου E το εμβαδό του αρχικού κύκλου.
2. Αν $AB=\alpha$ και $AH=x$ τότε $AZ=x$, $ZH=x\sqrt{2}$ και $H\Theta=x\sqrt{2}$...
3. Ισχύει $E_{(\Delta MB\Gamma N\Delta)}=E_{\kappa\tau\mu(BE\Gamma)}+2[E_{B\Delta M}-E_{\kappa\tau\mu(\Delta\Theta M)}]$ οπότε τελικά $E_{(\Delta MB\Gamma N\Delta)}=\frac{3}{8}\alpha^2\sqrt{3}-\frac{1}{12}\alpha^2\sqrt{3}$.
4. Αν 2x και 2β τα μήκη των χορδών και y και α τα αποστήματά τους αντίστοιχα, έχουμε $\beta+x=y+\alpha$, $\alpha^2+\beta^2=R^2=x^2+y^2$.
5. Βλέπε άσκηση 8 Β΄ Ομάδας κεφαλαίου 11 παράγραφος 3.
6. Αν Κ η προβολή του Δ στην ΜΑ έχουμε $\Delta M\cdot\Delta A=MA\cdot\Delta K=MA\frac{\Delta E}{2}$...

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

§ 12.1

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Κοινά σημεία τους τα Α και Β.
2. Αν τα τρία σημεία ήταν συνευθειακά τότε και τα τέσσερα θα ήταν συνεπίπεδα άτοπο.
3. Οι κύκλοι έχουν κοινό κέντρο, άρα τα επίπεδά τους τέμνονται κατά ευθεία κλπ.
4. Αν δεν συνέτρεχαν θα όριζαν 3 σημεία, αναγκαστικά συνεπίπεδες.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Κάθε ένα από τα 10 αυτά επίπεδα τέμνει τα υπόλοιπα 9 κατά 9 το πολύ ευθείες.
2. Αν οι ευθείες ήταν συνεπίπεδες...
3. Έστω Α το σημείο τομής της ε με το Π. Θεωρούμε ευθεία δ που ανήκει στο Π, έστω δ//ε. Τότε, άτοπο.
4. Οι ευθείες ε,δ ορίζουν ένα επίπεδο Ρ.

§ 12.2

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αν ΑΜ ύψος του ΑΒΓ τότε $\Delta M\perp B\Gamma$.
2. Είναι τα παράλληλα επίπεδα σε απόσταση α από το δοθέν.
3. Χρησιμοποιήστε μέθοδο απαγωγής στο άτοπο.
4. Η ΜΕ είναι κάθετη στις ΓΔ και ΜΑ.
5. Αν το επίπεδο Ρ περιέχει την (ε) και τέμνει το (Π) σε ευθεία δ τότε δ//ε γιατί αν η (δ) τέμνει την (ε) τότε άτοπο.
6. Θεώρημα Θαλή.

7. Σχηματίζεται τετράπλευρο με δύο απέναντι γωνίες ορθές.
8. Να θεωρήσετε από το Α την $Ax//A_1B_1$.
9. Θεώρημα Θαλή.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Είναι η κάθετη στο Π στο περίκεντρο του τριγώνου.
2. Αν Α΄, Β΄ οι προβολές των Α και Β στην ε τότε να δείξετε ότι ΑΑ΄=ΒΒ΄. Προς τούτο να θεωρήσετε επίπεδο (Σ) κάθετο στην (ε) που ορίζει τις αντίστοιχες επίπεδες των διέδρων xOz, zOy, xOy και να προβάλλετε τα Α,Β στο (Σ).
3. Να φέρετε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ του ΑΒΓ. Δείξτε ότι Α΄Δ⊥ΒΓ και ότι η ευθεία των ορθόκεντρων ΗΗ΄ είναι ορθογώνια προς τις ΒΓ, ΑΒ.
4. Αποδείξτε ότι ΜΝ//ΑΒ και ΜΡ//ΑΓ άρα το επίπεδο των Μ,Ν,Ρ είναι παράλληλο στο (Π).
5. Θεώρημα Θαλή.
6. i) Αν ΑΓ, ΒΔ μη ασύμβατες τότε ορίζουν επίπεδο ΑΔΓΒ άτοπο.
   ii) ΒΔ είναι κάθετη στο επίπεδο (Α,Μ,Γ) άρα ΜΝ⊥ΒΔ, ενώ ΜΝ⊥ΑΓ κλπ.
7. i) Σύγκριση τριγώνων.
   ii) Οι ΟΔ, ΑΔ είναι κάθετες στην ΜΝ.
8. Να θεωρήσετε ευθεία η ⊥z στο σημείο Α του επιπέδου (Σ).
9. Με Πυθαγόρειο θεώρημα δείξτε ότι και το ΑΕΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.
10. Να θεωρήσετε $B\delta//\varepsilon_1$ και ΓΗ//ΑΒ και χρησιμοποιήστε Πυθαγόρειο θεώρημα.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. i) Δείξτε ότι ΕΖ//ΑΓ και ΒΔ//ΗΖ.
   ii) Θεωρούμε το μέσο Θ της ΑΔ και φέρνουμε την ΗΘ.
2. i) Θεωρήστε τις ε_1, ε_2 κατά τις οποίες το Σ τέμνει τα Π και Ρ τότε $\varepsilon_1//\varepsilon_2$.
   ii) Αν ω και φ οι γωνίες των διέδρων τότε ω=φ οπότε κλπ.
3. Φέρνουμε ευθεία Μx παράλληλη προς την ΑΒ.
4. i) Δείξτε ότι οι $O_1M\perp B\Gamma$ και $O_2M\perp B\Gamma$.
   ii) Δείξτε ότι $MN\perp O_1O_2$ και ΜΝ⊥ΒΓ.
5. i) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο τεμνόμενες ευθείες σε κάθε επίπεδο, οι οποίες είναι παράλληλες με αντίστοιχες στο άλλο επίπεδο.
   ii) Δείξτε ότι οι κορυφές του ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και ότι οι διαγώνιες διχοτομούνται.
6. Έστω Τ το κάθετο επίπεδο της ε στο Ο. Θεωρήστε τις προβολές των Α,Β,Σ στο Τ.
7. Πυθαγόρειο θεώρημα και θεώρημα 3 καθέτων.
8. Δείξτε ότι xy⊥(ΑΒ,Α΄Β΄) και xy⊥(ΑΒ, Α΄΄Β΄΄).
9. Εφαρμόστε το 2^o θεώρημα των διαμέσων.
10. Φέρνουμε την ΑΑ΄ κάθετη στο επίπεδο ρ και την Α΄Κ που τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ (Α΄Β<Α΄Γ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

§ 13.1

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. $\upsilon=10$ m, $E_{o\lambda}=468$ m^2, $V=540$ m^3.
2. Ε=72.
3. Επειδή $V=E_\beta\cdot\upsilon=E_\kappa\cdot\lambda$ άρα αρκεί $\dfrac{\upsilon^2}{\lambda^2}=\dfrac{3}{4}$.
4. $\alpha=4$, $\beta=8\sqrt{3}$.
5. $\alpha=12\sqrt{3}$, $\beta=6\sqrt{3}$, $\gamma=6$.
6. Να θεωρήσετε τριγωνικό πρίσμα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ και ένα επίπεδο ΔΔ΄Ε΄Ε παράλληλο στην ΒΒ΄Γ΄Γ κ.λ.π.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Οι ΚΛ, ΑΒ τέμνονται στο Σ, οι ΛΜ, ΒΓ τέμνονται στο Τ. Η ΣΤ είναι η τομή των επιπέδων (Κ,Λ,Μ) και ΑΒΓΔ. Με θεώρημα Θαλή $\Delta N=\dfrac{20}{3}$.
2. Είναι διάμεσοι τριγώνων και το σημείο τομής τους είναι το κέντρο βάρους.
3. $E_{o\lambda}=648\alpha^2$, $V=810\alpha^3$ βλέπε και άσκηση 1Α.
4. Αν Κ το κέντρο του παραλληλεπιπέδου και ΕΕ΄ το τμήμα με άκρα στις απέναντι έδρες διερχόμενο από το Κ. Με ίσα τρίγωνα δείξτε ότι ΚΕ=ΚΕ΄.
5. Να πάρετε μία κάθετη τομή του ΔΕΖ. Αν ΔΗ⊥ΕΖ το εμβαδό του ΔΕΖ είναι $\dfrac{1}{2}Z E\cdot\Delta H$ κ.λ.π.

§ 13.2

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. $E=64(1+\sqrt{3})$ cm^2, $V=256$ cm^3.
2. $\varepsilon\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $E=3R^2(\sqrt{3}+1)$, $V=R^3\sqrt{3}$.
3. Είναι 30°.
4. $E=9\sqrt{3}\alpha^2$, $V=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\alpha^3$.
5. Οι έδρες του τετραέδρου είναι ισόπλευρα τρίγωνα

$E_{ολ}=α^2\sqrt{3}$ ενώ $V=\frac{α^3\sqrt{2}}{12}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. $E=\frac{99}{4}$ και $V=\frac{21}{4}$.
2. Η τομή (ε) των (Σ,Α,Β) και (Σ,Δ,Γ) είναι ευθεία παράλληλη στις ΑΒ,ΓΔ ενώ η γωνία των επιπέδων αυτών είναι η $\widehat{ΜΣΝ}$ όπου ΣΜ, ΣΝ κάθετες στις ΑΒ, ΓΔ. Δείξτε ότι $\widehat{ΜΣΝ}=90°$.
3. $E=\frac{\sqrt{36V^2+α^6}}{α}+α^2$.
4. $V=324\sqrt{3}\cdot α^3$.
5. $E_{ολ}=\frac{1}{2}α^2(1+2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5})$.
6. Τα τρίγωνα της παράπλευρης επιφάνειας ανά δύο είναι ίσα.

§ 13.3-13.4-13.5

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. $V=63π\ m^3$.
2. Κ=36240 δρχ/ημέρα.
3. $V=240π$, $E_{ολ}=200π$.
4. Ο λόγος ομοιότητας προκύπτει από την ομοιότητα των ορθογωνίων.
5. $E_π=135π\ cm^2$.
6. $E_π=2π\sqrt{5}$.
7.
8. Είναι κόλουρος κώνος με $V=124π\ cm^3$ και $E_π=55π\ cm^2$.
9. $E_{σφ}=64π\ cm^2$.
10. Λάβετε υπ' όψιν το Πυθαγόρειο θεώρημα.
11. $V=3πα^3$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1. Αν V_1 ο όγκος που αντιστοιχεί στο κυρτογώνιο τόξο ΑΒ και V_2 ο υπόλοιπος τότε $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4π-3\sqrt{3}}{8π+3\sqrt{3}}$.
2. Το στερεό με το μικρό ύψος έχει μικρότερη επιφάνεια και όγκο.
3. Ο όγκος του στερεού είναι η διαφορά των όγκων που γράφεται με ακτίνα α+γ από αυτόν που γράφετε με ακτίνα γ.
4. Ο ζητούμενος όγκος είναι $V=81(4π-3\sqrt{3})$. Η τομή δημιουργεί όμοια τρίγωνα κ.λ.π.
5. Ο ζητούμενος όγκος είναι η διαφορά του όγκου ενός κόλουρου κώνου και ενός κυλίνδρου. ΄Ετσι $V=90π$ ενώ $E=48π$.
6. Αν Θ η τομή του παράλληλου επίπεδου (Ρ) και του ύψους του κώνου ΚΟ και Μ κοινό σημείο του επιπέδου Ρ και του κώνου, το ΘΜ είναι σταθερό.
7. Ο τόπος είναι σφαίρα (Κ,ΜΚ) όπου $MK=\frac{1}{4}\sqrt{2α^2-AB^2}$.
8. $R=10(\sqrt{5}-2)$.
9. $V=\frac{πR^3}{3}$ και $E=3πR^2$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 13ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Τα εφαπτόμενα επίπεδα ορίζονται από εφαπτόμενες στον κύλινδρο και γενέτειρες.
2. Αν ΑΒΓΔ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ το πρίσμα και οι διαγώνιοι Α΄Γ, Β΄Δ, Δ΄Β διέρχονται από το Κ δείξτε ότι και η διαγώνιος ΑΓ΄ διέρχεται από το Κ.
3. Να φέρετε τις διχοτόμους των γωνιών $\widehat{AMB}$ και της παραπληρωματικής της.
4. Με προσθαφαίρεση όγκων έχουμε $V=4πα^3$.
5. Ο όγκος και το εμβαδό του εγγεγραμμένου πρίσματος είναι $V=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\cdot υ$ και $E=5Rυ+\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.
6. Οι 3 κορυφές της βάσης ορίζουν σφαίρα κέντρου Κ. Πρέπει το Κ να απέχει από τις κορυφές ίση απόσταση.
7. $E=\frac{α^2}{2}(\sqrt{67}+\sqrt{3}+\sqrt{19})$.
8. Να θεωρήσετε μία τομή του κώνου (Κ,Α,Β) με επίπεδο που διέρχεται από το ύψος του ΚΗ. Το Ο είναι σημείο του ΚΗ, η ΚΓ⊥ΚΑ και ΓΚΟ, ΗΚΑ είναι όμοια κ.λ.π.
9. Να θεωρήσετε μία κάθετη τομή που διέρχεται από το ύψος της και τέμνει την βάση στα μέσα δύο απέναντι πλευρών.

Ευρετήριο όρων

Α

άθροισμα γωνιών 29
" ευθ. τμήματος19
αίτημα Ευκλείδιο 6
ακμή πρίσματος 347
άκρο ευθ. τμήματος 18
" τόξου 38
ακτίνα κανονικού πολυγώνου 288
" κύκλου 37
" σφαίρας 372
ακτίνιο 302
αμβλεία γωνία 27
αμβλυγώνιο τρίγωνο 53
αναλογία 186
ανάπτυγμα κώνου 369
άνισα ευθ. τμήματα 18
άνισες γωνίες 26
αντίστροφο 32
αξίωμα 16
αξίωμα παραλληλίας 107
αξιώματα επιπέδου 316
άξονας συμμετρίας 73
απαγωγή σε άτοπο 31
απόδειξη 31
απόσταση ασύμβατων ευθειών 333
" δύο σημείων 21
" παράλληλων επιπέδων 329
" σημείου από επίπεδο 328
" σημείου από ευθεία 28
απόστημα κανονικού πολυγώνου 288
" χορδής 61
αριθμός π 303
" φ 248
αρμονική τετράδα σημείων 197

Β

βαρύκεντρο τριγώνου 149
βάσεις τραπεζίου 143
βάση ισοσκελούς τριγώνου 54
" πρίσματος 347

Γ

γενέτειρα πρισματικής επιφάνειας 346
Γεωμετρία του χώρου 315
Γεωμετρία θεωρητική 12
Γεωμετρία πρακτική 12
γεωμετρική κατασκευή ριζών εξισώσεων 244
" κατασκευή στο χώρο 22
γεωμετρικής κατασκευής στάδια 92
γεωμετρικό σχήμα 16
γεωμετρικός τόπος 40, 68
γινόμενο αριθμού επί γωνία 30
" αριθμού με ευθ. τμήμα 20
γωνία 25
" απέναντι 54
" δίεδρη 330
" δύο επιπέδων 331
" δύο ευθειών στο χώρο 329
" εγγεγραμμένη σε κύκλο 157
" εξωτερική πολυγώνου 47
" επίκεντρη 38
" επίπεδη της δίεδρης 331
" εσωτερική πολυγώνου 47
" ευθείας και επιπέδου 330
" περιεχόμενη 54
" τρίεδρη 343
" υπό χορδής και εφαπτομένης 159
γωνίες διαδοχικές 29
" εντός εναλλάξ 106
" εντός και επί τα αυτά 106
" εντός, εκτός και επί τα αυτά 106
" εφεξής 29
" κατακορυφήν 30
" παραπληρωματικές 30
" προσκείμενες 54
" συμπληρωματικές 30
γωνιών σύγκριση 26

Δ

διαγώνιο επίπεδο πρίσματος 347
διαγώνιος πολυγώνου 47
" πρίσματος 347
διαίρεση ευθ. τμήματος από σημείο 187
διάμεσος τραπεζίου143
" τριγώνου 54
διάμετρος κύκλου 37
" σφαίρας 372
διαφορά γωνιών 29
" ευθύγραμμων τμημάτων 19
" τόξων 40
διχοτόμος γωνίας 27
" τριγώνου 54
δύναμη σημείου ως προς κύκλο 243

Ε

έγκεντρο τριγώνου 148
εμβαδό κανονικής πυραμίδας 358
" κόλουρου κώνου 368
" κυκλικού δίσκου 307
" κυκλικού τομέα 308
" κυλίνδρου 364
" κώνου 368
" παραλληλογράμμου 260
" σχήματος 258
" τετραγώνου 259

"   τραπεζίου 261
"   τριγώνου 262
εμβαδού αξιώματα 257
εξωτερικό γωνίας 25
"   σημείο κύκλου 37
επίπεδα κάθετα 331
επίπεδα παράλληλα 320
επίπεδο 15
"   μεσοκάθετο σε ευθ. τμήμα 334
"   μεσοπαράλληλο 335
εσωτερικό γωνίας 25
"   σημείο κύκλου 37
ευθεία 15
"   τμήμα, μηδενικό 18
"   τμήματα ασύμμετρα 185
ευθεία γωνία 26
"   διακεντρική κύκλου 86
"   εξωτερική σε κύκλο 85
"   εφαπτόμενη σε κύκλο 85
"   κάθετη σε επίπεδο 323
"   παράλληλη σε επίπεδο 326
"   πλάγια σε επίπεδο 330
"   τέμνουσα κύκλο 85
ευθείες ασύμβατες 319
ευθείες ορθογώνιες 329
"   παράλληλες 105

Η

ημιεπίπεδο 25
ημιευθεία 17

Θ

θεώρημα 31
θεώρημα 1ο διαμέσων 233
"   2ο των διαμέσων 233
"   διχοτόμων 195
"   Θαλή ειδική περίπτωση 189
"   Θαλή 188
"   "   για επίπεδα 327
"   Πυθαγόρειο 227
"   "   Αντίστροφο 227
θωρήματα Πάππου 374

Ι

ιδιότητες παραλληλογράμμου 123
ίσα τόξα 39
"   τρίγωνα 55
ίσες γωνίες 26
ισοδύναμα επίπεδα σχήματα 258
ισόπλευρο τρίγωνο 53
ισοσκελές τρίγωνο 53
ίχνος ευθ. τμήματος 78

Κ

κανονικά στερεά 378
κάθετες ευθείες 28
κατασκευή κανονικού πολυγώνου 290
"   προοπτική 209
"   τετάρτης αναλόγου 189
κατασκευή μέσης αναλόγου 228
κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου 288
κέντρο κανονικού πολυγώνου 288
"   κύκλου 37
"   συμμετρίας 72
"   σφαίρας 372
κόλουρος κώνος 367
κορυφές πολυγωνικής γραμμής 47
κορυφή γωνίας 25
"   πρίσματος 347
"   πυραμίδας 356
κριτήρια εγγραψιμότητας τετραπλεύρων 168
κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων 60
"   ισότητας τριγώνων 55
"   ομοιότητας τριγώνων 214
"   παραλληλογράμμων 124, 125
κύβος 348
κυκλικός δακτύλιος
"   δίσκος 37
κύκλοι εφαπτόμενοι εξωτερικά 89
"   εφαπτόμενοι εσωτερικά 89
"   εφαπτόμενοι 89
"   ομόκεντροι 89
"   τεμνόμενοι 89
κύκλος 37
κύκλος εγγεγραμμένος σε τρίγωνο 148
"   παρεγγεγραμμένος σε τρίγωνο 150
"   περιγεγραμμένος σε τρίγωνο 147
"   "   σε τετράπλευρο 167
"   του Απολλώνιου 198
κύλινδρος ορθός 363
κυρτή γωνία 26
κυρτό πολύγωνο 47
"   πολύεδρο 345
"   σύνολο 37
"   τόξο 38
κώνος 367

Λ

λήμμα 31
λόγος ευθύγραμμων τμημάτων 184
"   ομοιότητας 208

Μ

μέση ανάλογος 186
μεσοκάθετη ευθ. τμήματος 28
μετρική σχέση 225
μετρικές σχέσεις σε ορθογώνια τρίγωνα 226
"   σχέσεις σε τρίγωνα 225
μέτρο γωνίας 40
μη κυρτή γωνία 26
μη κυρτό πολύγωνο 47
"   "   τόξο 38
μηδενική γωνία 25
μήκος ευθ. τμήματος
"   κύκλου 301
"   τόξου 302
μοίρα 40

Ν

νόμος ημιτόνων 264

Ο

όγκος κόλουρης πυραμίδας 359
" κόλουρου κώνου 369
" κυλίνδρου 364
" κώνου 368
" πρίσματος 351
" πυραμίδας 359
" σφαίρας 375
οξεία γωνία 27
οξυγώνιο τρίγωνο 53
όμοια σχήματα 208
ορθή γωνία 27
ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο 348
" παραλληλόγραμμο 130
" τρίγωνο 53
ορθόκεντρο τριγώνου 148

Π

παραλληλεπίπεδο 347
παραλληλόγραμμο 123
παράκεντρο 149
παράπλευρη επιφάνεια κυλίνδρου 363
" επιφάνεια πρίσματος 347
παράπλευρο ύψος πυραμίδας 356
περιγεγραμμένη πυραμίδα σε κώνο 368
περίκεντρο τριγώνου 147
πλευρές γωνίας 25
πλήρης γωνία 25
πολυγωνικό χωρίο 47
πολύγωνο 47
πολύγωνο κανονικό 286
πολύεδρο 344
πόρισμα 31
πρίσμα 346
πρίσμα εγγεγραμμένο σε κύλινδρο 363
" κανονικό 347
" ορθό 347
πρισματική επιφάνεια 346
πρόβλημα της χρυσής τομής 245
προβολή σημείου σε επίπεδο 327
" ευθυγράμμου τμήματος σε ευθεία 78
" σημείου σε ευθεία 78
" σχήματος σε επίπεδο 328
προτάσεις 31
πυραμίδα 356
" κανονική 356

Ρ

ριζικός άξονας δύο κύκλων
ρόμβος 13

Σ

σημείο 15
σημεία αντιδιαμετρικά 37
σημείο επαφής ευθείας με κύκλο
" " κύκλων 89
σκαληνό τρίγωνο 53
συμμετρία αξονική 72
" κεντρική 71
συμμετρικά σημεία 19
συμμετρικό σημείου ως προς ευθεία 29
συμπεράσματα 32
σύνορο ημιχώρων
σφαίρα 372

Τ

τεθλασμένη γραμμή 46
τέταρτη ανάλογος 186
τεταρτοκύκλιο 38
τετραγωνισμός πολυγώνων 279
τετράγωνο 132
τόξο αντίστοιχο εγγεγραμμένης γωνίας 157
" επίκεντρης γωνίας 38
τραπέζιο 143
τραπέζιο ισοσκελές 144
τριγωνική ανισότητα 77
τρίεδρη γωνία 343
τύπος του Ήρωνα 263

Υ

υπόθεση 31
υποτείνουσα 54
ύψος κυλίνδρου 363
" πρίσματος 347
" τραπεζίου 143
" τριγώνου 55

Φ

φορέας ευθ. τμήματος 18

Χ

χορδή κύκλου 37
" σφαίρας 372