Κεφάλαιο 12

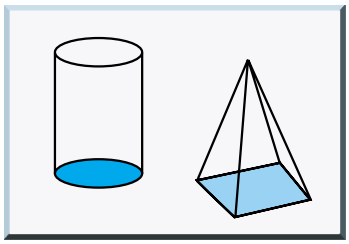
# ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

## 12.1 Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο

### *Εισαγωγή*

Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε μ' ένα τμήμα της Γεωμετρίας, την Επιπεδομετρία. Μελετήσαμε δηλαδή σχήματα που το καθένα έχει την ιδιότητα όλα του τα σημεία να ανήκουν σε ένα επίπεδο. Έτσι τα σχεδιάζαμε στο επίπεδο του πίνακα ή του βιβλίου ή του τετραδίου. Το ίδιο το επίπεδο το δεχθήκαμε σαν έννοια γνωστή από την εμπειρία μας και απλώς το περιγράψαμε με διάφορους τρόπους για καλύτερη κατανόηση π.χ. η ελεύθερη επιφάνεια ενός υγρού που ηρεμεί εφόσον δεν έχει πολύ μεγάλες διαστάσεις δίνει την έννοια του επιπέδου, ακόμη το επίπεδο μοιάζει με ένα "τεντωμένο" φύλλο χαρτιού απεριόριστων διαστάσεων.

Από την εμπειρία μας όμως είναι γνωστό ότι ο χώρος στον οποίο ζούμε περιέχει πολλά επίπεδα και επίπεδα σχήματα. Μερικά από αυτά είναι γεωμετρικά, όπως η πυραμίδα, ο κύλινδρος, ο κώνος, η σφαίρα κλπ. (γνωστά και από το Γυμνάσιο). Για τη μελέτη τέτοιων σχημάτων είναι απαραίτητο να "βγούμε" από το επίπεδο των δύο διαστάσεων και να "κινηθούμε" σ' όλο το τρισδιάστατο χώρο, που μας περιβάλλει.



Στο χώρο αυτό θα πρέπει πρώτα να δούμε πώς προσδιορίζεται η θέση ενός επιπέδου. Όπως έγινε και με τις ευθείες, έτσι και εδώ θα στηριχθούμε σε ορισμένα αξιώματα.

**Αξίωμα 12.1**

**Σε κάθε επίπεδο ανήκουν τουλάχιστον τρία μη συνευθειακά σημεία.**

**Αξίωμα 12.2**

**Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει σε δεδομένο επίπεδο.**

**Αξίωμα 12.3**

**Αν δύο σημεία μιας ευθείας ανήκουν σε ένα επίπεδο, τότε όλα της τα σημεία ανήκουν στο επίπεδο αυτό.**

**Αξίωμα 12.4**

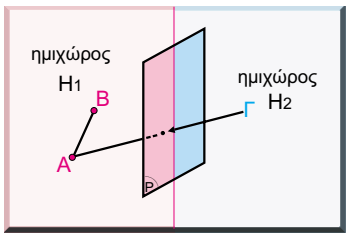
**Αν δύο επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο, τότε θα έχουν κοινή μία ευθεία που περιέχει το σημείο αυτό.**

**Αξίωμα 12.5**

**Από τρία μη συνευθειακά σημεία περνά ένα και μόνο ένα επίπεδο.**

**Αξίωμα 12.6**

**Κάθε επίπεδο χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη, που τα ονομάζουμε ημιχώρους, με τις εξής ιδιότητες:**
**i) Οι δύο ημιχώροι δεν έχουν κοινά σημεία εκτός του επιπέδου.**
**ii) Αν δύο σημεία Α και Β ανήκουν στον ίδιο ημιχώρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ δεν έχει κοινό σημείο με το επίπεδο.**
**iii) Αν δύο σημεία Α και Γ ανήκουν σε διαφορετικούς ημιχώρους, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει μόνο ένα κοινό σημείο με το επίπεδο.**



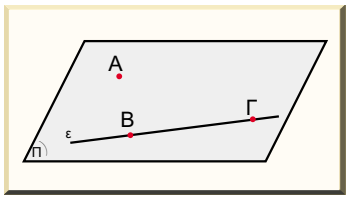

Στηριζόμενοι στα παραπάνω αξιώματα θα παρουσιάσουμε τρόπους καθορισμού των επιπέδων του χώρου.

**Θεώρημα 12.1**

**Μια ευθεία ε και ένα σημείο Α εκτός αυτής ορίζουν ένα και μόνο ένα επίπεδο.**

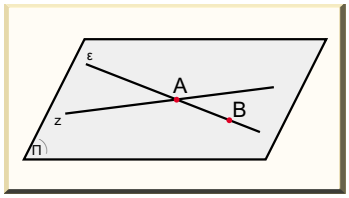
**Απόδειξη**

Αν θεωρήσουμε δύο σημεία Β και Γ της ευθείας ε, τότε τα Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά. Άρα ορίζουν ένα και μόνο ένα επίπεδο Π. Ακόμη όλα τα σημεία της ε ανήκουν στο Π, διότι δύο σημεία της ανήκουν σ' αυτό. ■




**Θεώρημα 12.2**

**Δύο τεμνόμενες ευθείες ε και z, ορίζουν ένα και μόνο ένα επίπεδο.**




**Απόδειξη**

Αν Α το κοινό σημείο των ευθειών ε και z και θεωρήσουμε ένα άλλο

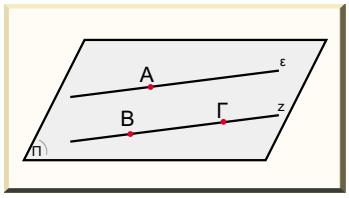
σημείο Β της ε, τότε: Η z και το Β ορίζουν ένα και μόνο ένα επίπεδο Π. Η ε ανήκει στο Π διότι ανήκουν σ' αυτό δυο της σημεία, τα Α και Β. ■

**Θεώρημα 12.3**

**Δύο παράλληλες ευθείες ε και z, ορίζουν ένα και μόνο ένα επίπεδο.**

**Απόδειξη**

Από τον ορισμό των παράλληλων ευθειών προκύπτει ότι αυτές ανήκουν σε ένα επίπεδο Π. Αν δεχθούμε ότι ανήκουν και σε ένα ακόμη επίπεδο Q, και θεωρήσουμε ένα σημείο Α της ευθείας ε και δύο σημεία Β και Γ της ευθείας z, τότε από τα μη συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ θα περνούν δύο επίπεδα τα Π και Q. Άτοπο. Άρα μόνο το επίπεδο Π ορίζεται και από τις δύο παράλληλες ε και z. ■




## Παρατηρήσεις

1) Στην επιπεδομετρία για το συμβολισμό ενός σχήματος επιλέξαμε να αναφέρουμε εκείνα τα στοιχεία που το προσδιορίζουν: αυτό συνεχίζεται και στη στερεομετρία. Γράφοντας (Α,Β,Γ) εννοούμε το επίπεδο που καθορίζουν τα μη συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ. Το επίπεδο που ορίζουν οι δυο ευθείες ε και z (παράλληλες ή τεμνόμενες) αναφέρεται ως επίπεδο (ε,z) και το επίπεδο που ορίζει η ευθεία ε και το εκτός αυτής σημείο Α αναφέρεται ως επίπεδο (ε,Α).
2) Όταν σχεδιάζουμε ένα στερεό σχήμα σ' ένα επίπεδο (π.χ. στον πίνακα), κατά κανόνα έχουμε οπτική αλλοίωση της μορφής του, π.χ. μια ορθή γωνία μπορεί να φαίνεται αμβλεία ή οξεία. Τα σχήματα τα σχεδιάζουμε πάντοτε σαν να τα "βλέπουμε" από άπειρη απόσταση. Επομένως οι παράλληλες ευθείες μπορεί να φαίνονται παράλληλες ή ταυτιζόμενες, οι τεμνόνες σαν τεμνόμενες ή ταυτιζόμενες. Τα σχετικά μήκη δύο τμημάτων διατηρούνται, αν αυτά είναι παράλληλα (π.χ. το μέσον ενός τμήματος πάντοτε φαίνεται στο μέσον ενός τμήματος). Ακόμη τα κοινά σημεία δύο σχημάτων φαίνονται πάντοτε σαν κοινά σημεία.
3) Απαραίτητη προϋπόθεση για τον προσδιορισμό ενός επίπεδου σχήματος είναι ο προσδιορισμός του επιπέδου στο οποίο ανήκει. Αυτό κυρίως φαίνεται στις κατασκευές. Π.χ. όταν σ' ένα πρόβλημα μας ενδιαφέρει η κατασκευή ενός κύκλου, απαιτείται όχι μόνο ο προσδιορισμός του κέντρου και της ακτίνας του αλλά και του επιπέδου στο οποίο αυτός ανήκει.

5) Ορισμένες από τις προτάσεις που γνωρίσαμε στην επιπεδομετρία δεν ισχύουν στη στερεομετρία. Π.χ. γνωρίζουμε ότι "δύο ευθείες α και β, αν είναι κάθετες στην ίδια ευθεία γ, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες". Αυτή η πρόταση δεν ισχύει στο χώρο. Υπάρχουν, βέβαια, και προτάσεις που ισχύουν, όπως τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

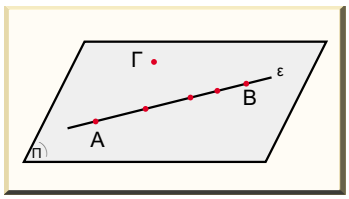
### *Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο*

Οι έννοιες σημείο, ευθεία και επίπεδο αποτελούν τα θεμελιώδη υλικά των σχημάτων του χώρου. Θα διερευνήσουμε τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο με τις προτάσεις που ακολουθούν.

### *Σημείο και επίπεδο:*

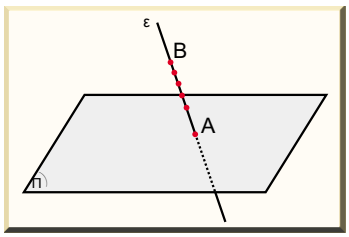
*Πόσα σημεία έχει ένα επίπεδο Π;*

Άπειρα. Πράγματι το επίπεδο Π περιέχει τουλάχιστον τρία σημεία Α, Β και Γ. Τα Α και Β ορίζουν ευθεία ε που ανήκει σ' αυτό. Η ευθεία ε έχει άπειρα σημεία που ανήκουν με τη σειρά τους στο επίπεδο Π.



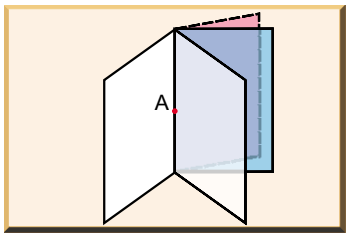

*Πόσα σημεία βρίσκονται εκτός επιπέδου Π;*

Άπειρα. Αν Α ένα σημείο του επιπέδου και Β ένα σημείο εκτός αυτού η ευθεία ΑΒ έχει μόνο το Α κοινό σημείο με το Π. (Αν είχε ακόμη ένα κοινό σημείο θα ανήκε ολόκληρη στο Π). Επομένως όλα τα άλλα σημεία της ε εκτός του Α δεν ανήκουν στο Π.




*Πόσα επίπεδα περνούν από ένα σημείο Α;*

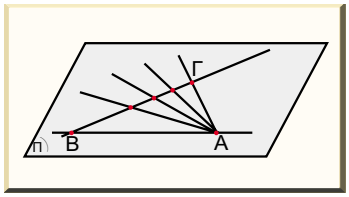
Άπειρα. Εποπτικά μπορούμε να δεχθούμε ότι από το Α περνά τουλάχιστον μια ευθεία και από την ευθεία αυτή περνούν άπειρα επίπεδα.




### *Ευθεία και επίπεδο*

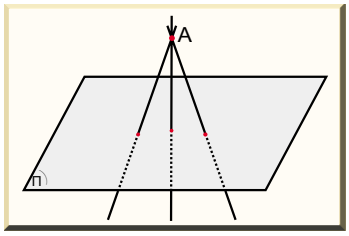
*Πόσες ευθείες έχει ένα επίπεδο Π;*

Άπειρες. Αυτό εξηγείται ως εξής. Αν Α, Β και Γ τρία μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου Π, τότε το Α με κάθε ένα από τα άπειρα σημεία της ευθείας ΒΓ ορίζει και μια ευθεία η οποία ανήκει στο Π.



*Πόσες ευθείες δεν περιέχονται σ' ένα επίπεδο Π;*

Άπειρες. Αν Α ένα σημείο εκτός του επιπέδου, αυτό με κάθε ένα από τα άπειρα σημεία του, ορίζει και μια ευθεία, που δεν ανήκει στο επίπεδο αυτό (αφού το σημείο Α δεν ανήκει σ' αυτό).



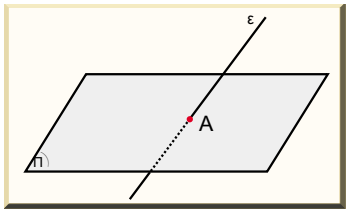

**Ορισμός**

**Μία ευθεία λέγεται τέμνουσα ενός επιπέδου όταν έχει με το επίπεδο μόνο ένα κοινό σημείο.**

Το κοινό σημείο της ευθείας ε και του επιπέδου ονομάζεται **τομή της ευθείας και του επιπέδου ή ίχνος της ευθείας στο επίπεδο**.

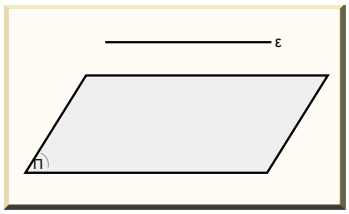
Υπάρχει άραγε ευθεία που δεν έχει κανένα κοινό σημείο με ένα επίπεδο;

Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν τέτοιες ευθείες.




**Ορισμός**

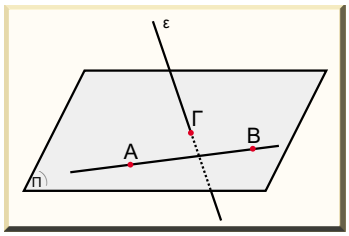
**Μία ευθεία ε καλείται παράλληλη με ένα επίπεδο Π όταν δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το Π, γράφουμε τότε (ε)//Π.**




### *Ευθεία και ευθεία:*

Στο σχήμα βλέπουμε ένα επίπεδο Π, τρία σημεία του Α, Β και Γ, που δεν είναι συνευθειακά και την ευθεία, που ορίζουν τα σημεία Α και Β. Ακόμη έχουμε και μια ευθεία ε, η οποία τέμνει το επίπεδο Π στο σημείο Γ.

Οι ευθείες ε και ΑΒ, αν ανήκαν σε ένα επίπεδο, αυτό θα έπρεπε να περιέχει τα σημεία Α, Β και Γ. Άρα θα έπρεπε το επίπεδο αυτό να είναι το Π. Η ευθεία ε, όμως, δεν ανήκει στο Π, άρα υπάρχουν ευθείες που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.




**Ορισμός**

**Δύο ευθείες ονομάζονται ασύμβατες όταν δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.**

### *Επίπεδο και επίπεδο:*

Είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο ότι δύο διαφορετικά επίπεδα, αν έχουν έστω και ένα κοινό σημείο, τότε θα έχουν κοινά όλα τα σημεία μιας ευθείας που περνά από το σημείο αυτό. Στην

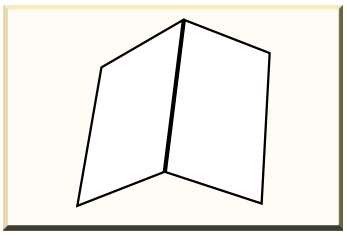
περίπτωση αυτή τα επίπεδα ονομάζονται **τεμνόμενα** και η κοινή τους ευθεία **τομή** αυτών.

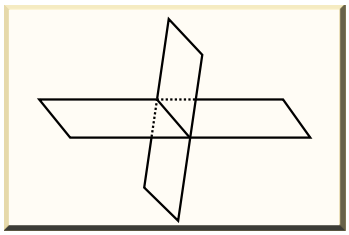
Υπάρχουν επίπεδα που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο; Υπάρχουν.

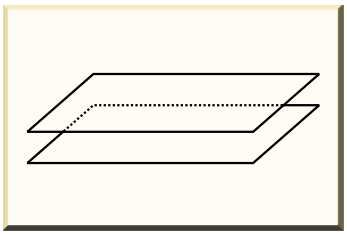
**Ορισμός**

**Δύο επίπεδα ονομάζονται παράλληλα, αν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.**

Στα δύο πρώτα σχήματα παρουσιάζουμε τεμνόμενα επίπεδα, στο τρίτο παράλληλα.





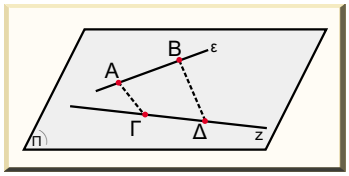


## 1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες ε και z και τα σημεία Α, Β της ε και Γ, Δ της z. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ είναι ασύμβατες.**

### Απόδειξη

Έστω ότι οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ δεν είναι ασύμβατες. Τότε θα ανήκουν σ' ένα επίπεδο Π. Στο επίπεδο Π θα ανήκουν και τα σημεία τους Α, Β, Γ και Δ. Επίσης, στο Π θα ανήκει και η ευθεία ε που ορίζεται από τα σημεία Α και Β, όπως επίσης και η ευθεία z που ορίζεται από τα σημεία Γ και Δ. Αυτό είναι άτοπο, διότι οι ευθείες ε και z είναι ασύμβατες. Οι ΑΓ και ΒΔ δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, άρα είναι ασύμβατες.



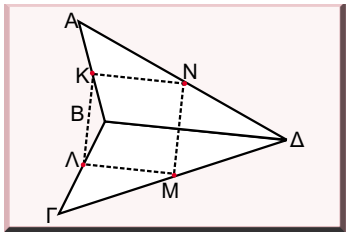

## 2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Δίνεται ένα τετράπλευρο του οποίου οι κορυφές δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο (στρεβλό τεράπλευρο). Να αποδείξετε ότι**

**τα μέσα των πλευρών του είναι κορυφές παραλληλογράμμου.**

### Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ το τετράπλευρο και Κ, Λ, Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Αν φέρουμε τη ΒΔ, στο τρίγωνο ΑΒΔ το τμήμα ΚΝ ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών, άρα θα είναι παράλληλο με το ΒΔ και ίσο με το μισό του. Για τον ίδιο λόγο στο τρίγωνο ΒΓΔ το τμήμα ΛΜ θα είναι παράλληλο με το ΒΔ και ίσο με το μισό του. Άρα ΚΝ//ΛΜ, οπότε το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι επίπεδο σχήμα. Ακόμη ΚΝ=ΛΜ, άρα το ΚΛΜΝ θα είναι παραλληλόγραμμο.

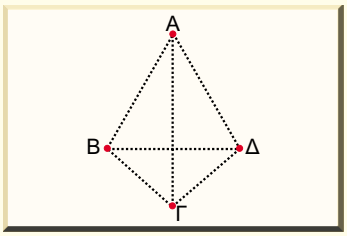



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

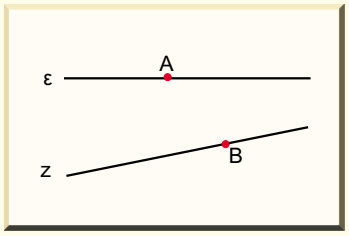
**1** Είναι δυνατόν η ευθεία ε να ανήκει στο επίπεδο Π, η ευθεία z στο επίπεδο Ρ και οι ευθείες ε και η να τέμνονται;

**2** Τρία επίπεδα τέμνονται ανά δυο χωρίς να περνούν από το ίδιο σημείο. Πόσες ευθείες ορίζουν;

**3** Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Πόσα ζευγάρια ασύμβατων ευθειών ορίζονται από τα σημεία αυτά;




**4** Οι ευθείες ε και z είναι ασύμβατες. Η ε και το σημείο Β ορίζουν ένα επίπεδο Π. Η z και το σημείο Α ορίζουν ένα επίπεδο Ρ. Να εξηγήσετε γιατί τα επίπεδα αυτά τέμνονται. Ποια είναι η τομή τους;




**5** Αν δύο ευθείες τέμνουν ένα επίπεδο, μπορεί να είναι παράλληλες, τεμνόμενες, ασύμβατες;

**6** Αν τέσσερα σημεία δεν είναι ομοεπίπεδα μπορεί τα τρία από αυτά να ανήκουν στην ίδια ευθεία;

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

**1** Δίνονται δύο ευθείες ε και z τεμνόμενες στο σημείο Α και ένα σημείο Β εκτός του επιπέδου τους. Να σχεδιάσετε την τομή του επιπέδου (ε,Β) με το επίπεδο (z,Β).

**2** Τέσσερα σημεία μη ομοεπίπεδα πόσα επίπεδα ορίζουν λαμβανόμενα νά τρία;

**3** Να αποδειχθεί ότι δύο ίσοι κύκλοι με κοινό κέντρο Ο που ανήκουν όμως σε διαφορετικά επίπεδα, έχουν μία μόνο κοινή διάμετρο.

**4** Αν τρεις ευθείες τέμνονται ανά δύο και δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, να δείξετε ότι διέρχονται από ένα σημείο.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

**1** Να αποδείξετε ότι 10 επίπεδα τέμνονται κατά 45 το πολύ ευθείες.

**2** Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Να δείξετε ότι αν οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι ασύμβατες, τότε είναι ασύμβατες και οι ευθείες: i) ΑΓ, ΒΔ καθώς και ii) ΑΔ, ΒΓ.

**3** Δίνεται επίπεδο Π που τέμνεται από ευθεία ε. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ευθεία του Π παράλληλη προς την ε.

**4** Θεωρούμε ένα επίπεδο Π. Στο Π ανήκουν η ευθεία ε και ένα σημείο Α. Από το Α φέρουμε ευθεία δ παράλληλη της ε. Να δείξετε ότι η δ ανήκει στο Π.

# 12.2 Η παραλληλία και η καθετότητα στο χώρο

Στο σχήμα έχουμε ένα επίπεδο Π και δυο ευθείες ε και z που το τέμνουν στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Ο τρόπος σχεδιασμού μας δίνει την αίσθηση μιας καθέτου (ορθής γωνίας) για την περίπτωση της ευθείας ε, πράγμα που δε συμβαίνει στην περίπτωση της z.

Για να μελετήσουμε τις περιπτώσεις ευθειών που τέμνουν ένα επίπεδο, όπως η ευθεία ε το Π, ξεκινάμε με τον ακόλουθο ορισμό.

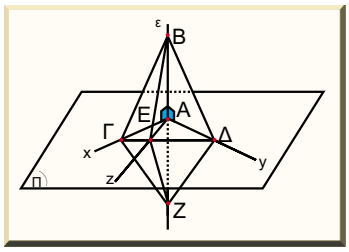
**Ορισμός**

**Μια ευθεία που τέμνει ένα επίπεδο λέγεται κάθετη σ' αυτό, όταν είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που περνά από το ίχνος της.**

**Θεώρημα 12.4**

**Αν μια ευθεία ε, που τέμνει ένα επίπεδο Π στο σημείο Α, είναι κάθετη σε δυο ευθείες του, που περνούν από το Α, τότε είναι κάθετη στο επίπεδο Π.**

**Απόδειξη**




Στο διπλανό σχήμα έστω Αx και Αψ οι δυο ευθείες του Π που είναι κάθετες στην ε. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ε είναι κάθετη σε τυχαία ευθεία Αz του επιπέδου Π.

Θεωρούμε δυο σημεία Β και Ζ της ε συμμετρικά ως προς το Α και δυο τυχαία σημεία Γ και Δ των Αx και Αψ αντίστοιχα.

Στο τρίγωνο ΒΓΖ το τμήμα ΓΑ είναι και διάμεσος και ύψος, άρα το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές άρα ΓΒ=ΓΖ. Ομοιοτρόπως στο τρίγωνο ΔΒΖ έχουμε ΔΒ=ΔΖ.

Τα τρίγωνα, ΒΓΔ και ΖΓΔ έχουν τη ΓΔ κοινή, τη ΒΓ=ΓΖ και τη ΔΒ=ΔΖ. Σύμφωνα με το κριτήριο (Π-Π-Π) θα είναι ίσα και $B\hat{\Gamma}\Delta = Z\hat{\Gamma}\Delta$.

Αν Ε το σημείο τομής της ΓΔ και Αz, τότε τα τρίγωνα ΒΓΕ και ΖΓΕ έχουν τη ΓΕ κοινή, τη ΓΒ=ΓΖ και $B\hat{\Gamma}E = Z\hat{\Gamma}E$. Σύμφωνα με το κριτήριο (Π-Γ-Π), τα τρίγωνα θα είναι ίσα, άρα ΒΕ=ΖΕ. Το τρίγωνο ΒΕΖ επομένως είναι ισοσκελές. Η ΕΑ είναι διάμεσος, άρα θα είναι και ύψος. Δηλαδή, ΒΑ⊥ΕΑ ή ΒΑ⊥ΑΖ. ■

Ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της στερεομετρίας που ανήκει στα θεωρήματα της καθετότητας είναι το τριπλό θεώρημα που ακολουθεί, γνωστό και σαν **θεώρημα των τριών καθέτων**.

**Θεώρημα 12.5**

**Έστω ένα επίπεδο Π, μια ευθεία ε αυτού, μια ακόμη ευθεία z, που τέμνει το Π σε σημείο Β εκτός της ε και Α ένα σημείο της z. Τότε**

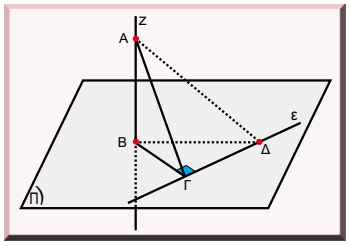
**I. Αν z⊥Π και ΒΓ⊥ε τότε ΑΓ⊥ε.**

**II. Αν z⊥Π και ΑΓ⊥ε τότε ΒΓ⊥ε.**

**III. Αν ΑΓ⊥ε, ΒΓ⊥ε και ΑΒ⊥ΒΓ τότε ΑΒ⊥Π**

**Απόδειξη**

Θεωρούμε ένα άλλο σημείο Δ της ε.




I. Αφού z⊥Π θα έχουμε ΑΒ⊥ΒΔ και ΑΒ⊥ΒΓ. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΒΓ και ΒΓΔ παίρνουμε

$A\Delta^2 = AB^2 + B\Delta^2$ (1)

$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ (2)

$B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$ (3)

Από τη σχέση (1) έχουμε διαδοχικά

$$A\Delta^2 = AB^2 + B\Delta^2 \overset{(3)}{=} AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 \overset{(2)}{=} A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$$

δηλαδή, το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με ΑΓ⊥ΓΔ.

II. Από την υπόθεση προκύπτει ότι ισχύουν οι σχέσεις (1), (2) και η

$A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$ (4)

Συνδυάζοντας αυτές παίρνουμε τη σχέση $B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$, από την οποία προκύπτει ότι ΒΓ⊥(ε).

III. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η z είναι κάθετη σε μια ακόμη (εκτός από τη ΒΓ) ευθεία του Π.

Από την υπόθεση προκύπτει ότι ισχύουν οι σχέσεις (4), (3) και (2). Συνδυάζοντας αυτές προκύπτει η (1), από την οποία συμπεραίνουμε ότι η z είναι κάθετη και στη ΒΔ, άρα κάθετη στο Π.

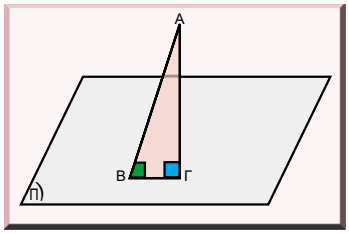
Η περίπτωση III του θεωρήματος των τριών ευθειών μας εξασφαλίζει τη δυνατότητα κατασκευής ευθείας κάθετης σε επίπεδο από σημείο εκτός αυτού. ■

Θα κλείσουμε την ενότητα "καθετότητα ευθείας και επιπέδου" με τρεις ακόμη προτάσεις.

**Θεώρημα 12.6**

**Από σημείο Α εκτός επιπέδου Π περνά μια μόνο ευθεία κάθετη στο Π.**

**Απόδειξη**




Το θεώρημα των τριών καθέτων μας εξασφαλίζει την κατασκευή μιας κάθετης και θα αποδείξουμε τη μοναδικότητά της.

Έστω ότι υπάρχουν δυο κάθετες από το Α, οι ΑΒ και ΑΓ. Τότε ΑΒ⊥ΒΓ και ΑΓ⊥ΒΓ. Δηλαδή, το τρίγωνο ΑΒΓ θα είχε δυο ορθές γωνίες. Πράγμα άτοπο. ■

**Πόρισμα 12.1**

**Από σημείο Α ενός επιπέδου Π περνά μια μόνο ευθεία κάθετη στο Π.**

**Πόρισμα 12.2**

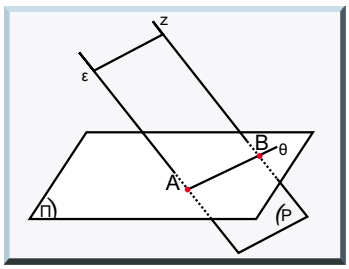
**Σε κάθε σημείο μιας ευθείας υπάρχει μόνο ένα επίπεδο κάθετο σ' αυτήν.**

### *Παράλληλες ευθείες στο χώρο*

**Θεώρημα 12.7**

**Αν δυο ευθείες ε και z είναι παράλληλες και ένα επίπεδο Π τέμνει τη μια απ' αυτές, τότε θα τέμνει και την άλλη.**

**Απόδειξη**




Έστω ότι το επίπεδο Π τέμνει την ε στο σημείο Α. Θα δείξουμε ότι θα τέμνει και τη z. Οι ευθείες ε και z σαν παράλληλες ορίζουν επίπεδο Ρ, το οποίο τέμνει το Π κατά ευθεία θ, που περνά από το Α. Οι τρεις ευθείες ε, z και θ είναι ομοεπίπεδες, η θ τέμνει την ε στο σημείο Α, άρα θα τέμνει και την παράλληλή της, z σε κάποιο σημείο Β. Αυτό το σημείο ανήκει στη θ, η θ ανήκει στο Π, άρα και το Β ανήκει στο Π. Είναι επομένως κοινό σημείο της ευθείας z και του επιπέδου Π. ■

Δύο ακόμη θεωρήματα σχετικά με την παραλληλία ευθειών είναι τα παρακάτω, που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

**Θεώρημα 12.8**

**Αν δυο ευθείες ε και η είναι παράλληλες και ένα επίπεδο Π τέμνει τη μία κάθετα, θα τέμνει και την άλλη κάθετα.**

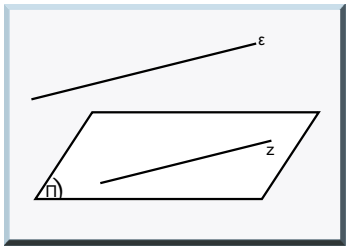
**Θεώρημα 12.9**

**Αν δυο ευθείες ε και η είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο Π, τότε θα είναι μεταξύ τους παράλληλες.**

### *Παραλληλία ευθειών και επιπέδων*

**Θεώρημα 12.10**

**Αν μια ευθεία ε είναι παράλληλη με μια ευθεία z ενός επιπέδου Π και δεν ανήκει σ' αυτό, τότε θα είναι παράλληλη με το επίπεδο Π.**




**Απόδειξη**

Αν η ε έτεμνε το Π σε σημείο εκτός της z θα ήταν ασύμβατη με τη z. Αυτό είναι άτοπο γιατί η ε είναι παράλληλη με τη z κι επομένως δεν τέμνει ούτε τη z. Άρα, η ε δεν τέμνει το Π, ούτε ανήκει σ' αυτό. Είναι επομένως παράλληλη με το επίπεδο Π. ■

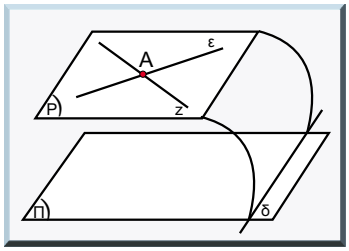
### *Παραλληλία επιπέδων*

**Θεώρημα 12.11**

**Αν δύο τεμνόμενες ευθείες ε και z είναι παράλληλες προς ένα επίπεδο Π, τότε το επίπεδο Ρ που ορίζουν οι ε και z είναι παράλληλο με το Π.**

**Απόδειξη**

Έστω ότι τα επίπεδα Π και Ρ τέμνονται κατά ευθεία δ. Από το κοινό σημείο Α των ευθειών ε και z δε θα μπορούσαν να υπάρχουν δυο παράλληλες προς τη δ. Άρα, τουλάχιστον μία από τις ευθείες ε και z θα έτεμνε τη δ σε κάποιο σημείο Β, που θα ήταν κοινό σημείο αυτής και του επιπέδου Π, επομένως και κοινό σημείο των επιπέδων Π και Ρ. Αυτό είναι άτοπο. Άρα, τα επίπεδα Π και Ρ είναι παράλληλα. ■




Σχετικά με τα παράλληλα επίπεδα είναι και τα θεωρήματα που ακολουθούν, μερικά από τα οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

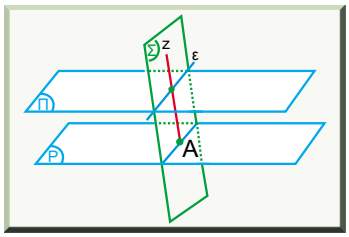
**Θεώρημα 12.12**

**Αν δύο επίπεδα Π και Ρ είναι παράλληλα και ένα επίπεδο Σ τέμνει το ένα απ' αυτά, θα τέμνει και το άλλο.**

**Απόδειξη**

Έστω ότι το επίπεδο Σ τέμνει το Π κατά ευθεία ε. Φέρουμε ευθεία z του επιπέδου Σ που να τέμνει την ε, άρα θα τέμνει και το επίπεδο Π, άρα και το Ρ που είναι παράλληλο με το Π, σε κάποιο σημείο Α. Το σημείο Α ανήκει στο Ρ, ανήκει και στην z, η οποία όμως ανήκει στο Σ, άρα το Α ανήκει και στο επίπεδο Σ.

Τα επίπεδα Σ και Ρ έχουν κοινό σημείο το Α, άρα τέμνονται. ■



**Οι τομές δύο παράλληλων επιπέδων Π και Ρ από τρίτο επίπεδο Σ είναι μεταξύ τους παράλληλες.**

**Αν δύο επίπεδα Π και Ρ είναι κάθετα σε μία ευθεία ε, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλα.**

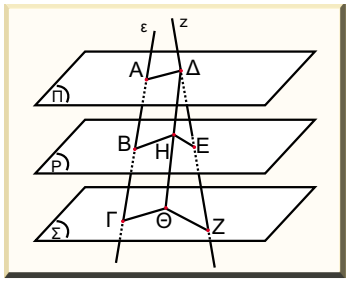
**Θεώρημα 12.13**

*Θεώρημα του Θαλή για επίπεδα*

**Αν τρία παράλληλα επίπεδα Π, Ρ και Σ τέμνονται από δυο ευθείες ε και z στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, τα μεταξύ των επιπέδων τμήματα των ευθειών αυτών είναι ανάλογα. Δηλαδή ισχύει $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΔΕ}{ΕΖ}$.**

**Απόδειξη**

Από το Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ε η οποία τέμνει τα επίπεδα Ρ και Σ στα σημεία Η και Θ αντίστοιχα. Οι ΗΕ και ΘΖ είναι παράλληλες διότι είναι τομές των παράλληλων επιπέδων Ρ και Σ από το επίπεδο (Δ,Θ,Ζ).




Με τέμνουσες τις ΔΘ και ΔΖ και παράλληλες τις ΗΕ και ΘΖ από το θεώρημα του Θαλή στην επιπεδομετρία θα πάρουμε

$$\frac{ΔΗ}{ΗΘ}=\frac{ΔΕ}{ΕΖ} \qquad (1)$$

Όμως, από τα παραλληλόγραμμα ΑΔΗΒ και ΒΓΘΗ θα έχουμε ότι ΔΗ=ΑΒ και ΗΘ=ΒΓ, οπότε η σχέση (1) θα πάρει τη μορφή

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΔΕ}{ΕΖ}$$

■

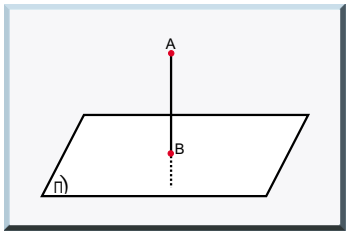
## *ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ*

Όπως ορίστηκαν οι προβολές σχήματος σε ευθεία με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η προβολή ενός σχήματος σε επίπεδο.

Συνοπτικά αναφέρουμε τα εξής:

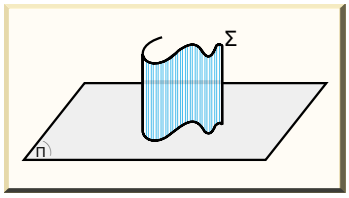
**Ορισμός**

**Προβολή σημείου Α σε επίπεδο Π ονομάζουμε το ίχνος Β του κάθετου τμήματος ΑΒ που φέρουμε από το Α προς το επίπεδο Π.**

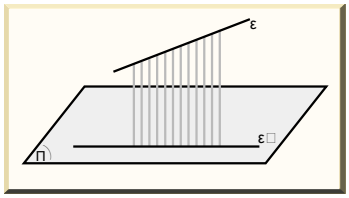


**Ορισμός**

**Προβολή σχήματος Σ σε επίπεδο Π ονομάζουμε το σύνολο των προβολών των σημείων του Σ πάνω στο Π.**



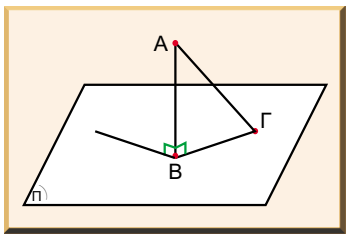

**Η προβολή μιας ευθείας ε σε ένα επίπεδο Π, που να μην είναι κάθετη σ' αυτό είναι η ευθεία ε΄.**




### *Απόσταση σημείου από επίπεδο*

**Ορισμός**

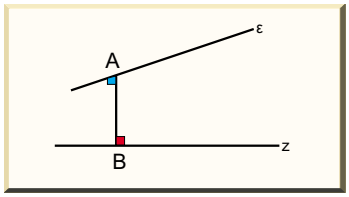
**Απόσταση σημείου Α από επίπεδο Π καλούμε το μήκος του κάθετου τμήματος ΑΒ που φέρουμε από το Α προς το επίπεδο Π. Η απόσταση αυτή συμβολίζεται d(Α,Π).**




Για κάθε άλλο σημείο Γ του Π λόγω του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει d(Α,Π)<ΑΓ.

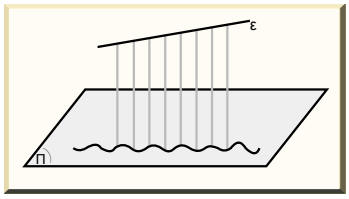
### *Απόσταση ασύμβατων ευθειών*

Για δύο ασύμβατες ευθείες (εφαρμογή 1, § 12.1) αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένα μόνο ευθύγραμμο τμήμα, που τις τέμνει και τις δύο κάθετα. Αυτό το τμήμα είναι μικρότερο από κάθε άλλο τμήμα που έχει τα άκρα του πάνω σ' αυτές και καλείται **ελάχιστη απόσταση** των ασύμβατων ευθειών.




### *Απόσταση ευθείας και επιπέδου παράλληλου προς αυτήν.*

**Αν μια ευθεία ε είναι παράλληλη με ένα επίπεδο Π, τότε όλα της τα σημεία της ισαπέχουν από το Π.**




**Ορισμός**

**Απόσταση ευθείας ε από επίπεδο Π παράλληλο προς αυτήν ονομάζουμε την απόσταση οποιουδήποτε σημείου της από το επίπεδο αυτό. Η απόσταση αυτή συμβολίζεται d(ε,Π).**

### *Απόσταση δυο παράλληλων επιπέδων*

**Αν δύο επίπεδα Π και Ρ είναι παράλληλα, τα σημεία του ενός ισαπέχουν από το άλλο.**

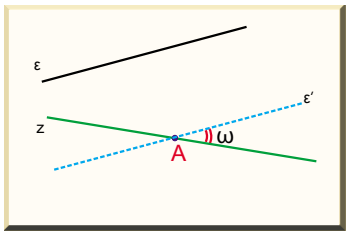
**Ορισμός**

**Απόσταση δύο παράλληλων επιπέδων Π και Ρ ονομάζουμε την απόσταση οποιουδήποτε σημείου του ενός από το άλλο. Την απόσταση αυτή τη συμβολίζουμε d(Π,Ρ).**

## *ΓΩΝΙΕΣ*

### *Γωνία ασύμβατων ευθειών*

Θεωρούμε δυο ασύμβατες ευθείες ε και z. Αν από ένα σημείο Α της μιας έστω της z, φέρουμε μια ευθεία ε΄ παράλληλη της ε, η γωνία των τεμνόμενων ευθειών ε΄ και z ονομάζεται γωνία των ασύμβατων ευθειών ε και z.




- Προφανώς η γωνία αυτή είναι ανεξάρτητη από το σημείο Α και από την ευθεία πάνω στην οποία το επιλέγουμε.
- Αν η γωνία δυο ασύμβατων ευθειών είναι ορθή, οι ευθείες ονομάζονται **ορθογώνιες**. Γενικότερα ορθογώνιες ονομάζουμε δυο ευθείες, όταν είναι ασύμβατες ορθογώνιες ή κάθετες τεμνόμενες.

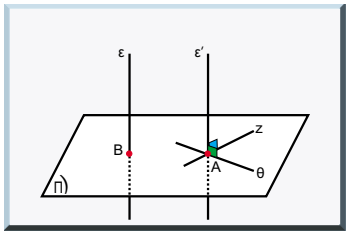
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το θεώρημα 12.4 επεκτείνεται στο θεώρημα.

**Θεώρημα 12.14**

**Αν μία ευθεία ε είναι ορθογώνια με δύο τεμνόμενες ευθείες z και θ ενός επιπέδου Π, τότε είναι κάθετη στο επίπεδο Π.**

**Απόδειξη**

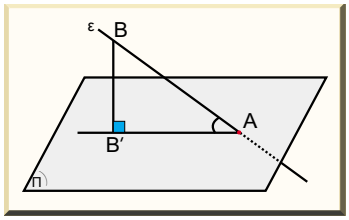
Έστω Α το σημείο τομής των ευθειών z και θ. Αν η ε τέμνει το επίπεδο Π στο σημείο Α, τότε είναι κάθετη σ' αυτό σύμφωνα με το θεώρημα 12.1. Αν το τέμνει σε σημείο Β διαφορετικό του Α, τότε φέρουμε ευθεία ε΄ παράλληλη στην ε που να τέμνει το επίπεδο Π στο σημείο Α. Επειδή η ευθεία ε είναι ορθογώνια με τη z και θ, η ε΄ θα τις τέμνει κάθετα, άρα θα είναι κάθετη στο Π, οπότε και η παράλληλή της η ε θα είναι κάθετη στο επίπεδο Π. ■



### *Γωνία ευθείας και επιπέδου*

**Ορισμός**

**i) Γωνία ευθείας ε και επιπέδου Π όχι καθέτου σ' αυτήν, καλείται η γωνία της ευθείας ε και της προβολής της στο επίπεδο Π.**
**ii) Γωνία ευθείας ε και επιπέδου Π καθέτου σ' αυτήν καλείται η γωνία των 90°.**




- Και στις δύο περιπτώσεις η γωνία ονομάζεται και κλίση της ευθείας ε ως προς το επίπεδο Π.

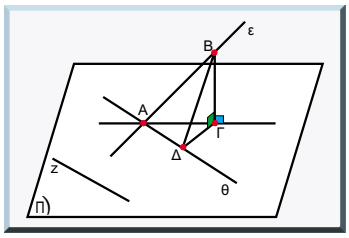
**Θεώρημα 12.15**

**Η κλίση μιας ευθείας ε ως προς ένα επίπεδο Π είναι μικρότερη ή ίση από κάθε γωνία της ευθείας ε με μια οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου Π.**

**Απόδειξη**

α) Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη ή κάθετη με το επίπεδο, αυτό είναι προφανές.

β) Στην περίπτωση που η ε τέμνει το επίπεδο Π πλάγια στο σημείο Α, από τυχαίο σημείο Β αυτής φέρουμε ΒΓ⊥Π, οπότε η κλίση της ε και του Π είναι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$. Για να σχηματίσουμε τη γωνία της ε με μια τυχαία ευθεία z του Π, φέρουμε από το Α μια ευθεία θ//z. Γωνία των ευθειών ε και z είναι η γωνία των ευθειών ε και θ. Πάνω στην ευθεία θ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΑΓ. Επειδή ΒΓ⊥Π προκύπτει ότι ΒΓ⊥ΓΔ, άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ, ΒΓ<ΒΔ.
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ έχουν την ΑΒ κοινή, ΑΓ=ΑΔ και ΒΓ<ΒΔ. Σύμφωνα με την εφαρμογή 4 του 3ου κεφαλαίου θα έχουν άνισες τις γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $B\hat{A}\Delta$ και συγκεκριμένα $B\hat{A}\Gamma < B\hat{A}\Delta$.
Αν η z είναι παράλληλη με την ΑΓ, τότε η γωνία της με την ε είναι ίση με τη $B\hat{A}\Gamma$.

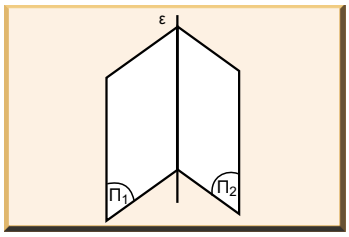



### *ΔΙΕΔΡΗ ΓΩΝΙΑ*

Δυο τεμνόμενα επίπεδα δίνουν την εικόνα μιας γωνίας. Αυτή τη γωνία θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε.

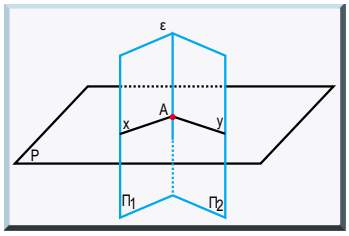
**Ορισμός**

**Το σχήμα που αποτελείται από δυο τεμνόμενα ημιεπίπεδα $Π_1$ και $Π_2$ και κοινή ακμή ε ονομάζεται δίεδρη γωνία.**




- Τα δυο ημιεπίπεδα $Π_1$ και $Π_2$ ονομάζονται έδρες της δίεδρης γωνίας.
- Η ευθεία ε ονομάζεται ακμή της δίεδρης γωνίας.

Αν πάρουμε ένα επίπεδο Ρ κάθετο στην ακμή της προηγούμενης δίεδρης στο σημείο Α, αυτό τέμνει τις έδρες της $Π_1$ και $Π_2$ κατά τις ημιευθείες Αx και Αy. Η γωνία $x\hat{A}y$ ονομάζεται **αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης** γωνίας.



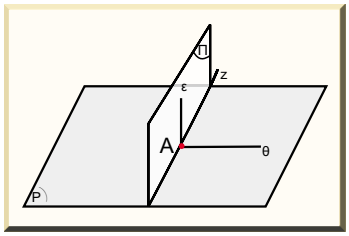

- Επειδή όλες οι επίπεδες γωνίες μίας δίεδρης είναι ίσες, μέτρο μιας δίεδρης γωνίας ονομάζεται το μέτρο μίας οποιασδήποτε απ' αυτές.
- Μία δίεδρη ονομάζεται **κυρτή** ή **μη κυρτή** αν η αντίστοιχη επίπεδη είναι κυρτή ή μη κυρτή. Μια δίεδρη ονομάζεται **οξεία**, **ορθή** ή **αμβλεία**, όταν η αντίστοιχη επίπεδη είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία. Δύο δίεδρες ονομάζονται **ίσες** (ή άνισες) αν οι αντίστοιχες επίπεδες είναι ίσες (ή άνισες). Ανάλογα ισχύουν οι ορισμοί για τη **μηδενική**, **πεπλατυσμένη**, **πλήρη** δίεδρη, για τις **συμπληρωματικές**, **παραπληρωματικές**, **εφεξής** κλπ.

### *Γωνία δύο επιπέδων*

Αν δύο επίπεδα Π και Ρ τέμνονται, σχηματίζονται τέσσερις δίεδρες γωνίες. Αν μία από αυτές είναι ορθή, τότε όλες είναι ορθές και λέμε ότι η γωνία των επιπέδων είναι **ορθή** και τα επίπεδα είναι **κάθετα**. Αν καμία από τις δίεδρες δεν είναι ορθή, τότε μία από τις δύο οξείες δίεδρες καλείται γωνία των δύο επιπέδων Π και Ρ.

**Θεώρημα 12.16**

**Αν μία ευθεία ε ενός επιπέδου Π είναι κάθετη σ' ένα επίπεδο Ρ, τότε τα Π και Ρ είναι κάθετα.**



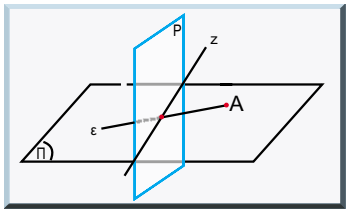

**Απόδειξη**

Αν Α είναι το σημείο τομής της ε και του Ρ, το Α θα είναι και σημείο του Π, άρα τα Π και Ρ τέμνονται κατά μία ευθεία z. Στο επίπεδο Ρ φέρουμε ευθεία Αθ⊥z. Θα έχουμε επομένως z⊥ε και z⊥θ, άρα η z θα είναι κάθετη στο επίπεδο (ε,θ), δηλαδή η γωνία των ε και

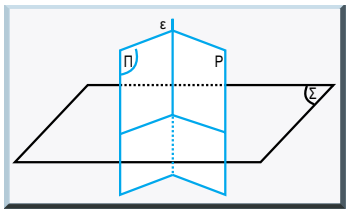
θ θα είναι η αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης των Π και Ρ. Όμως η γωνία των ε και θ είναι ορθή, διότι η ε είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του Ρ που περνά από το Α. Άρα το επίπεδο Π είναι κάθετο στο επίπεδο Ρ. ■

Για τα κάθετα επίπεδα ισχύουν ακόμη και οι δύο προτάσεις που ακολουθούν.

**Αν δύο επίπεδα Π και Ρ τέμνονται κάθετα κατά ευθεία z και από ένα σημείο Α του Π φέρουμε ευθεία ε κάθετη στο Ρ, τότε αυτή θα είναι ευθεία του Π.**




**Αν δύο επίπεδα Π και Ρ τέμνονται κατά ευθεία ε και είναι κάθετα σε τρίτο επίπεδο Σ, τότε και η ε θα είναι κάθετη στο Σ.**




## 12.1 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1) Γιατί το ταβάνι της αίθουσας συναντά καθέναν από τους κατακόρυφους τοίχους κατά ευθεία γραμμή;
2) Γιατί ο κατακόρυφος τοίχος της αίθουσας συναντά και το ταβάνι και το πάτωμα σε δύο ευθείες παράλληλες;
3) Γιατί, κατά το άνοιγμα μιας πόρτας, αυτή παραμένει κάθετη στο πάτωμα της αίθουσας;
4) Αν προεκτείνουμε ένα τμήμα μιας στέγης ενός σπιτιού ώσπου να συναντήσει το έδαφος, θα το συναντήσει κατά μία ευθεία. Γιατί η ευθεία αυτή είναι παράλληλη με τον ένα τοίχο του σπιτιού;
5) Για ποιο λόγο όταν διπλώνουμε ένα χαρτί η τσάκιση είναι ευθεία;

## 1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Αν ε και z δύο ασύμβατες ευθείες, τότε:**

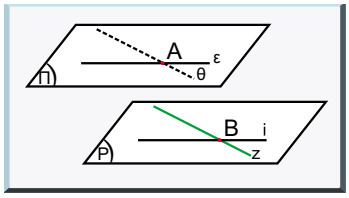
**α) Υπάρχουν μόνο δύο παράλληλα επίπεδα που το καθένα**

**περιέχει τη μία από τις δύο ασύμβατες.**

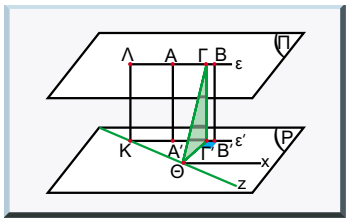
**β) Υπάρχει μόνο ένα ευθύγραμμο τμήμα κάθετο και στις δύο, το οποίο είναι το μικρότερο από κάθε άλλο τμήμα που τις ενώνει**

## Απόδειξη

α) Θεωρούμε ένα σημείο Α της ε και ένα σημείο Β της z. Φέρουμε από το Α ευθεία θ//z, η οποία με την ε ορίζει ένα επίπεδο Π. Από το Β φέρουμε ευθεία i παράλληλη με την ε, η οποία ορίζει με η z ένα άλλο επίπεδο Ρ. Τα επίπεδα Π και Ρ είναι παράλληλα διότι δύο τεμνόμενες ευθείες του ενός είναι παράλληλες με το άλλο επίπεδο. Αν υπήρχε και ένα τρίτο επίπεδο Σ που να περιέχει την ε και να είναι παράλληλο με το Ρ, τότε θα έπρεπε αυτό να είναι και παράλληλο με το Π και ταυτόχρονα να έχει κοινή ευθεία με το Π την ε. Άρα τα Π και Ρ είναι μοναδικά.




β) Έστω Π και Ρ τα δύο παράλληλα επίπεδα που περιέχουν τις ε και z αντίστοιχα. Από δύο σημεία Α και Β της ε φέρουμε κάθετες ΑΑ΄ και ΒΒ΄ στο Ρ και ορίζουμε την προβολή ε΄ της ε πάνω στο Ρ. Η ε΄ είναι παράλληλη με την ε, άρα θα τέμνει τη z, έστω στο σημείο Κ. Στο επίπεδο που ορίζουν οι ε και ε΄ φέρουμε από το Κ παράλληλη προς τις ΑΑ΄ και ΒΒ΄, η οποία τέμνει την ε σε σημείο Λ. Η ΚΛ είναι κάθετη στο Ρ άρα και στη z, είναι κάθετη και στο Π άρα και στην ε. Έστω ότι υπάρχει και δεύτερη κοινή κάθετη, η ΓΘ, τότε αν Θx//ε΄, θα έπρεπε ΓΘ⊥z και ΓΘ⊥Θx, απ' όπου προκύπτει ΓΘ⊥Ρ, αλλά αυτό είναι άτοπο, διότι ΓΓ΄⊥Ρ.




Θεωρούμε ένα τυχαίο τμήμα ΓΘ που ενώνει τις δύο ασύμβατες. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΓ΄Θ η ΓΘ είναι υποτείνουσα, επομένως ΓΓ΄<ΓΘ, όμως ΓΓ΄=ΚΛ, άρα και ΚΛ<ΓΘ. Ώστε το ΚΛ είναι το μικρότερο απ' όλα αυτά τα τμήματα.

Το τμήμα ΚΛ εξαιτίας αυτών των δύο ιδιοτήτων καλείται **κοινή κάθετος** και **ελάχιστη απόσταση** των ασύμβατων ευθειών.

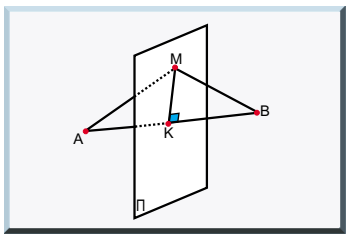
## 2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που το καθένα ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος.**

**Λύση**

Έστω ΑΒ το ευθύγραμμο τμήμα και Μ ένα σημείο του χώρου για το οποίο ισχύει ΜΑ=ΜΒ. Αν πάρουμε το μέσο Κ του ΑΒ, τότε η διάμεσος ΜΚ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΒ θα είναι και ύψος, άρα ΚΜ⊥ΑΒ. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Μ βρίσκεται σ' ένα επίπεδο Π κάθετο στο μέσο του ΑΒ.

**Αντιστρόφως:**



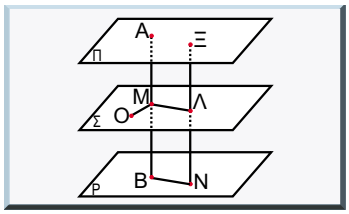

Έστω ένα σημείο Μ του επιπέδου Π. Η ΑΒ είναι κάθετη στη ΜΚ, διότι είναι κάθετη στο Π, άρα και σε κάθε ευθεία που περνά από το ίχνος της. Ακόμη ΚΑ=ΚΒ, άρα στο τρίγωνο ΜΑΒ το ΜΚ είναι και ύψος και διάμεσος. Οπότε ΜΑ=ΜΒ. Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το επίπεδο Π.

Το επίπεδο αυτό καλείται **μεσοκάθετο** επίπεδο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

## 3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που το καθένα ισαπέχει από δύο παράλληλα επίπεδα.**

**Λύση**




Έστω Π και Ρ τα παράλληλα επίπεδα που απέχουν απόσταση ΑΒ=α. Ένα σημείο του ζητούμενου τόπου είναι το μέσο Μ του ΑΒ. Αν θεωρήσουμε άλλο σημείο Λ που ισαπέχει από τα Π και Ρ και φέρουμε από το Λ τη ΝΞ κάθετη στα δύο επίπεδα, προφανώς θα ισχύει $ΝΛ = \frac{1}{2}ΞΝ = \frac{α}{2} = ΜΒ$. Επειδή όμως είναι και ΛΝ//ΜΒ, άρα το ΜΛΒΝ είναι παραλληλόγραμμο και ΜΛ//ΒΝ. Ομοίως αν θεωρήσουμε ένα άλλο σημείο Ο που να ισαπέχει από τα Π και Ρ, θα συμπεράνουμε ότι ΜΟ είναι παράλληλη στο επίπεδο Π.

Ώστε όλα τα σημεία αυτά ορίζουν με το Μ ευθείες παράλληλες στο επίπεδο Ρ. Άρα, βρίσκονται σ' ένα επίπεδο Σ παράλληλο με τα επίπεδα Π και Ρ στο μέσο της απόστασής τους.

**Αντιστρόφως**

Έστω Μ ένα σημείο του επιπέδου Σ. Αν από το Σ φέρουμε μία κάθετη προς τα τρία επίπεδα, την ΑΜΒ, προφανώς ΑΒ=α και $ΜΑ = ΜΒ = \frac{α}{2}$.

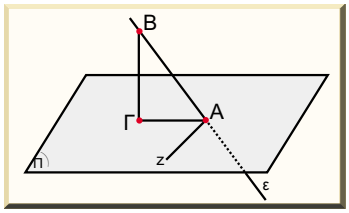
Άρα, κάθε σημείο του Σ ισαπέχει από τα Π και Ρ. Ο γεωμετρικός τόπος είναι το επίπεδο Σ. Αυτό καλείται **μεσοπαράλληλο επίπεδο των Π και Ρ**.

## 4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Αν μία ευθεία ε τέμνει πλάγια ένα επίπεδο Π, τότε είναι κάθετη σε μία μόνο ευθεία του επιπέδου Π.**

### Απόδειξη

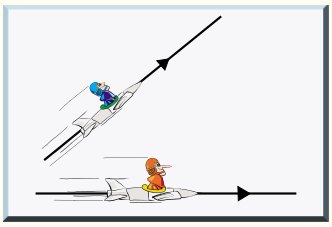
Έστω Α το σημείο τομής της ευθείας ε και του επιπέδου Π. Από σημείο Β της ε φέρουμε ΒΓ⊥Π και στη συνέχεια φέρουμε ευθεία z του επιπέδου Π κάθετη στη ΓΑ.




Επειδή ΒΓ⊥Π και ΓΑ⊥z, από το θεώρημα των τριών καθέτων, συμπεραίνουμε ότι και ΒΑ⊥z. Επομένως η ε είναι κάθετη σε μία ευθεία του Π. Αυτή είναι και η μοναδική, διότι, αν ήταν κάθετη και σε μία ακόμη, θα ήταν κάθετη στο επίπεδο Π, πράγμα που είναι άτοπο.

## 12.2 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δύο αεροπλάνα κινούνται με ταχύτητα 600 km/ώρα σε δύο οριζόντια επίπεδα που απέχουν μεταξύ τους 3 km. Οι τροχιές τους είναι ευθείες που σχηματίζουν γωνία 60°. Κάποια χρονική στιγμή βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη. Μπορείτε να υπολογίσετε ποια θα είναι η απόστασή τους σε ευθεία γραμμή μετά από 24 δευτερόλεπτα;



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

**1** Δύο ευθείες ε και η του χώρου είναι παράλληλες. Μια τρίτη ευθεία θ τέμνει την η. Η θ και η η μπορεί να τέμνονται; Να είναι παράλληλες; Να είναι ασύμβατες;

**2** Μπορεί μια ευθεία ε να είναι κάθετη σε μια ευθεία η ενός επιπέδου Π χωρίς να είναι κάθετη στο Π.

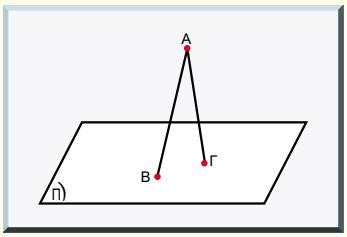
**3** Η κλίση φ μιας ευθείας ε και ενός επιπέδου Π είναι 60°. Η ε με πόσες ευθείες του Π, που περνούν από το ίχνος της σχηματίζει γωνία $\widehat{\varphi}$; Πόσων μοιρών πρέπει να είναι η $\widehat{\varphi}$ ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να σχηματίζεται με περισσότερες ευθείες;

**4** Η απόσταση δύο επιπέδων ισούται με την απόσταση δυο οποιονδήποτε σημείων τους;

**5** Τα ημιεπίπεδα που διχοτομούν δύο κατα-

κορυφήν δίεδρες, τι θέση έχουν μεταξύ τους;

**6** Να εξηγήσετε γιατί δεν μπορούμε να φέρουμε δύο κάθετες προς ένα επίπεδο Π από σημείο Α εκτός αυτού.




**7** Αν δύο επίπεδα είναι κάθετα, τότε κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με το ένα θα είναι κάθετη στο άλλο;

**8** Μια ευθεία ε σχηματίζει την ίδια κλίση ως προς δύο παράλληλα επίπεδα;

**9** Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν απόσταση α από ένα επίπεδο Π;

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

**1** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α και ευθύγραμμο τμήμα $ΑΔ = \frac{α}{2}$, το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο (Α,Β,Γ). Να υπολογιστεί η απόσταση του Δ από τη ΒΓ.

**2** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που απέχουν σταθερή απόσταση α από επίπεδο Π.

**3** Να δείξετε ότι από ένα σημείο που βρίσκεται εκτός του επιπέδου Π διέρχεται ένα μόνο επίπεδο παράλληλο προς το Π.

**4** Δίνεται ένα επίπεδο Π και μία ευθεία του ΓΔ. Από σημείο Μ της ΓΔ φέρουμε στο Π τη ΜΕ κάθετη στη ΓΔ και τη ΜΑ έξω από το Π και κάθετη στη ΜΕ. Να δείξετε ότι τα επίπεδα ΑΓΔ και Π είναι κάθετα.

**5** Έστω επίπεδο Π και ευθεία ε παράλληλη προς το Π. Να δείξετε ότι κάθε επίπεδο που διέρχεται από την ε και τέμνει το επίπεδο Π, το τέμνει κατά ευθεία παράλληλη της ε.

**6** Από τα σημεία Α, Β και Γ μιας ευθείας ε (όπου Γ εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ) φέρουμε αντίστοιχα τα παράλληλα επίπεδα Π, Ρ και Σ, που τέμνουν μία ευθεία η αντίστοιχα στα σημεία $Α_1$, $Β_1$ και $Γ_1$. Αν ΑΒ=4,5 m, ΒΓ=2 m και $Α_1Γ_1$=2,8 m, να υπολογιστούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων $Α_1Β_1$ και $Β_1Γ_1$.

**7** Δίνεται μία δίεδρη γωνία $\widehat{ΠεΡ}$ και το εσωτερικό της σημείο Μ. Ονομάζουμε Α και Β αντίστοιχα τις προβολές του Μ στα επίπεδα των εδρών Π και Ρ της δίεδρης γωνίας $\widehat{ΠεΡ}$. Να δείξετε ότι η γωνία $\widehat{ΑΜΒ}$ είναι παραπληρωματική της αντίστοιχης επίπεδης της παραπάνω δίεδρης γωνίας.

**8** Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πλάγιο προς το επίπεδο Π. Αν το ευθύγραμμο τμήμα $Α_1Β_1$ είναι η προβολή του ΑΒ στο επίπεδο Π και $\widehat{φ}$ η γωνία της ευθείας ΑΒ με το Π, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $Α_1Β_1$=ΑΒ·συνφ.

**9** Τρία παράλληλα επίπεδα απέχουν κατά σειρά· τα Π και Ρ 12 cm, τα Ρ και Σ 8 cm. Μία ευθεία ε τέμνει τα τρία επίπεδα αντίστοιχα στα σημεία Α, Β, Γ. Αν ΑΒ=18 cm, να υπολογίσετε το μήκος ΒΓ.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

**1** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του χώρου, τα οποία ισαπέχουν από τις κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ.

**2** Δίνεται δίεδρη γωνία $\widehat{\Pi\varepsilon P}$ και ένα τμήμα ΑΒ που έχει τα άκρα του ανά ένα στις έδρες. Αν το διχοτόμο επίπεδο Τ της δίεδρης διέρχεται από το μέσο Μ του ΑΒ, να δείξετε ότι τα Α, Β ισαπέχουν από την ευθεία ε.

**3** Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και επίπεδο Π που περιέχει τη ΒΓ και δεν είναι κάθετο στο επίπεδο (Α,Β,Γ). Αν Α΄ είναι η προβολή του Α στο Π και Η, Η΄ είναι τα ορθόκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ, Α΄ΒΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι ΗΗ΄⊥(Α,Β,Γ).

**4** Δίνεται ένα επίπεδο Π και ένα σημείο Ο έξω από αυτό. Αν τα Α, Β, Γ είναι τρία σημεία του επιπέδου Π, να δείξετε ότι τα μέσα Μ, Ν και Ρ αντίστοιχα των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ ισαπέχουν από το Π.

**5** Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ με κοινό κάθετο ευθύγραμμο τμήμα το ΑΒ (όπου Α και Β είναι αντίστοιχα σημεία των ευθειών $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$. Να δείξετε ότι το μεσοκάθετο επίπεδο στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ διέρχεται από το μέσο κάθε ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ, που έχει τα άκρα του Κ και Λ αντίστοιχα πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$.

**6** Δίνονται ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΒ (ΑΒ=ΑΔ) και ΓΔΒ (ΓΒ=ΓΔ) που δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Αν Μ και Ν είναι αντίστοιχα τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΔΒ και ΓΑ, να δείξετε ότι:
i) οι ευθείες ΔΒ και ΓΑ είναι ασύμβατες,
ii) το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι το κοινό κάθετο ευθύγραμμο τμήμα των ευθειών ΔΒ και ΓΑ.

**7** Στο επίπεδο Π ενός κύκλου και στο κέντρο του Ο φέρουμε την κάθετη ευθεία ε. Αν Μ και Ν σημεία του κύκλου μη αντιδιαμετρικά, Α σημείο της ε διάφορο του Ο και Δ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ, να δείξετε ότι:
i) ΑΜ=ΑΝ και
ii) το επίπεδο που ορίζεται από τις ευθείες ΟΔ και ΑΔ είναι κάθετο στην ευθεία ΜΝ στο σημείο της Δ και πάνω του βρίσκεται η ευθεία ε.

**8** Δίνονται δυο επίπεδα Π και Σ που τέμνονται κάθετα κατά την ευθεία ε. Μία ευθεία $\varepsilon_1$ του Π τέμνει την ε κάθετα στο σημείο Α. Να δείξετε ότι για κάθε ευθεία z του Σ υπάρχει ένα και μόνο ένα επίπεδο, το οποίο διέρχεται από την $\varepsilon_1$ και είναι κάθετο στη z.

**9** Δίνονται δύο ημιευθείες Βx και Βy με κοινή αρχή που είναι κάθετες σε τρίτη ευθεία ΒΓ. Οι Βx και ΒΓ ορίζουν τη θέση ενός επιπέδου Π. Από ένα σημείο Ε της Βy φέρουμε την ΕΑ⊥Βx. Να δείξετε ότι ΕΑ⊥Π.

**10** Η γωνία δύο ασύμβατων ευθειών $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ είναι 60° και η κοινή κάθετη αυτών ε τέμνει την $\varepsilon_1$ στο Α και την $\varepsilon_2$ στο Β. Στις ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ παίρνουμε ΑΓ=20 και ΒΔ=5 αντίστοιχα. Αν είναι $AB=5\sqrt{6}$, να υπολογίσετε το ΓΔ.

## ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

**1** Δίνεται στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα ΕΖ και Η αντίστοιχα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ. Να δείξετε ότι: i) οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ είναι παράλληλες προς το επίπεδο (Ε,Ζ,Η) και ii) το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ τέμνεται από το επίπεδο (Ε,Ζ,Η) στο μέσο του.

**2** i) Αν δύο παράλληλα επίπεδα Π και Ρ τέμνονται από ένα επίπεδο Σ, να δείξετε ότι οι εντός ενταλλάξ δίεδρες γωνίες είναι ίσες και οι εντός και επί τα αυτά παραπληρωματικές. ii) Αν τα επίπεδα Π και Ρ τέμνονται από το επίπεδο Σ κατά ευθείες παράλληλες και σχηματίζουν με αυτό τις εντός εναλλάξ δίεδρες γωνίες ίσες, ή τις εντός και επί τα αυτά παραπληρωματικά, να δείξετε ότι τα επίπεδα Π και Ρ είναι παράλληλα.

**3** Δίνονται το στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Μ, Ν αντίστοιχα των απέναντι πλευρών του ΒΓ και ΑΔ. Να δείξετε ότι από την ευθεία ΜΝ διέρχεται ένα και μόνο ένα επίπεδο παράλληλο στην ευθεία ΑΒ. Να δείξετε ακόμη ότι η ευθεία ΓΔ είναι παράλληλη στο επίπεδο αυτό.

**4** Δίνονται δύο ίσα ορθογώνια ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ, που βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα. Έστω $O_1$ και $O_2$ αντίστοιχα οι τομές των διαγωνίων των ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ. Να δείξετε ότι: i) οι ευθείες $O_1O_2$ και ΒΓ είναι ορθογώνιες, ii) η ευθεία που ενώνει τα μέσα Μ, Ν αντίστοιχα των ΒΓ και $O_1O_2$ είναι η κοινή κάθετη των ευθειών ΒΓ και $O_1O_2$ και σχηματίζει ίσες γωνίες με τις ευθείες ΑΒ και ΒΕ.

**5** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα τμήματα ΑΑ΄=5, ΒΒ΄=8, ΓΓ΄=9, ΔΔ΄=6, ώστε τα Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ να είναι προς το ίδιο μέρος του επιπέδου ΑΒΓΔ και ΑΑ΄//ΒΒ΄//ΓΓ΄/?ΔΔ΄. Να δείξετε ότι: i) (ΑΑ΄,ΔΔ΄)//(ΒΒ΄,ΓΓ΄) και (ΑΑ΄,ΒΒ΄)//(ΓΓ΄,ΔΔ΄), ii) το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι παραλληλόγραμμο.

**6** Δίνεται δίεδρη γωνία $\Pi_1\widehat{\varepsilon}\Pi_2$ και ο διχοτόμο επίπεδό της Ρ. Αν μία ευθεία τέμνει τις έδρες $\Pi_1$, $\Pi_2$ στα Α, Β αντίστοιχα και το Ρ το Σ, να δείξετε ότι $\frac{\Sigma A}{\Sigma B}=\frac{AA'}{BB'}$, όπου Α΄, Β΄ είναι οι προβολές των Α και Β στην ε.

**7** Δίνεται κύκλος (Ο,R) και σε σημείο του Α ένα εφαπτόμενο τμήμα $AB=\sqrt{6R}$. Πάνω στην κάθετη προς το επίπεδο του κύκλου στο Ο παίρνουμε τμήμα ΟΓ=3R. Να υπολογίσετε το τμήμα ΒΓ.

**8** Δίνονται δύο επίπεδα p, q τεμνόμενα κατά την ευθεία xy και μία ευθεία ΑΒ ασυμβ΄τως καθετη προς τη xy, χωρίς να είναι κάθετη στα επίπεδα p, q. Να εξετάσετε αν οι προβολές τους Α΄Β΄ και Α΄΄Β΄΄ στα δύο αυτά επίπεδα είναι συνεπίπεδες ή ασύμβατες.

**9** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του χώρου που ικανοποιούν την ισότητα $AM^2-BM^2=\lambda^2$, όπου Α, Β σταθερά σημεία και λ σταθερό ευθύγραμμο τμήμα.

**10** Δίνεται κύκλος Κ στο επίπεδο p και ένα σημείο Α εκτός του επιπέδου. Να βρείτε τη μικρότερη και μεγαλύτερη απόσταση του Α από τα σημεία του κύκλου.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 13ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

**1** Είναι σωστή ή λανθασμένη κάθε πρόταση από τις ακόλουθες;

α) Αν δυο επίπεδα είναι παράλληλα, τότε κάθε ευθεία του ενός είναι παράλληλη με το άλλο επίπεδο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

β) Αν δυο επίπεδα είναι παράλληλα, τότε κάθε ευθεία του ενός είναι παράλληλη με κάθε ευθεία του άλλου.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

γ) Δύο επίπεδα κάθετα σε μια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλα.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

δ) Η γωνία ευθείας και επιπέδου δεν μπορεί να είναι αμβλεία.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ε) Η προβολή ενός ευθύγραμμου τμήματος σε επίπεδο είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το αρχικό.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

στ) Αν δυο δίεδρες είναι παραπληρωματικές και εφεξής τα ημιεπίπεδα που τις διχοτομούν είναι κάθετα.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ζ) Αν μια ευθεία ε τέμνει ένα επίπεδο Π, τότε δεν είναι παράλληλη με καμία ευθεία του Π.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

η) Αν το κέντρο ενός κύκλου ανήκει σ' ένα επίπεδο, τότε ο κύκλος αυτός θα έχει τουλάχιστον δυο κοινά σημεία με το επίπεδο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

θ) Αν δυο επίπεδα Π και Q είναι κάθετα και μια ευθεία ε είναι κάθετη στο Π, θα είναι παράλληλη με το Q.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ι) Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ του χώρου ισχύουν ΑΒ//ΓΔ και ΒΓ//ΑΔ, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

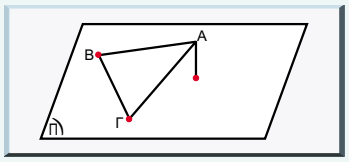
ια) Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ του χώρου ισχύει ΑΒ=ΓΔ και ΒΓ=ΓΔ, τότε το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

**2** Ένας κύκλος αν έχει τρία τουλάχιστον κοινά σημεία με ένα επίπεδο θα έχει όλα του τα σημεία πάνω στο επίπεδο αυτό; Να απαντήσετε στην ίδια ερώτηση για ένα πολύγωνο.

**3** Τα μεσοκάθετα επίπεδα των πλευρών ενός τριγώνου τι θέση έχουν μεταξύ τους;

**4** Η πλευρά ΒΓ ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς 12, ανήκει σ' ένα επίπεδο Π και η κορυφή Α βρίσκεται εκτός του επιπέδου. Αν η απόσταση του Α από το επίπεδο είναι $3\sqrt{3}$, ποια γωνία σχηματίζει το επίπεδο (Π) με το επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ;



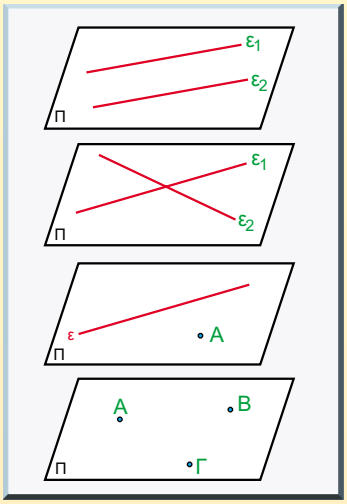

**5** Αν δυο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν κοινή βάση ΒΓ και δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε η ΑΔ θα είναι ορθογώνια με τη ΒΓ.

**6** Στο κέντρο Ο ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ υψώνουμε τμήμα ΟΕ κάθετο στο επίπεδο του παραλληλογράμμου. Το σημείο Ε ισαπέχει από τις τέσσερις κορυφές; Ισαπέχει από ορισμένες; Σε ποια περίπτωση θα ισαπέχει και από τις τέσσερις;

**7** Αν δυο ευθείες σχηματίζουν την ίδια κλίση με ένα επίπεδο, θα είναι μεταξύ τους παράλληλες;

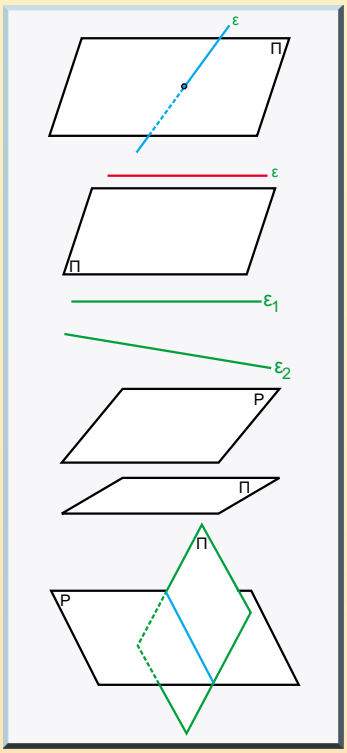
# ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

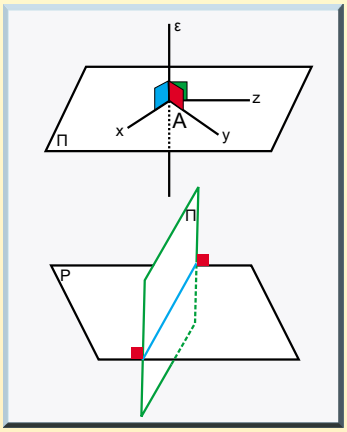
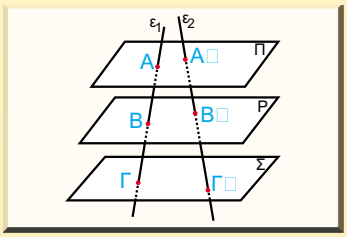
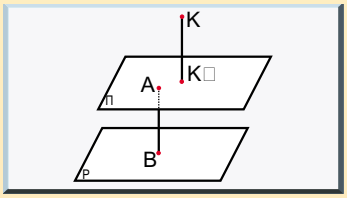
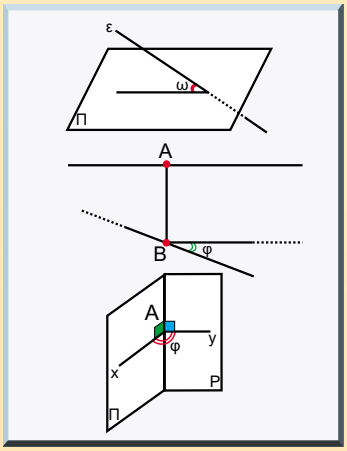
Με το 12ο κεφάλαιο περάσαμε από το επίπεδο των δύο στο χώρο των τριών διαστάσεων. Στην αρχή περιγράψαμε την έννοια του επιπέδου και αναφέραμε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να προσδιοριστεί ένα επίπεδο (δύο παράλληλες ευθείες, δύο τεμνόμενες ευθείες, μία ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής, τρία σημεία μη συνευθειακά).




Ακολούθησαν ορισμένες παρατηρήσεις που διαφοροποιούσαν μερικές προτάσεις της επιπεδομετρίας στη στερεομετρία. Διευκρινίσαμε τις σχετικές θέσεις στο χώρο μεταξύ σημείων - ευθειών - επιπέδων και είδαμε: ευθεία να ανήκει σε επίπεδο, ευθεία να τέμνει επίπεδο και ευθεία να είναι παράλληλη με επίπεδο. Μελετήσαμε τις ασύμβατες ευθείες, που αποτελούν μία νέα σχέση (δύο ευθείες που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο).

Όσον αφορά τα δύο επίπεδα, γνωρίσαμε τα παράλληλα και τα τεμνόμενα.



| | |
|---|---|
| Η επόμενη παράγραφος αφιερώθηκε στην καθετότητα ευθείας και επιπέδου. Αποδείξαμε τα σχετικά θεωρήματα των τριών καθέτων. Στη συνέχεια εξετάσαμε την καθετότητα μεταξύ επιπέδων, όπως επίσης και τις ορθογώνιες ευθείες. |   |
| Η παραλληλία ήταν το επόμενο θέμα που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο αυτό. Αποδείξαμε τα σχετικά θεωρήματα μεταξύ των οποίων και το θεώρημα του Θαλή στο χώρο. |   |
| Κατόπιν ασχοληθήκαμε με την έννοια της απόστασης σημείου από επίπεδο, παραλλήλων επιπέδων. |   |
| Με τη βοήθεια της έννοιας της προβολής ευθείας σε επίπεδο, καθορίσαμε τις διάφορες γωνίες στο χώρο: γωνία ευθείας και επιπέδου, γωνία ασύμβατων ευθειών και γωνία δύο επιπέδων. Για τις δύο τελευταίες εξετάσαμε και την περίπτωση να είναι ορθές, οπότε οι ασύμβατες ονομάζονται ορθογώνιες και τα επίπεδα κάθετα. |   |