Κεφάλαιο 11

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

11.1 Κανονικά πολύγωνα

11.1.1 Έννοια κανονικού πολυγώνου

Στο 3ο κεφάλαιο ονομάσαμε ισόπλευρο τρίγωνο το τρίγωνο που έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες μεταξύ τους και αποδείξαμε στη συνέχεια ότι το ισόπλευρο τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες μεταξύ τους.

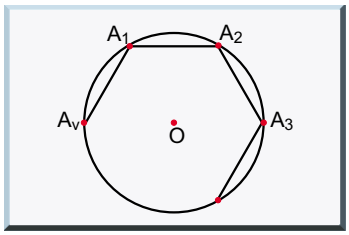
Στο 5ο κεφάλαιο μελετήσαμε τις ιδιότητες του τετραγώνου και διαπιστώσαμε ότι το τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους.

Το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο ήταν τα μόνα, από τα διάφορα είδη τριγώνων και τετραπλεύρων που μελετήσαμε, τα οποία διαθέτουν την ιδιότητα αυτή, δηλαδή έχουν όλες τις πλευρές τους και όλες τις γωνίες τους ίσες μεταξύ τους.

Το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει την ύπαρξη (όχι όμως απαραίτητα και την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη) και άλλων πολυγώνων μ' αυτή την ιδιότητα.

Θεώρημα 11.1

Αν χωρίσουμε έναν κύκλο σε ν ίσα τόξα, τότε τα άκρα αυτών των τόξων είναι κορυφές πολυγώνου, που έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους.



Απόδειξη

Θεωρούμε σε ένα κύκλο (O,R) τα ν σημεία $A_1, A_2, \ldots A_\nu$, τέτοια, ώστε $\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_2A_3} = \ldots \overset{\frown}{A_\nu A_1}$. Οι πλευρές του πολυγώνου $A_1A_2\ldots A_\nu$ είναι ίσες ως χορδές ίσων τόξων. Επίσης οι γωνίες του είναι ίσες ως

εγγεγραμμένες που η καθεμιά βαίνει σε τόξο $(\nu-2)\frac{360^\circ}{\nu}$. Άρα το πολύγωνο $A_1A_2...A_\nu$ έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους. ■

Ορισμός

Ένα πολύγωνο, που έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους, ονομάζεται κανονικό.

Σε ένα κανονικό ν-γωνο καθεμιά από τις ίσες γωνίες συμβολίζεται με $\widehat{\varphi}_\nu$.

Θεώρημα 11.2

Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ισχύει $\widehat{\varphi}_\nu = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε από το 4ο κεφάλαιο ότι το άθροισμα των γωνιών ενός ν-γώνου είναι (2ν–4) ορθές ή 180°ν–360°. Άρα, κάθε γωνία $\widehat{\varphi}_\nu$ ενός κανονικού ν-γώνου είναι

$$\widehat{\varphi}_\nu = \frac{1}{\nu}(180^\circ\nu - 360^\circ) = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}$$ ■

Πόρισμα 11.1

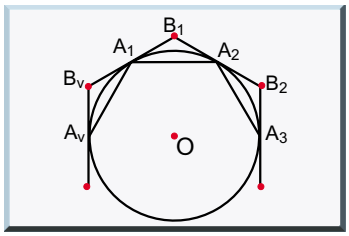
Η εξωτερική γωνία ενός κανονικού ν-γώνου είναι ίση με $\frac{360^\circ}{\nu}$.

Θεώρημα 11.3

Αν χωρίσουμε έναν κύκλο σε ν ίσα τόξα και φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα αυτών των τόξων, τότε το ν-γωνο που σχηματίζεται είναι κανονικό.

Απόδειξη

Έστω $B_1B_2...B_\nu$ το ν-γωνο, που σχηματίζεται, όταν φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου (O,R) στα σημεία $A_1, A_2, ..., A_\nu$.



Τα τρίγωνα $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, ..., $A_\nu B_\nu A_1$ έχουν ίσες τις πλευρές τους A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_\nu A_1$ ως χορδές ίσων τόξων και τις προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες, ως γωνίες υπό χορδής και εφαπτομένης που καθεμιά βαίνει σε τόξο ίσο προς το $\frac{1}{\nu}$ του κύκλου. Άρα, τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και ισοσκελή, οπότε $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = ... = \widehat{B}_\nu$ και $A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = ... = B_\nu A_1 = \alpha$. Άρα, το ν-γωνο $B_1B_2...B_\nu$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους, αφού καθεμιά είναι ίση προς 2α και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους.

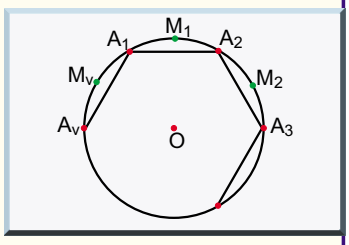
Επομένως το $B_1B_2...B_\nu$ είναι κανονικό. ■

Παρατήρηση

Το πολύγωνο $A_1A_2...A_\nu$ ονομάζεται **εγγεγραμμένο** στον κύκλο (O,R) και το πολύγωνο $B_1B_2...B_\nu$ **περιγεγραμμένο** στον κύκλο (O,R). Καθεμιά από τις ίσες πλευρές του ν-γώνου $A_1A_2...A_\nu$ συμβολίζεται με λ_ν , ενώ καθεμιά από τις ίσες πλευρές του ν-γώνου $B_1B_2...B_\nu$ συμβολίζεται με λ'_ν.

11.1 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

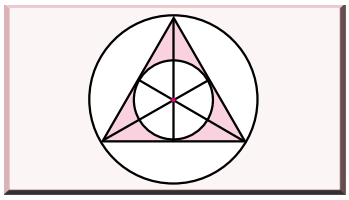
Αν $A_1A_2...A_\nu$ κανονικό ν-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και M_1, M_2, ..., M_ν τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, ..., $\overset{\frown}{A_\nu A_1}$, να αποδείξετε ότι το 2ν-γωνο $A_1M_1A_2M_2A_3...M_\nu$ είναι κανονικό.



11.1.2 Ιδιότητες κανονικών πολυγώνων

Στο ισόπλευρο τρίγωνο το περίκεντρο και το έγκεντρο συμπίπτουν, άρα ο περιγεγραμμένος και ο εγγεγραμμένος του κύκλος είναι ομόκεντροι.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η ιδιότητα αυτή γενικεύεται για όλα τα κανονικά πολύγωνα.

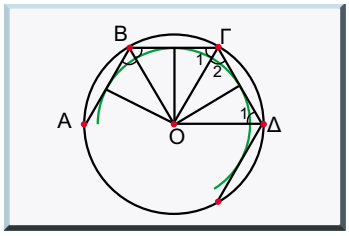


Θεώρημα 11.4

Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σ' έναν κύκλο και περιγράφεται σ' έναν άλλο, ομόκεντρο του πρώτου.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔΕ... κανονικό πολύγωνο. Αν φέρουμε τις διχοτόμους των διαδοχικών γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, αυτές τέμνονται (γιατί $\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\hat{B}+\hat{B}}{2}=\hat{B}=180°-\frac{360°}{\nu}<180°$) στο σημείο Ο. Αν τώρα ενώσουμε το Ο με την κορυφή Δ, τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν ΒΓ=ΓΔ, ΟΓ κοινή και $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$. Άρα $\hat{\Delta}_1=\hat{\Gamma}_1$ ή $\hat{\Delta}_1=\frac{\hat{\Delta}}{2}$



($\widehat{Γ} = \widehat{Δ}$ επειδή το πολύγωνο ΑΒΓΔ... είναι κανονικό). Επομένως, η ΟΔ είναι διχοτόμος της $\widehat{Δ}$, οπότε οι τρεις διχοτόμοι των $\widehat{Β}$, $\widehat{Δ}$ και $\widehat{Ε}$ συντρέχουν στο Ο κ.ο.κ. Επομένως, οι διχοτόμοι όλων των γωνιών του ΑΒΓΔΕ... συντρέχουν στο Ο και μάλιστα από τις ισότητες των τριγώνων ΟΒΓ, ΟΓΔ, ... έχουμε:

ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ=ΟΕ=...=ΟΑ.

Άρα το Ο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται απ' όλες τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου. Επειδή όμως οι χορδές ΒΓ, ΓΔ, ... είναι ίσες, θα είναι ίσα και τα αντίστοιχα αποστήματά τους ΟΒ, ΟΓ, ... Άρα το Ο είναι και κέντρο ενός κύκλου που εφάπτεται σ' όλες τις πλευρές του πολυγώνου. ■

Ορισμός

Το κοινό κέντρο του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου ενός κανονικού πολυγώνου ονομάζεται κέντρο του πολυγώνου.

Ορισμός

Το ευθύγραμμο τμήμα, που έχει άκρα το κέντρο και μια κορυφή του κανονικού πολυγώνου, δηλαδή η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου, ονομάζεται ακτίνα του πολυγώνου.

Ορισμός

Η απόσταση του κέντρου του κανονικού πολυγώνου από μία πλευρά του, δηλαδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, ονομάζεται απόστημα του πολυγώνου και συμβολίζεται με $α_ν$.

Ορισμός

Η γωνία, που σχηματίζεται από δύο ακτίνες του κανονικού πολυγώνου που καταλήγουν στα άκρα της ίδιας πλευράς, δηλαδή η γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές ακτίνες, ονομάζεται κεντρική γωνία, συμβολίζεται με $\widehat{ω}_ν$ και ισχύει $\widehat{ω}_ν = \frac{360°}{ν}$.

11.2 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να αποδείξετε ότι:

α) Η κεντρική γωνία και η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι παραπληρωματικές.

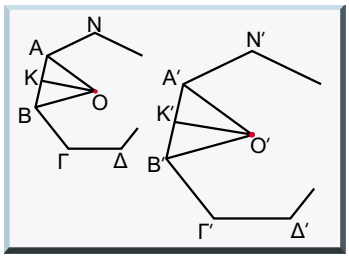
β) Η εξωτερική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίση με την κεντρική του γωνία.

Πόρισμα 11.2

Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητάς τους ισούται με το λόγο των αποστημάτων τους και με το λόγο των ακτίνων τους.

Απόδειξη

Έστω λ_ν , λ'_ν οι πλευρές και $\widehat{\varphi}_\nu$, $\widehat{\varphi}'_\nu$ οι γωνίες αντίστοιχα δύο κανονικών ν-γώνων. Τότε



- $$\widehat{\varphi}_\nu = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu} = \widehat{\varphi}'_\nu$$
- $$\frac{AB}{A'B} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \ldots = \frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu}$$

Άρα, τα δύο πολύγωνα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και τις πλευρές τους ανάλογες και συνεπώς είναι όμοια.

Έστω Ο, Ο΄ τα κέντρα των κανονονικών ν-γώνων, α_ν , α'_ν τα αποστήματα και R , R΄ οι ακτίνες των κανονικών ν-γώνων, τότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και Ο΄Α΄Β΄ είναι ισοσκελή και όμοια,

οπότε $$\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{OK}{O'K'} = \frac{OA}{O'A'} \quad \text{ή} \quad \frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu} = \frac{R}{R'}$$ ■

Θεώρημα 11.5

Σε κάθε κανονικό ν-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R ισχύουν οι σχέσεις:

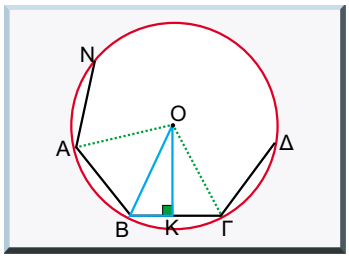
α) $\left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2 = R^2$, **β)** $P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$

γ) $E_\nu = \frac{1}{2} P_\nu \cdot \alpha_\nu$,

όπου P_ν η περίμετρος και E_ν το εμβαδό του πολυγώνου.

Απόδειξη

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΚ σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε



$$BK^2 + OK^2 = OB^2 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\lambda\nu}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2 = R^2$$

β) Η περίμετρος του κανονικού ν-γώνου είναι

$$P_\nu = AB + B\Gamma + \cdots + NA = \underbrace{\lambda_\nu + \lambda_\nu + \cdots + \lambda_\nu}_{\nu \text{ φορές}} = \nu \cdot \lambda_\nu$$

γ) Το κανονικό πολύγωνο ΑΒ...Ν με ν-πλευρές χωρίζεται σε ν ίσα ισοσκελή τρίγωνα.

Ισχύει $E=E_{OAB}+E_{OBΓ}+...+E_{ONA}$ ή $E=ν\cdot E_{OBΓ}$ ή

$E_ν=ν\cdot\frac{1}{2}λ_ν\cdot α_ν$ ή $E_ν=\frac{1}{2}ν\cdot λ_ν\cdot α_ν$ ή $E_ν=\frac{1}{2}P_ν\cdot α_ν$ ■

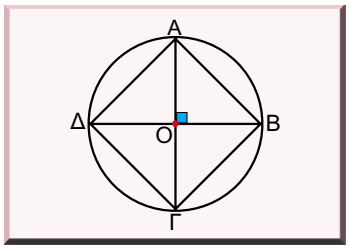
11.1.3 Εγγραφή τετραγώνου, κανονικού εξαγώνου, ισοπλεύρου τριγώνου και κανονικού δεκαγώνου σε κύκλο

Πρόβλημα 11.1

Σε δοσμένο κύκλο (Ο,R) να εγγραφεί τετράγωνο.

Ανάλυση

Έστω ότι εγγράψαμε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ σε κύκλο (Ο,R). Επειδή ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΑ, τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΔ}$ και $\overset{\frown}{ΔA}$ είναι ίσα μεταξύ τους και το καθένα έχει μέτρο 90°. Άρα οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροι του (Ο,R) .



Σύνθεση

Στον κύκλο (Ο,R) φέρουμε δύο κάθετες μεταξύ τους διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ και τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ που σχηματίστηκε είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Τα άκρα Α, Β, Γ, Δ των κάθετων διαμέτρων ΑΓ, ΒΔ χωρίζουν τον κύκλο (Ο,R) σε τέσσερα ίσα τόξα. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα 11.1 το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι κανονικό, συνεπώς τετράγωνο.

Διερεύνηση

Το πρόβλημα έχει πάντοτε λύση. Τα ζεύγη των κάθετων διαμέτρων είναι άπειρα. Άπειρα είναι και τα τετράγωνα που μπορούμε να κατασκευάσουμε. Επειδή όμως, όλα τα τετράγωνα που κατασκευάζονται στο συγκεκριμένο κύκλο είναι μεταξύ τους ίσα, θεωρούμε ότι έχουμε μία λύση στο πρόβλημα.

Πόρισμα 11.3

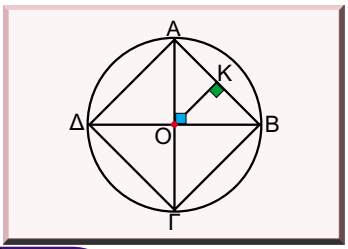
Η πλευρά $λ_4$ και το απόστημα $α_4$ του εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R τετραγώνου δίνονται από τους τύπους:

$$λ_4=\sqrt{2}R \quad \text{και} \quad α_4=\frac{\sqrt{2}}{2}R$$

Απόδειξη

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ προκύπτει

$$\lambda_4 = AB = R\sqrt{2} \quad \text{και} \quad \alpha_4 = OK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$$



11.3 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

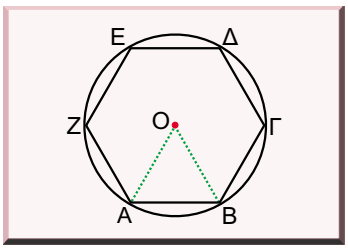
Στηριζόμενοι στη δραστηριότητα 11.1, να κατασκευάσετε κανονικό 8-γωνο, κανονικό 16-γωνο, ..., κανονικό 2^{κ}-γωνο.

Πρόβλημα 11.2

Σε δοσμένο κύκλο (Ο,R) να εγγραφεί κανονικό εξάγωνο.

Ανάλυση

Έστω ότι εγγράψαμε ένα κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ σε κύκλο (Ο,R). Επειδή ΑΒ=ΒΓ=...=ΖΑ, τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, ..., $\overset{\frown}{ZA}$ είναι ίσα μεταξύ τους και το καθένα έχει μέτρο 60°. Επομένως $A\hat{O}B = 60°$. Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ (ΟΑ=ΟΒ=R) είναι ισόπλευρο, άρα ΑΒ=R.



Κατασκευή

Τοποθετούμε στον κύκλο έξι διαδοχικές χορδές ΑΒ, ΒΓ, ..., ΖΑ ίσες με R. Επειδή στην καθεμιά αντιστοιχεί τόξο 60°, το πολύγωνο που προκύπτει είναι εξάγωνο.

Απόδειξη

Στην κατασκευή πετύχαμε το χωρισμό κύκλου σε 6 ίσα τόξα, άρα σύμφωνα με το θεώρημα 11.1 το εξάγωνο μας είναι κανονικό.

Διερεύνηση

Μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρα κανονικά εξάγωνα ίσα μεταξύ τους. Άρα θεωρούμε ότι έχουμε μία λύση.

Πόρισμα 11.4

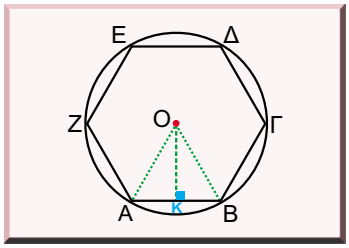
Η πλευρά λ_6 και το απόστημα α_6 του εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R κανονικού εξαγώνου δίνονται από τους τύπους:

$$\lambda_6 = R \quad \text{και} \quad \alpha_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

Απόδειξη

Από την ανάλυση προέκυψε $\lambda_6 = AB = R$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΟΚ έχουμε:

$$\alpha_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$



11.4 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στηριζόμενοι στη δραστηριότητα 11.1 να κατασκευάσετε κανονικό 12-γωνο, κανονικό 24-γωνο, ..., κανονικό $(3 \cdot 2^{\kappa})$-γωνο.

Πρόβλημα 11.3

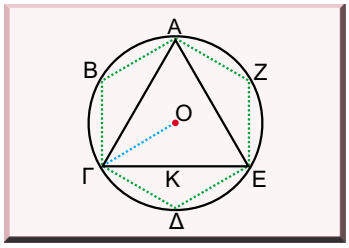
Σε δοσμένο κύκλο (Ο,R) να εγγραφεί ισόπλευρο τρίγωνο.

Ανάλυση

Έστω ότι εγγράψαμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΕ σε κύκλο (Ο,R). Επειδή ΑΓ=ΓΕ=ΕΑ, τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΕ}$, $\overset{\frown}{ΕΑ}$ είναι ίσα μεταξύ τους και το καθένα έχει μέτρο 120°, δηλαδή είναι διπλάσιο του τόξου που έχει χορδή την πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου.

Κατασκευή

Χωρίζουμε τον κύκλο σε 6 ίσα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΒΓ} = ... = \overset{\frown}{ΖΑ}$ σύμφωνα με το πρόβλημα 11.2. Αν ενώσουμε ανά δύο τα άκρα τους, προκύπτουν τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΓΕ και ΔΖΒ.



Απόδειξη

Προφανής.

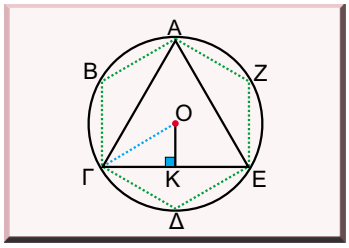
Διερεύνηση

Προφανής

Πόρισμα 11.5

Η πλευρά λ_3 και το απόστημα α_3 του εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R ισοπλεύρου τριγώνου δίνονται από τους τύπους:

$$\lambda_3 = \sqrt{3}R \quad \text{και} \quad \alpha_3 = \frac{R}{2}$$



Απόδειξη

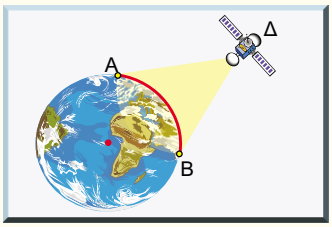
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΚ η γωνία $\widehat{ΟΓΚ} = \frac{1}{2} 60° = 30°$

οπότε $\alpha_3 = OK = \frac{1}{2}R$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ίδιο τρίγωνο ισχύει $ΓΚ = \frac{\sqrt{3}R}{2}$. Άρα $λ_3 = 2ΓΚ = \sqrt{3}\,R$. ■

11.5 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο σχήμα το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι το τόξο του ισχημερινού που μπορεί να καλύψει ο γεωστατικός δορυφόρος Δ. Η ακτίνα της γης είναι 6400 km. Το κόστος κατασκευής ενός τέτοιου δορυφόρου είναι 850.000.000 δολάρια και για να τεθεί σε τροχιά δαπανώνται για κάθε χιλιόμετρο ύψους 100.000 δολάρια. Για να καλύψει κάποιος τηλεπικοινωνιακός οργανισμός όλη την περίμετρο της γης στον ισημερινό, θα πρέπει να προτιμήσει τη λύση των τριών ή των τεσσάρων δορυφόρων. Δίνεται $\sqrt{2} = 1{,}41$.



Πρόβλημα 11.4

Σε δοσμένο κύκλο (O,R) να εγγραφεί κανονικό δεκάγωνο.

Ανάλυση

Έστω ότι εγγράψαμε κανονικό δεκάγωνο ΑΒΓ... σε κύκλο (O,R). Επειδή το τόξο $\overset{\frown}{AB} = 36°$, τότε $A\hat{O}B = 36°$ και

$$O\hat{B}A = O\hat{A}B = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°$$

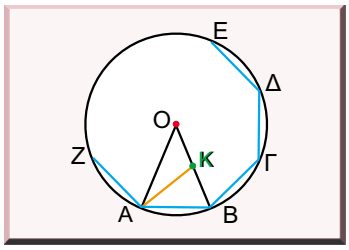
δηλαδή η γωνία $O\hat{B}A$ είναι διπλάσια της $O\hat{A}B$. Αν ΑΚ η διχοτόμος της γωνίας $O\hat{A}B$ τότε

$$B\hat{A}K = 36° \quad \text{και} \quad A\hat{K}B = 180° - 72° - 36° = 72°$$

Άρα $AB = AK$ (1)

Ακόμη $K\hat{A}O = 36°$ οπότε και $AK = OK$, άρα $OK = AB$ (2)

Στο τρίγωνο ΟΑΒ σύμφωνα με το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου ισχύει $\frac{OK}{KB} = \frac{OA}{AB}$ (3)



Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{OK}{KB} = \frac{OA}{OK} \quad \text{ή} \quad OK^2 = KB \cdot OA \quad \text{ή} \quad OK^2 = KB \cdot OB$$

Επομένως το Κ χωρίζει την ΟΒ σε μέσο και άκρο λόγο και το ΟΚ είναι το μεγαλύτερο από τα δύο τμήματα (πρόβλημα χρυσής τομής).

Κατασκευή

Φέρουμε τυχαία ακτίνα ΟΒ και χωρίζουμε αυτή σε μέσο και άκρο λόγο. Τοποθετούμε χορδές διαδοχικές και ίσες με το μεγαλύτερο από τα δύο τμήματα της ακτίνας ΟΒ.

Απόδειξη

Αν ΑΒ ένα τόξο από τα προηγούμενα και Κ το σημείο της ΟΒ που τη χωρίζει σε μέσο και άκρο λόγο, δηλαδή

$\frac{OK}{KB} = \frac{OB}{OK}$ και επειδή ΟΑ=ΟΒ, έχουμε $\frac{OK}{KB} = \frac{OA}{OK}$

Αλλά τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΟΑΒ είναι όμοια, άρα το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές και $A\hat{O}B = K\hat{A}B$. Επομένως $A\hat{O}B = 36°$ οπότε το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι το $\frac{1}{10}$ του κύκλου.

Διερεύνηση

Προφανής.

Παρατηρήσηση

Αν κατασκευάσουμε ένα κανονικό δεκάγωνο και ενώσουμε ανά δύο τα άκρα των ίσων τόξων που το καθένα έχει μέτρο ίσο με 36° μπορούμε να κατασκευάσουμε κανονικό 5-γωνο. Διχοτομώντας στη συνέχεια τα τόξα των 36° μπορούμε να κατασκευάσουμε κανονικό 20-γωνο και συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο με $5 \cdot 2^{\kappa}$ πλευρές.

11.6 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο τρίγωνο ΟΑΒ του προηγουμένου προβλήματος 11.4 έχουμε

$$OK^2 = KB \cdot OB \quad \text{ή} \quad \lambda_{10}^2 = (R - \lambda_{10})R \qquad (1)$$

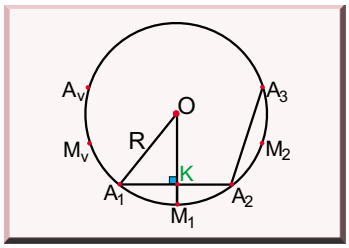
Να λύσετε την εξίσωση (1), δηλαδή να υπολογίσετε την πλευρά λ_{10} του κανονικού δεκαγώνου και στη συνέχεια το απόστημα α_{10} του κανονικού δεκαγώνου.

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Να εγγραφεί στον κύκλο αυτό ένα κανονικό πολύγωνο με 2ν πλευρές και να αποδειχτεί ότι:

$$\lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}$$ **(τύπος του Αρχιμήδη)**

Λύση



Έστω $A_1A_2...A_\nu$ κανονικό ν-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Θεωρούμε τα μέσα M_1, M_2, ..., M_ν των τόξων $\overset{\frown}{A_1A_2}, \overset{\frown}{A_2A_3}, \ldots, \overset{\frown}{A_\nu A_1}$ αντίστοιχα, οπότε ο κύκλος διαιρείται σε 2ν ίσα τόξα.

Κατασκευάζεται έτσι ένα κανονικό 2ν-γωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R). Η ακτίνα OM_1 είναι κάθετη στην A_1A_2 και διέρχεται από το μέσο της.

Άρα $$A_1K = \frac{A_1A_2}{2} = \frac{\lambda_\nu}{2}$$

Επίσης $A_1M_1 = \lambda_{2\nu}$ και $KM_1 = OM_1 - OK = R - a_\nu$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο A_1KM_1 έχουμε $A_1M_1^2 = A_1K^2 + KM_1^2$ ή

$$\lambda_{2\nu}^2 = \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 + (R - a_\nu)^2 = \frac{\lambda_\nu^2}{4} + R^2 - 2Ra_\nu + a_\nu^2 \qquad (1)$$

Αλλά $$a_\nu^2 = R^2 - \frac{1}{4}\lambda_\nu^2 \qquad (2)$$

Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται

$$\lambda_{2\nu}^2 = \frac{\lambda_\nu^2}{4} + R^2\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\lambda_\nu^2} + R^2 - \frac{1}{4}\lambda_\nu^2 \quad \text{ή}$$

$$\lambda_{2\nu}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2} \quad \text{οπότε} \quad \lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}$$

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

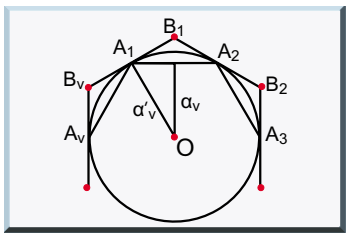
Αν λ'_ν είναι η πλευρά κανονικού ν-γώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) και λ_ν, a_ν η πλευρά και το απόστημα αντίστοιχα

κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο, η πλευρά λ'_ν του περιγεγραμμένου ν-γώνου δίνεται από τον τύπο:

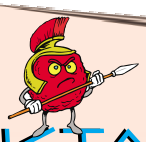
$$\lambda'_\nu = \mathbf{R} \cdot \frac{\lambda_\nu}{\alpha_\nu}$$

Απόδειξη

Έστω $A_1A_2...A_\nu$ το κανονικό ν-γωνο, το εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R) και $B_1B_2...B_\nu$ το κανονικό ν-γωνο, το περιγεγραμμένο στον κύκλο. Τα δύο κανονικά ν-γωνα έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών άρα είναι όμοια. Συνεπώς ισχύει



$$\frac{\lambda'_\nu}{\lambda_\nu} = \frac{\alpha'_\nu}{\alpha_\nu} \quad \text{ή} \quad \frac{\lambda'_\nu}{\lambda_\nu} = \frac{R}{\alpha_\nu} \quad \text{ή} \quad \lambda'_\nu = R \cdot \frac{\lambda_\nu}{\alpha_\nu}$$



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

- Μελετώντας τα προηγούμενα προβλήματα διαπιστώσαμε ότι είναι δυνατό να κατασκευάσουμε εγγεγραμμένα κανονικά ν-γωνα, όταν ο αριθμός ν είναι της μορφής:
  - $\nu=2^{\kappa}$, όπου κ ακέραιος και $\kappa\geq2$
  - $\nu=3\cdot\mathbf{2}^{\kappa}$, όπου κ ακέραιος και $\kappa\geq0$
  - $\nu=5\cdot\mathbf{2}^{\kappa}$, όπου κ ακέραιος και $\kappa\geq0$

  Επίσης, επειδή $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε κανονικό δεκαπεντάγωνο, κανονικό 30-γωνο, ... κανονικό $(15\cdot2^{\nu})$-γωνο. Άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε και κανονικά ν-γωνα με πλήθος πλευρών ν της μορφής:
  - $\nu=3\cdot\mathbf{5}\cdot\mathbf{2}^{\kappa}$, όπου κ ακέραιος και $\kappa\geq0$.
- Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν ασχοληθεί με τα κανονικά πολύγωνα, τα οποία ο Ευκλείδης καλούσε περιφραστικά, "ἰσόπλευρά τε καί ἰσογώνια". Έπίσης ήταν σε θέση να κατασκευάσουν κανονικά πολύγωνα με αριθμό πλευρών: 2^{κ}, $3\cdot2^{\kappa}$, $5\cdot2^{\kappa}$ και $3\cdot5\cdot2^{\kappa}$ (όπου κ ακέραιος) δηλαδή πολύγωνα όλων των μορφών που προαναφέραμε. Δεν κατόρθωσαν όμως να κατασκευάσουν με κανόνα και διαβήτη, ούτε κανονικό επτάγωνο, ούτε κανονικό εννιάγωνο, ούτε κανονικό ν-γωνο (όπου ν πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 5).
- Ο Αρχιμήδης κατασκεύασε κανονικό επτάγωνο που απαιτούσε όμως τη λύση μιας ανάγωγης αλγεβρικής εξίσωσης 3ου βαθμού. Επί 2000 περίπου έτη, οι προσπάθειες των μαθηματικών να επεκτείνουν τις δυνατότητες κατασκευής πολυγώνων, πέρα από τις περιπτώσεις, που αντιμετώπισαν οι Έλληνες γεωμέτρες ήταν άκαρπες.
- Πολύ αργότερα, το 1796, ο Γκάους (Carl Gauss, 1777-1855), σε ηλικία μόλις 19 ετών, ανακάλυψε τη γενική λύση του προβλήματος κατασκευής κανονικού πολυγώνου με κανόνα και διαβήτη. Συγκεκριμένα απέδειξε ότι η κατασκευή κανονικού ν-γώνου είναι δυνατή, τότε μόνο, όταν ο αριθμός ν είναι της μορφής:
  - $\nu=2^{\kappa}$, όπου κ ακέραιος

– πρώτος αριθμός της μορφής $2^{2^{\lambda}}+1$, όπου λ ακέραιος

– $\nu=2^{\kappa}\rho_1\rho_2\ldots\rho_\mu$, όπου κ ακέραιος και ρ_1, $\rho_2,\ldots,\rho_\kappa$ πρώτοι αριθμοί της μορφής $2^{2^{\lambda}}+1$.

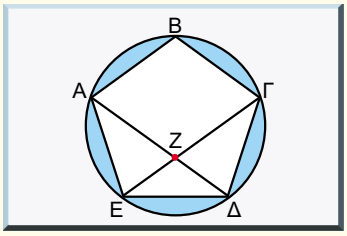
Αξίζει να αναφέρουμε ότι οι μοναδικοί πρώτοι της μορφής $2^{2^{\lambda}}+1$, που βρέθηκαν μέχρι σήμερα, είναι οι 3, 5, 17, 257 και 65537. Ουσιαστικά, λοιπόν, με το θεώρημα του Gauss προστέθηκαν στα κατασκευάσιμα κανονικά πολύγωνα των Αρχαίων τα πολύγωνα πλευρών 17, 257 και 65537. Το δεκαεπτάγωνο μελετήθηκε από τον ίδιο τον Γκάους.

• Το πολύγωνο των 65537 πλευρών ερευνήθηκε από τον Hermes μετά από προσπάθεια 10 ετών (!) και κατατέθηκε στα αρχεία του Μαθηματικού τμήματος της Gottingen.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου υποδιπλασιάζεται, όταν διπλασιαστεί ο αριθμός των πλευρών του; Στην ίδια περίπτωση, η εσωτερική γωνία διπλασιάζεται;

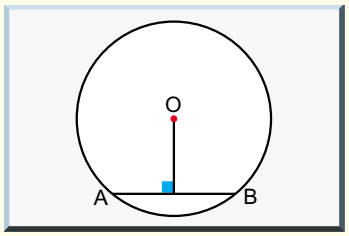
2 Στο σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι κανονικό 5-γωνο. Πόσων μοιρών είναι η γωνία $\widehat{ΓΖΔ}$; Τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΓΔΖ;



3 Να εξηγήσετε για ποιο λόγο μπορούμε να στρώσουμε ένα δάπεδο με πλακάκια σχήματος κανονικού εξαγώνου, ενώ αυτό δεν μπορεί να γίνει με το κανονικό πεντάγωνο.

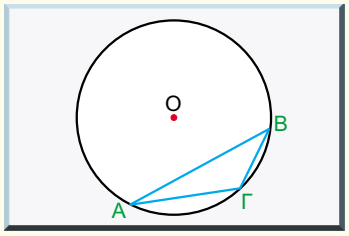
4 Από τα σχήματα ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, ποια είναι κανονικά πολύγωνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5 Να υπολογίσετε το απόστημα κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές, που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R.



6 Πόσους άξονες συμμετρίας έχει ένα κανονικό εξάγωνο; Πόσους ένα κανονικό πεντάγωνο; Ποια κανονικά πολύγωνα έχουν κέντρο συμμετρίας;

7 Στον κύκλο Ο αν $ΑΒ=λ_6$ και $ΑΓ=λ_{10}$, ποιανού κανονικού πολυγώνου πλευρά είναι η χορδή ΒΓ;



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 α) Να υπολογίσετε τη γωνία και την κεντρική γωνία ενός κανονικού εικοσαγώνου.
β) Ποιο κανονικό ν-γωνο έχει γωνία 171°;
γ) Ποιο κανονικό ν-γωνο έχει κεντρική γωνία 24°;
δ) Υπάχει κανονικό πολύγωνο με γωνία 163°.

2 Να αποδείξετε ότι η γωνία κάθε κανονικού πολυγώνου, που έχει περισσότερες από τέσσερις πλευρές, είναι αμβλεία.

3 Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι 720° και το εμβαδόν του $24\sqrt{3}$ cm^2. Να βρεθεί η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου.

4 Σε κύκλο (O,R) είναι εγγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο που έχει 9 διαγωνίους. Αν το εμβαδόν του πολυγώνου αυτού είναι $18\sqrt{3}$ cm^2, να υπολογίσετε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

5 Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου ενός κανονικού πολυγώνου είναι R=8 cm και το απόστημα του $\alpha_\nu=4\sqrt{3}$ cm. Να υπολογίσετε:
α) την πλευρά του πολυγώνου λ_ν.
β) το πλήθος ν των πλευρών του.
γ) την κεντρική του γωνία.

6 Ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (O,R). Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών τους.

7 Ο λόγος των αποστημάτων δύο κανονικών δεκαγώνων είναι $\frac{4}{7}$. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων τους και το λόγο των εμβαδών τους.

8 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90°$. Με πλευρές τις πλευρές του τριγώνου αυτού κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού κανονικά ν-γωνα. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου με πλευρά την υποτείνουσα είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δυο άλλων πολυγώνων.

9 Να περιγράψετε κανονικό εξάγωνο και ισόπλευρο τρίγωνο σε κύκλο (O,R) και να υπολογίσετε τις πλευρές τους λ'_6 και λ'_3 αντίστοιχα.

10 α) Ένα κανονικό ν-γωνο, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) έχει πλευρά λ_ν και απόστημα α_ν. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E'_ν του περιγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο κανονικού ν-γώνου είναι $E'_\nu=\frac{1}{2}\nu R^2\frac{\lambda_\nu}{\alpha_\nu}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν περιγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου σε κύκλο (O,R), καθώς και το εμβαδόν περιγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο ισόπλευρου τριγώνου.

11 Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε δυο παράλληλες χορδές $AB=\lambda_4$ και $ΓΔ=\lambda_6$ εκατέρωθεν του κέντρου O. Αν M το μέσο της χορδής ΓΔ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AMB συναρτήσει της ακτίνας R.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Αν ένα πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δύο ομόκεντρους κύκλους, να αποδείξετε ότι το πολύγωνο αυτό είναι κανονικό.

2 Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες κανονικού εξαγώνου, όταν τέμνονται, σχηματίζουν επίσης κανονικό εξάγωνο και να βρείτε το λόγο των εμβαδών των δυο αυτών εξαγώνων.

3 Ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και έστω Ε το μέσο της ΑΔ. Αν η ΒΕ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ, να υπολογίσετε το τμήμα ΕΖ συναρτήσει της ακτίνας R.

4 Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σ' αυτόν. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΔ=2ΑΒ και φέρουμε την εφαπτομένη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ=3λ_4$.

5 Δίνεται κύκλος (Ο,R) και το εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΑΒ. Να δείξετε ότι:

α) ΑΓ=ΓΕ.

β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ είναι εφαπτόμενο του κύκλου (Ο,R) στο σημείο Γ.

γ) Να υπολογιστεί το εμβαδό του τριγώνου ΑΓΕ συναρτήσει του R.

6 Σε κύκλο (Ο,R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ}$ και Ν το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι $MN=\frac{\sqrt{7}}{2}R$.

7 Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R), του οποίου οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ είναι $ΑΒ=λ_4$ και $ΑΓ=λ_3$. Να υπολογίσετε:

α) Τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Το ύψος του ΑΗ.

γ) Την πλευρά ΒΓ.

δ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

8 Να εγγράψετε κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ σε κύκλο (Ο,R) και να αποδείξετε ότι:

α) Κάθε διαγώνιός του το χωρίζει σε ένα ισοσκελές τραπέζιο και ένα ισοσκελές τρίγωνο.

β) Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΑΒΕ}$ είναι κάθετη στην πλευρά ΒΓ.

γ) Τα σημεία τομής των διαγωνίων του είναι κορυφές ενός άλλου κανονικού πενταγώνου.

δ) Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται σε σημείο Μ που τις διαιρεί σε μέσο και άκρο λόγο.

9 Έστω ΑΒΓΔΕΖΓΘΙΚ κανονικό δεκάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ–ΑΒ=R.

β) $ΑΔ\cdot ΑΒ=R^2$.

γ) $ΑΔ^2+ΑΒ^2=3R^2$.

10 Σε κύκλο (Ο,R) θεωρούμε χορδή ΑΒ με $\overset{\frown}{ΑΒ}=72°$. Φέρουμε το απόστημα ΟΚ αυτής και το προεκτείνουμε κατά ΚΕ=ΚΟ. Αν Γ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$, να αποδείξετε ότι $ΓΕ=λ_{10}$.

11 Αν $E_{2ν}$ είναι το εμβαδό του κανονικού 2ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) και $P_ν$ η περίμετρος του κανονικού ν-γώνου, που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι $E_{2ν}=\frac{1}{2}P_ν\cdot R$.

12 Αν $α_{2ν}$ και $α_ν$ είναι τα αποστήματα δυο κανονικών πολυγώνων με 2ν και ν πλευρές αντίστοιχα, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R, να αποδείξετε ότι $α_{2ν}=\sqrt{\frac{R^2+Rα_ν}{2}}$.

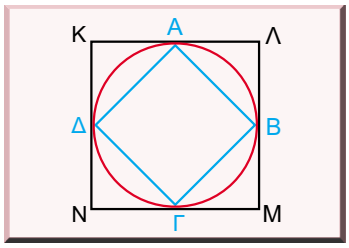
13 Να εγγράψετε σε κύκλο (Ο,R) κανονικό οκτάγωνο και να υπολογίσετε την πλευρά, το απόστημα και το εμβαδό του συναρτήσει της ακτίνας R.

14 Ένα κανονικό οκτάγωνο ΑΒΓΔΕΖΗΘ και ένα τετράγωνο ΑΓΕΗ είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο με ακτίνα R=3 cm. Να βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας που περικλείεται από τις περιμέτρους αυτών των δυο κανονικών πολυγώνων.

11.2 Μήκος κύκλου

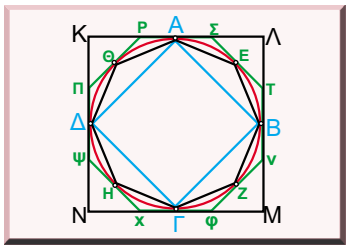
11.2.1 Προσέγγιση του μήκους ενός κύκλου

Θεωρούμε κύκλο (Ο,R), ένα εγγεγραμμένο σ' αυτόν τετράγωνο ΑΒΓΔ και ένα περιγεγραμμένο τετράγωνο ΚΛΜΝ.



Παρατηρούμε ότι η περίμετρος του εγγεγραμμένου τετραγώνου είναι μικρότερη από την περίμετρο του περιγεγραμμένου τετραγώνου, δηλαδή $P_4 < P'_4$ (ΑΒ<ΑΛ+ΛΒ, ΒΓ<ΒΜ+ΜΓ,...).

Στο δεύτερο σχήμα διπλασιάσαμε το πλήθος των πλευρών των δύο κανονικών πολυγώνων και προέκυψαν δυο κανονικά οκτάγωνα, ένα εγγεγραμμένο και ένα περιγεγραμμένο.



Ομοίως παρατηρούμε, ότι η περίμετρος του εγγεγραμμένου οκταγώνου είναι μικρότερη από την περίμετρο του περιγεγραμμένου δηλαδή $P_8 < P'_8$ (ΑΕ<ΑΣ+ΣΕ, ΕΒ<ΕΤ+ΤΒ, ...).

Παρατηρούμε επίσης ότι $P_4 < P_8$ δηλαδή, το εγγεγραμμένο κανονικό οκτάγωνο έχει περίμετρο μεγαλύτερη από το εγγεγραμμένο τετράγωνο και ότι $P'_4 > P'_8$, δηλαδή το περιγεγραμμένο κανονικό οκτάγωνο έχει περίμετρο μικρότερη από το περιγεγραμμένο κανονικό τετράγωνο. Αυτές οι ανισοτικές σχέσεις των περιμέτρων διατηρούνται, αν συνεχίσουμε επ' αόριστο να διπλασιάζουμε το πλήθος των πλευρών των πολυγώνων. Η περίμετρος κάθε νέου εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου είναι μεγαλύτερη από την περίμετρο του αμέσως προηγούμενου, η περίμετρος κάθε νέου περιγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου είναι μικρότερη από την περίμετρο του αμέσως προηγούμενου και πάντοτε η περίμετρος P_ν του εγγεγραμμένου θα είναι μικρότερη από την περίμετρο P'_ν του περιγεγραμμένου.

Αποδεικνύεται ότι για κάθε κύκλο υπάρχει μόνο ένα ευθύγραμμο τμήμα που είναι μεγαλύτερο από την περίμετρο P_ν κάθε κανονικού εγγεγραμμένου πολυγώνου και μικρότερο από την περίμετρο P'_ν κάθε κανονικού περιγεγραμμένου πολυγώνου και καθώς το πλήθος των πλευρών ν αυξάνει απεριόριστα η διαφορά του τμήματος και των περιμέτρων τείνει να μηδενιστεί. Αυτό το ευθύ-

γραμμο τμήμα το ονομάζουμε **ανάπτυγμα του κύκλου** και το μήκος του το ονομάζουμε **μήκος του κύκλου** και το συμβολίζουμε με L.

11.2.2 Μήκος κύκλου - Μήκος τόξου

Μήκος κύκλου

Το μήκος του κύκλου είναι ένας αριθμός L τον οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε αρκεί να κατασκευάσουμε ένα κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο ή περιγεγραμμένο στον κύκλο και να αυξάνουμε διαρκώς το πλήθος των πλευρών του. Η περίμετρος του πολυγώνου αυτού προσεγγίζει το μήκος του κύκλου, αλλά δεν μπορεί να το εκφράσει ακριβώς. Ο υπολογισμός του L γίνεται βάσει του θεωρήματος που παραθέτουμε αμέσως χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 11.6

Ο λόγος του μήκους ενός κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του είναι σταθερός αριθμός, ο ίδιος για όλους τους κύκλους.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε διεθνώς με το π (από το πρώτο γράμμα της ελληνικής λέξης περιφέρεια) και είναι ένας άρρητος αριθμός. Μια προσέγγιση αυτού με πέντε δεκαδικά ψηφία είναι η π=3,14159.

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι ο τύπος υπολογισμού του μήκους του κύκλου από την ακτίνα του. Συγκεκριμένα ισχύει.

Θεώρημα 11.7

Το μήκος L ενός κύκλου ακτίνας R είναι ίσο με L=2πR.

Απόδειξη

Πράγματι ισχύει $\frac{L}{2R}=\pi$, απ' όπου προκύπτει ότι L=2πR. ■

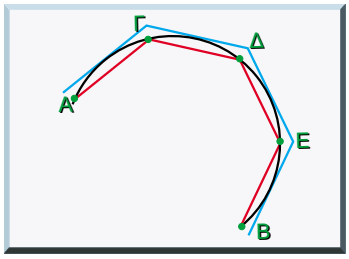
Μήκος τόξου

Για τον προσδιορισμό του μήκους κύκλου στηριχθήκαμε στα εγγεγραμμένα και περιγεγραμένα κανονικά πολύγωνα. Στη συνέχεια με τα δύο θεωρήματα που ακολούθησαν προχωρήσαμε

στον υπολογισμό του.

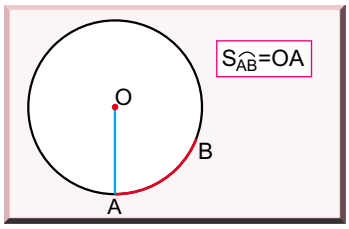
Για να προσδιορίσουμε την έννοια του μήκους ενός τόξου θα ακολουθήσουμε αντίστοιχη πορεία.

Αν σ' ένα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ θεωρήσουμε μια εγγεγραμμένη και μια περιγεγραμμένη τεθλασμένη γραμμή με ίσες όλες τις πλευρές της και ακολουθήσουμε μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία διπλασιασμού του αριθμού των πλευρών τους, θα καταλήξουμε σε παρόμοια συμπεράσματα, όπως και με τον κύκλο. Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι υπάρχει ένα μοναδικό ευθύγραμμο τμήμα με μήκος S πάντοτε ενδιάμεσο των μηκών των περιμέτρων των γραμμών αυτών και το οποίο οι περίμετροι το προσεγγίζουν. Το μήκος S αυτού του τμήματος το ονομάζουμε **μήκος του τόξου**.



Ένας κύκλος ακτίνας R είναι τόξο 360° και έχει μήκος L=2πR. Το $\frac{1}{360}$ αυτού του κύκλου που είναι ένα τόξο 1° θα έχει μήκος $S = \frac{1}{360}2\pi R$. Επομένως ένα τόξο μ° που ανήκει σε κύκλο ακτίνας R θα έχει μήκος $S = \mu^\circ \frac{1}{360}2\pi R$ ή τελικά $S = \pi R\frac{\mu^\circ}{180^\circ}$.

Σημείωση



Μέχρι τώρα συναντήσαμε δύο μονάδες μέτρησης των γωνιών και των τόξων: την ορθή γωνία και τη μοίρα. Μια ακόμη μονάδα μέτρησης των τόξων είναι το **ακτίνιο ή rad**. Ορίζουμε ως τόξο ενός ακτινίου (1 rad) το τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου στον οποίο ανήκει.

Ο κύκλος έχει μήκος L=2πR, δηλαδή 2π ακτίνες ή 2π φορές το μήκος ενός τόξου 1 rad, οπότε το πλήρες τόξο του κύκλου έχει άνοιγμα 2π ακτίνια. Έτσι οι 360° αντιστοιχούν σε 2π ακτίνια και αυτή η σχέση μας επιτρέπει να μετατρέπουμε το μέτρο ενός τόξου από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα. Αν α το μέτρο του τόξου σε ακτίνια και μ σε μοίρες ισχύει η αναλογία

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ} \quad \text{ή} \quad \alpha = \frac{\pi\mu^\circ}{180}$$

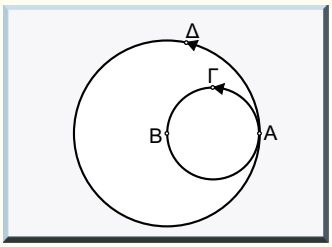
Η σχέση $S = \pi R\frac{\mu^\circ}{180^\circ}$ που δίνει το μήκος ενός τόξου μ μοιρών γράφεται $S = \alpha R$, όπου α το μέτρο του τόξου σε ακτίνια.

Φυσικά, όταν μια επίκεντρη γωνία βαίνει σε τόξο α ακτινίων, τότε λέμε ότι και η γωνία είναι α ακτινίων.

Από τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$ αν πάρουμε μια προσέγγιση του $\pi \approx 3{,}14159$ προκύπτει ότι το ένα ακτίνιο είναι ανάμεσα στις $57^\circ\ 17'\ 44''$ και στις $57^\circ\ 17'\ 45''$.

11.7 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δύο κυκλικοί στίβοι έχουν μήκος 800 m και 400 m αντίστοιχα, και εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο Α, όπου και βρίσκονται δύο δρομείς Γ και Δ. Οι δρομείς ξεκινούν ταυτόχρονα να τρέχουν στους δύο κυκλικούς στίβους ο Γ στον εσωτερικό και ο Δ στον εξωτερικό με την ίδια ταχύτητα 2 m/sec και προς την ίδια φορά.



Ένας παρατηρητής Β βρίσκεται στο κέντρο του μεγάλου στίβου (αντιδιαμετρικά του Α στον μικρό στίβο).

Να αποδείξετε ότι:

α) Για κάποιο χρονικό διάστημα t_1 ο παρατηρητής Β δεν μπορεί να δει το δρομέα Δ διότι ανάμεσά τους παρεμβάλλεται ο δρομέας Γ.

β) Για κάποιο άλλο χρονικό διάστημα t_2 κανένας δρομέας δεν μπορεί να δει τον άλλο δρομέα διότι ανάμεσά τους παρεμβάλλεται ο παρατηρηρής Β.

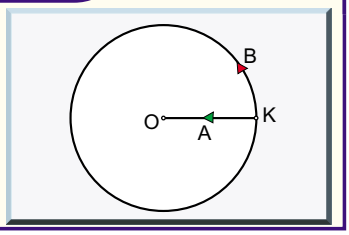
γ) Για κάποιο τρίτο διάστημα t_3 ο παρατηρητής Β δεν μπορεί να δει το δρομέα Δ διότι ανάμεσά τους παρεμβάλλεται ο δρομέας Γ.

δ) Για το χρονικό διάστημα t_4 κανένας δρομέας δεν μπορεί να δει τον άλλο διότι ανάμεσά τους παρεμβάλεται ο παρατηρητής Β.

ε) Να προσδιορίσετε τα διαδοχικά διαστήματα t_1, t_2, t_3, t_4.

11.8 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Από ένα σημείο Κ ενός κυκλικού στίβου ξεκινούν την ίδια χρονική στιγμή δύο δρομείς Α και Β και τρέχουν με την ίδια σταθερή ταχύτητα κινούμενοι ο ένας κατά μήκος της ακτίνας και ο άλλος στην περιφέρεια του στίβου.



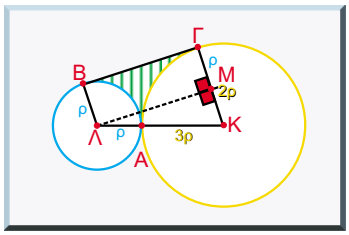
Ένας κριτής με το χρονόμετρο υπολογίζει ότι ο δρομέας Α φτάνει στο κέντρο του στίβου ακριβώς σε 20 δευτερεόλεπτα. Να αποδείξετε ότι, όση ακρίβεια και να έχει το χρονόμετρο, είναι αδύνατο να μετρηθεί ο ακριβής χρόνος που θα χρειαστεί ο δρομέας Β για να κάνει μια πλήρη στροφή του στίβου.

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο κύκλοι (Λ,ρ) και (Κ,3ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Αν ΒΓ το κοινό εφαπτόμενο τμήμα, να υπολογίσετε την περίμετρο του μικτογράμμου τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Αν φέρουμε τη διάκεντρο ΚΛ και τις ακτίνες ΛΒ και ΚΓ που καταλήγουν στα σημεία επαφής, σχηματίζεται το τραπέζιο ΛΒΓΚ με βάσεις ΚΓ=3ρ και ΛΒ=ρ.



Η ζητούμενη περίμετρος είναι το άθροισμα των μηκών των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και του μήκους του τμήματος ΒΓ. Φέρουμε από το Λ την ΛΜ⊥ΚΓ. Από το σχηματιζόμενο ορθογώνιο ΒΓΜΛ προκύπτει ΓΜ=ΒΛ=ρ και ΚΜ=3ρ−ρ=2ρ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε την ΚΛ=4ρ και την $KM = 2\rho = \frac{1}{2}\Lambda K$ άρα $M\hat{\Lambda}K = 30^\circ$ οπότε $M\hat{K}A = 60^\circ$ και $B\hat{\Lambda}A = 120^\circ$.

Το μήκος της ΜΛ δίνεται από τη σχέση $M\Lambda = \sqrt{K\Lambda^2 - MK^2}$ και $M\Lambda = \sqrt{(4\rho)^2 - (2\rho)^2}$ ή $M\Lambda = 2\rho\sqrt{3}$. Άρα και $B\Gamma = 2\rho\sqrt{3}$.

Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ δίνεται από τη σχέση

$$S_1 = \frac{\pi\cdot\rho\cdot 120^\circ}{360^\circ} \quad \text{άρα} \quad S_1 = \frac{\pi\cdot\rho}{3}$$

και το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι ίσο με

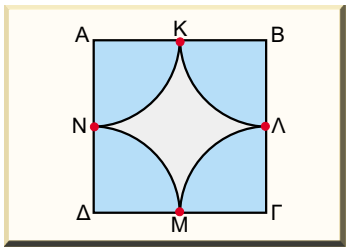
$$S_2 = \frac{\pi\cdot 3\rho\cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\cdot\rho}{2}$$

Η περίμετρος του μικτόγραμμου τριγώνου είναι

$$\frac{\pi\cdot\rho}{2} + \frac{\pi\cdot\rho}{3} + 2\rho\sqrt{3}$$

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Με κέντρα τις κορυφές του και ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ γράφουμε τεταρτοκύκλια στο εσωτερικό του τετραγώνου. Να υπολογίσετε την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τετραπλεύρου.



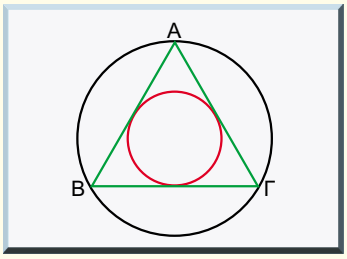
Απόδειξη

Το μήκος του κάθε τεταρτοκυκλίου είναι ίσο με $S = \pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\alpha^2}{16}$

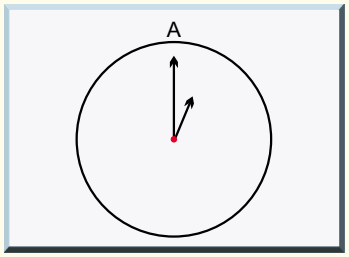
Επομένως η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τετραπλεύρου είναι 4S δηλαδή $\frac{\pi\alpha^2}{4}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Στο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. Το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου είναι $1+2\sqrt{5}$. Πόσο είναι το μήκος του περιγεγραμμένου κύκλου;



2 Σε ένα ρολόι τοίχου ο δείκτης των λεπτών έχει μήκος 10 cm. Σε μια ώρα και 40 λεπτά, πόσων μοιρών τόξο γράφει το άκρο του; Πόσο είναι το μήκος αυτού του τόξου; Αν Α η αρχική θέση του άκρου του δείκτη αυτού και Β η θέση του μετά από μια ώρα και 40 λεπτά, ποια είναι η απόσταση ΑΒ;



3 Ο λόγος των μηκών δυο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των διαμέτρων τους;

4 Το μήκος ενός τόξου 60° είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο από το μήκος της ακτίνας του κύκλου στον οποίο ανήκει;

5 Πόσο είναι το άθροισμα των μηκών δυο κύκλων όταν το άθροισμα των διαμέτρων τους είναι 10 cm.

6 Τι διαφορά έχουν τα μήκη δυο κύκλων όταν οι ακτίνες τους διαφέρουν κατά 1 cm;

7 Το άθροισμα των μηκών δύο διαμέτρων είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το μήκος του κύκλου;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Η διάμετρος τροχού ποδηλάτου είναι 0,50 m. Πόσες στροφές θα κάνει σε μια διαδρομή 1 km.

2 Δυο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ ενός κύκλου (Ο,R) έχουν μέτρα $\frac{π}{5}$ rad και 30° αντίστοιχα. Αν το $\overset{\frown}{AB}$ έχει μήκος π, να υπολογιστεί το μήκος του $\overset{\frown}{ΓΔ}$.

3 Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒ και ΑΓ έχουν μήκη 12 cm και 16 cm αντίστοιχα. Με διάμετρο την υποτείνουσά του γράφουμε κύκλο. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου αυτού.

4 Σε κύκλο ακτίνας 8 cm εγγράφουμε κανονικό εξάγωνο. Να βρείτε το λόγο του μήκους του κύκλου προς την περίμετρο του εξαγώνου.

5 Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου είναι $\frac{πα\sqrt{3}}{3}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 2α. Με κέντρα τις κορυφές του τριγώνου και ακτίνα α γράφουμε τόξα στο εσωτερικό του τριγώνου με άκρα στις πλευρές του. Να βρεθεί η περίμετρος του σχηματιζόμενου στο εσωτερικό του τριγώνου καμπυλόγραμμου τριγώνου.

2 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α. Με κέντρα τις κορυφές του και ακτίνα α γράφουμε τόξα με άκρα τις άλλες δυο κορυφές. Να υπολογιστεί η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

3 Δίνεται ένας κύκλος (Ο,R) και διαδοχικά τα σημεία του Α, Β, Γ, ώστε να είναι $AB = R\sqrt{2}$ και $ΒΓ = R\sqrt{3}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}$ και $\overset{\frown}{ΓA}$.

4 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, β=4 και γ=3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ εγγράφουμε κύκλο (Ο,ρ). Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου.

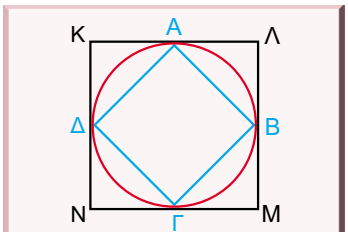
5 Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ=2R. Με διαμέτρους ΟΑ και ΟΒ γράφουμε ημικύκλια στο εσωτερικό του αρχικού ημικυκλίου. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου που εφάπτεται των τριών ημικυκλίων.

6 Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, ΒΓ=α και $AB = \frac{α}{2}$. Με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΑ γράφουμε τόξο που τέμνει τη ΒΓ στο Μ και με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΜ γράφουμε τόξο που τέμνει την ΑΓ στο Ν. Να βρεθεί η περίμετρος του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΝ.

11.3 Εμβαδό κυκλικού δίσκου

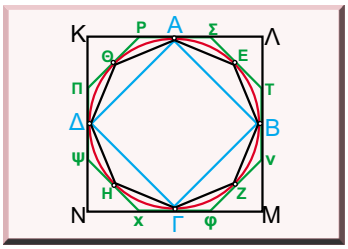
11.3.1 Προσέγγιση του εμβαδού κυκλικού δίσκου

Θα ορίσουμε το εμβαδό του κύκλου με παρόμοια διαδικασία που ορίσαμε το μήκος του.



Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (O,R) και δύο κανονικά τετράγωνα το ένα εγγεγραμμένο και το άλλο περιγεγραμμένο σ' αυτόν με εμβαδά E_4 και E'_4, αντίστοιχα.

Διπλασιάζοντας διαδοχικά το πλήθος των πλευρών τους μεταβαίνουμε στα κανονικά 8-γωνα, 16-γωνα κτλ. και παίρνουμε έτσι τις ακολουθίες των εμβαδών τους για τις οποίες ισχύει αντίστοιχη ανισοτική σχέση που ισχύει και για τις περιμέτρους τους



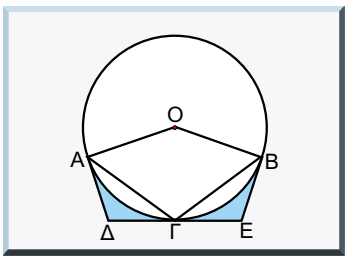
$$E_4<E_8<E_{16}<\ldots<\ldots<\ldots E'_{16}<E'_8<E_4$$

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός E ο οποίος είναι μεγαλύτερος από κάθε E_ν (εμβαδόν εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου) και μικρότερος από κάθε E'_ν (εμβαδό περιγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου).

Ο αριθμός αυτός E ονομάζεται **εμβαδό του κυκλικού δίσκου** και αποδεικνύεται ότι $E=\pi R^2$.

11.3.2 Εμβαδό κυκλικού τομέα

Θεωρούμε το μέσον Γ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, σχηματίζουμε το πολύγωνο ΟΑΓΒ, και φέρνοντας τις εφαπτομένες στα Α, Γ και Β σχηματίζουμε το πολύγωνο ΟΑΔΕΒ. Συνεχίζοντας διαδοχικά την ίδια διαδικασία (μέσα των τόξων και εφαπτομένες) το εμβαδό κάθε νέου εγγεγραμμένου πολυγώνου είναι μεγαλύτερο από το εμβαδό του αμέσως προηγούμενου και είναι μικρότερο από το εμβαδό κάθε νέου περιγεγραμμένου το οποίο είναι μεγαλύτερο από το εμβαδό του αμέσως προηγούμενου. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μόνο ένα αριθμός E_τ που είναι μεγαλύτερος από το εμβαδό κάθε εγγεγραμμένου και μικρότερος από το εμβαδόν κάθε περιγεγραμ-



μένου πολυγώνου. Αυτόν τον αριθμό ονομάζουμε **εμβαδό του κυκλικού τομέα**.

Για τον υπολογισμό του εμβαδού αυτού θεωρούμε τον κύκλο ως κυκλικό τομέα 360°. Το εμβαδό του, ως γνωστό, είναι $E=\pi R^2$. Άρα, αν θεωρήσουμε έναν κυκλικό τομέα με τόξο και επίκεντρη γωνία 1°, το εμβαδό του θα είναι το $\frac{1}{360}$ του εμβαδού του κύκλου, δηλαδή $E_\tau = \pi R^2 \frac{1}{360}$.

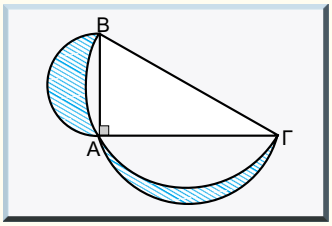
Άρα ένας κυκλικός τομέας με τόξο και επίκεντρη γωνία μ° θα έχει εμβαδό $E_\tau = \frac{\pi R^2 \mu^\circ}{360^\circ}$.

Αν η επίκεντρη γωνία του κυκλικού τομέα είναι α rad (ακτίνια), λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση $\alpha = \frac{\pi\mu^\circ}{180^\circ}$, έχουμε για το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $E_\tau = \frac{\pi R^2 \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\mu R^2}{180^\circ \cdot 2} = \frac{\alpha R^2}{2}$.

11.9 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

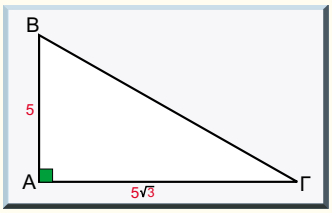
Τα τρία τόξα είναι ημικύκλια με διαμέτρους τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι το σκιασμένο εμβαδό είναι ίσο με το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.



11.10 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε μία τριγωνική αυλή οι διαστάσεις είναι 5 m και $5\sqrt{3}$ m. Στα άκρα της υποτείνουσας δένουμε δύο σκύλους με αλυσίδες ίδιου μήκους τον καθένα. Ποιο το μέγιστο μήκος της αλυσίδας για κάθε σκύλο ώστε να μην μπορούν να έρθουν σε επαφή; Τι ποσοστό της αυλής μπορεί να φυλάξει ο κάθε σκύλος; Ποιο το ελάχιστο μήκος της αλυσίδας του κάθε σκύλου ώστε να μπορεί να φυλαχθεί ολόκληρη η αυλή;

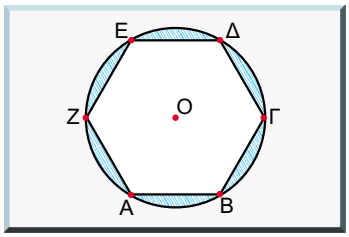


1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί το εμβαδό του μέρους ενός κύκλου (Ο,R) που βρίσκεται εκτός του εγγεγραμένου κανονικού εξαγώνου.

Λύση

Αν ΑΒΓΔΕΖ το κανονικό εξάγωνο, τότε



$$\lambda_6=R, \quad a_6=\frac{\sqrt{3}R}{2} \quad \text{και} \quad P_6=6R$$

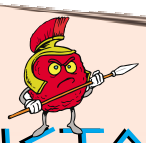
Το εμβαδό είναι:

$$E_6=\frac{1}{2}P_6a_6 \quad \text{ή} \quad E_6=\frac{1}{2}6R\frac{\sqrt{3}R}{2}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

Το εμβαδό του κύκλου είναι $E=\pi R^2$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E'=E-E_6=\pi R^2-\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}=R^2\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Σ' όλους τους γνωστούς αρχαίους πολιτισμούς διαπιστώθηκαν προσπάθειες μέτρησης του κύκλου και αναζήτησης μιας προσεγγιστικής τιμής του π.

Στον αρχαίο Αιγυπτιακό πάπυρο του Rhind (1800 π.Χ.) αναφέρεται (με αριθμητικό παράδειγμα) ότι το εμβαδόν ενός κύκλου, που έχει διάμετρο δ, είναι ίσο με $\frac{64}{81}\delta^2$. Ο τύπος αυτός οδηγεί στην προσεγιστική τιμή του

$$\pi\approx\left(\frac{16}{9}\right)^2=\frac{256}{81}\approx 3{,}16049\,.$$

Οι Βαβυλώνιοι επίσης ασχολήθηκαν με τη μέτρηση του κύκλου. Έτσι, από μία πινακίδα της δεύτερης χιλιετηρίδας π.Χ., που βρέθηκε σε ανασκαφές στην αρχαία πόλη Σούδα, προκύπτει ότι π≈3. Την τιμή αυτή του π υιοθέτησαν και μας μετέδωσαν οι Ιουδαίοι με τη Βίβλο. Αναφέρεται ότι στο Ναό του Σολομώντα είχε κατασκευαστεί δεξαμενή διαμέτρου 10 και περιμέτρου 30 μονάδων μήκους.

Στις προηγούμενες περιπτώσεις δεν είναι γνωστός ο τρόπος που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του π. Η πρώτη φορά που συναντάται με μαθηματική αυστηρότητα η μελέτη του εμβαδού του κύκλου είναι στο 12ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, όπου αποδεικνύεται ότι ο λόγος των εμβαδών των κύκλων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου των διαμέτρων τους. Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.), στο έργο του "Κύκλου μέτρηση", απέδειξε τους γνωστούς τύπους που δίνουν το μήκος του κύκλου και το εμβαδό του κυκλικού δίσκου.

Χρησιμοποιώντας ένα κανονικό πολύγωνο με 96 πλευρές εγγεγραμμένο σε κύκλο, βρήκε ότι

$$\frac{223}{71}<\pi<\frac{220}{70} \quad \text{ή} \quad 3{,}14084<\pi<3{,}14285$$

Αργότερα ο Πτολεμαίος (87-165 μ.Χ.) βρήκε ακόμα στενότερα όρια για το π.

Η μέτρηση του μήκους κύκλου και του εμβαδού κυκλικού δίσκου στην Αρχαία Ελλάδα, είναι συνυφασμένη με το περίφημο πρόβλημα τετραγωνισμού του κύκλου, δηλαδή της κατασκευής τετραγώνου που να έχει το ίδιο εμβαδόν με δοθέντα κύκλο χρησιμοποιώντας κανόνα και διαβήτη. Το δυσεπίλυτο του προβλήματος έγκειται στην κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος μήκους π.

Σύσσωμη η Αρχαία Ελληνική Μαθηματική Επιστήμη εργάστηκε και αναλώθηκε στο διασημότερο γεωμετρικό πρόβλημα της ιστορίας. Από το 500 π.Χ., όπου πρωτοασχολήθηκε ο Αναξαγόρας, μέχρι τον Πάππο 300 μ.Χ., προσέγγισαν τον π ικανοποιητικά.

Η σειρά των επίδοξων τετραγωνιστών του κύκλου συνεχίζεται με τον Κινέζο Chung Chin (470 μ.Χ.), ο οποίος έφτασε στη σχέση

$$3{,}1415926<\pi<3{,}1415927$$

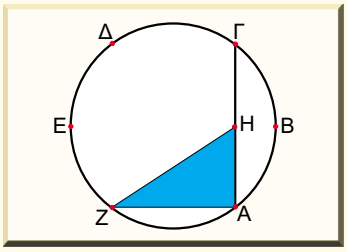
Περί το 1430 ο Άραβας αστρονόμος Al Kashi δημοσίευσε ειδική μελέτη για την περιφέρεια κύκλου, στην οποία έδωσε τιμή του π με ακρίβεια 16 δεκαδικών ψηφίων.

Επιστρέφουμε στον Ευρωπαϊκό χώρο, όπου μετά το σκοτεινό Μεσαίωνα, ο Νεύτωνας με την ανακάλυψη του απειροστικού Λογισμού, δημιούργησε νέες μεθόδους εξαιρετικής ισχύος για την αντιμετώπιση προβλημάτων υπολογισμού. Έτσι ο J. Lambert (1761) απέδειξε ότι ο π δεν είναι ρητός αριθμός και επομένως έχει άπειρα ψηφία που δεν είναι περιοδικά.

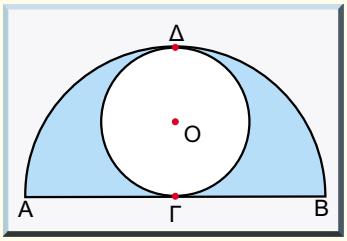
Η ενδιαφέρουσα αυτή ιστορική αναδρομή καταλήγει στο 1882 όπου ο F. Lindemann αποδεικνύει το αδύνατο του προβλήματος. (Απέδειξε ότι ο π δεν είναι αλγεβρικός αλλά υπερβατικός αριθμός. Τούτο σημαίνει ότι δεν είναι ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές και επομένως τμήμα μήκους π δεν είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

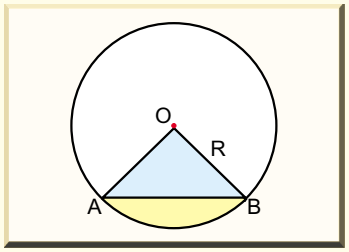
1 Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ είναι κορυφές κανονικού εξαγώνου και το Η το μέσο της χορδής ΑΓ. Είναι το σκιασμένο εμβαδόν το $\frac{1}{6}$ του εμβαδού του κύκλου;



2 Ο κύκλος Ο εφάπτεται στο μέσο Δ του ημικυκλίου $\overset{\frown}{ΑΔΒ}$ και στο μέσο Γ της διαμέτρου του. Τι σχέση έχει το εμβαδόν του με το σκιασμένο εμβαδόν;



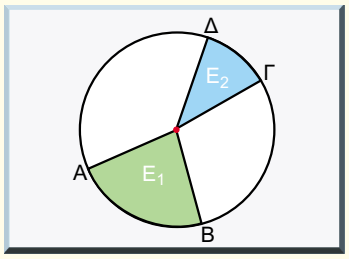
3 Αν όλο το σκιασμένο εμβαδόν είναι $\frac{1}{4}\pi R^2$, τότε το έντονα σκιασμένο πόσο είναι;



4 Τα εμβαδά δυο κύκλων είναι ανάλογα των ακτίνων τους;

5 Αν το εμβαδόν ενός κύκλου (Κ,R) είναι διπλάσιο από το εμβαδόν ενός άλλου κύκλου (Λ,ρ), θα ισχύει το ίδιο και με τα μήκη τους;

6 Αν το τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$ έχει διπλάσιο μήκος από το τόξο $\overset{\frown}{ΓΔ}$, τι σχέση έχουν τα εμβαδά E_1 και E_2.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $α = 8\sqrt{2}$. Με κέντρο το κέντρο του τετραγώνου και ακτίνα το μισό της διαγωνίου του, γράφουμε κύκλο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχήματος που μένει αν από το τετράγωνο αφαιρέσουμε τον κυκλικό δίσκο.

2 Δυο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου, που περικλείεται από τους δυο κύκλους και μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους.

3 Σε κύκλο (Ο,R) εγγράφουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και στο τετράγωνο εγγράφουμε κύκλο (Ο,ρ). Να αποδείξετε ότι ο δεύτερος κύκλος χωρίζει τον πρώτο σε δυο ισοδύναμα μέρη.

4 Έστω ΑΒ και ΓΔ δυο κάθετες διάμετροι κύκλου (Ο,R). Με διάμετρο ΑΟ γράφουμε μέσα στο τεταρτημόριο ΑΟΓ ένα ημικύκλιο.

Με διάμετρο ΒΟ γράφουμε μέσα στο τεταρτοκύκλιο ΒΟΔ ένα ημικύκλιο. Φέρουμε την ΟΕ διχοτόμο της γωνίας $\widehat{AOΔ}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν συνολικά των γραμμοσκιασμένων χωρίων.

5 Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με ΑΒ=α και ΒΓ=2α. Γράφουμε εκτός αυτού ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ και εντός του ορθογωνίου τα τεταρτημόρια (Α,α) και (Δ,α). Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα τρία αυτά τόξα.

6 Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο πλευράς α. Γράφουμε στο εσωτερικό του τετραγώνου ημικύκλιο με διάμετρο ΓΔ. Γράφουμε στο εσωτερικό του ημικυκλίου τεταρτοκύκλιο (Γ,α). Να υπολογιστούν τα εμβαδά των τριών χωρίων στα οποία χωρίστηκε το τετράγωνο.

7 Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά στα σημεία Α, Β και Γ. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

8 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α. Με κέντρα τις δυο απέναντι κορυφές του και ακτίνα α, γράφουμε στο εσωτερικό του δυο τεταρτοκύκλια. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχήματος που περιέχεται μεταξύ των δυο τεταρτοκυκλίων.

9 Κύκλος με ακτίνα R είναι εγγεγραμμένος σε τετράγωνο ΑΒΓΔ. Με κέντρο την κορυφή Α του τετραγώνου ΑΒΓΔ και ακτίνα τη διαγώνιό του ΑΓ, γράφουμε κύκλο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου και το λόγο των εμβαδών των δυο κυκλικών δίσκων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Με κέντρο Γ και ακτίνα α γράφουμε τεταρτοκύκλιο στο εσωτερικό του τετραγώνου. Το τεταρτοκύκλιο αυτό τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο σημείο Ζ. Γράφουμε και το τεταρτοκύκλιο με κέντρο Α και ακτίνα ΑΖ στο εσωτερικό του τετραγώνου. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται εντός του τετραγώνου και εκτός των δυο τεταρτοκυκλίων.

2 Δίνεται κύκλος (Ο,R). Από ένα εξωτερικό σημείο του Β φέρουμε την εφαπτομένη ΒΑ. Αν είναι ΟΒ=2R, να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΔΒ.

3 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=Α, ΒΓ=α και $\widehat{A}=30°$. Με διάμετρο ΒΓ και προς το μέρος του Α γράφουμε ημικύκλιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των δυο κυκλικών τμημάτων που σχηματίζονται από το ημικύκλιο και τις ίσες πλευρές του τριγώνου.

4 Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που είναι εγγεγραμμένος σε κυκλικό τομέα ακτίνας R και γωνίας 120°.

5 Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΑΚΒ, κέντρου Κ και ακτίνας R. Γράφουμε εντός του τεταρτοκυκλίου αυτού ημικύκλια με διαμέτρους ΚΑ και ΚΒ, που τέμνονται στο σημείο Γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, που περιλαμβάνεται μεταξύ των δυο ημικυλίων και του αρχικού τεταρτοκυκλίου.

6 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 2α. Με διαμέτρους τις πλευρές του γράφουμε ημικύκλια μέσα στο τετράγωνο. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του τετράφυλλου που σχηματίζεται.

7 Έστω Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ διαδοχικές κορυφές κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Κ,R). Εντός αυτού γράφουμε τα τόξα των κύκλων (Β,ΒΑ), (Δ,ΔΕ) και (Γ,ΓΑ).

α) Να δείξετε ότι τα δυο πρώτα τόξα τέμνονται στο Κ.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου που ορίζεται από τα τρία αυτά τόξα.

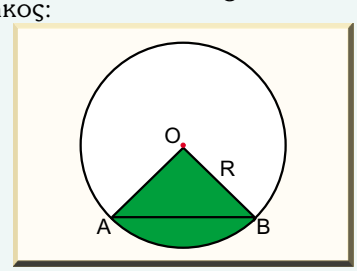
8 Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΚΑΒ. Γράφουμε εντός του τεταρτοκυκλίου αυτού τόξο ΚΓ με κέντρο Β και ακτίνα ΒΚ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΚΓ.

9 Έστω ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ,R). Εντός του κύκλου Κ γράφουμε τόξα με κέντρα Α, Γ, Ε και ακτίνα R. Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των τριών κυρτών καμπυλόγραμμων χωρίων, που σχηματίζουν τα τόξα αυτά, τεμνόμενα ανά δυο.

10 Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μια χορδή του $AB=\lambda_3$. Στα σημεία Α, Β φέρουμε εφαπτόμενες του κύκλου, που τέμνονται στο σημείο Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του σχήματος, που ανήκει στο τρίγωνο ΑΒΓ αλλά δεν ανήκει στον κυκλικό δίσκο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

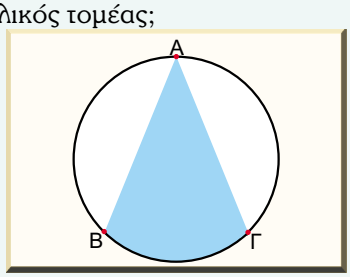
1 Αν ο λόγος του σκιασμένου προς το μη σκιασμένο εμβαδόν είναι $\frac{1}{3}$, τότε η χορδή ΑΒ έχει μήκος:



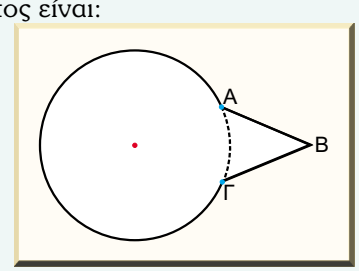
Α) ❑ R Β) ❑ $R\sqrt{2}$

Γ) ❑ $R\sqrt{3}$ Δ) ❑ $\frac{1}{2}R$

2 Αν τα σημεία Α, Β και Γ χωρίζουν τον κύκλο σε τρία ίσα τόξα, το σκιασμένο μέρος είναι ή όχι κυκλικός τομέας;



3 Το τόξο $\overset{\frown}{AΓ}$ είναι τόξο κύκλου ακτίνας 1 και τα σημεία Α, Β και Γ κορυφές ισόπλευρου τριγώνου πλευράς 1. Η περίμετρος του σχήματος είναι:



Α) ❑ 6+2π Β) ❑ 2+3π

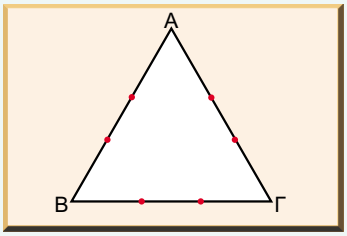
Γ) ❑ $\frac{2}{3}\pi+2$ Δ) ❑ 4π+2

Ε) ❑ $\frac{5\pi}{3}+2$

4 Πόσες στροφές κάνει ένας τροχός ποδηλάτου ακτίνας 30 cm όταν το ποδήλατο διανύει απόσταση 1200 m;

5 Τα μέσα των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου;

6 Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο και τα δυο σημεία σε κάθε πλευρά του την τριχοτομούν. Αυτά τα 6 σημεία είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου;



7 Μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν κύκλο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δοσμένου τριγώνου;

8 Να αιτιολογήσετε γιατί είναι σωστή ή λανθασμένη κάθε μια από τις προτάσεις που ακολουθούν:

α) Υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία ίση με την εσωτερική.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

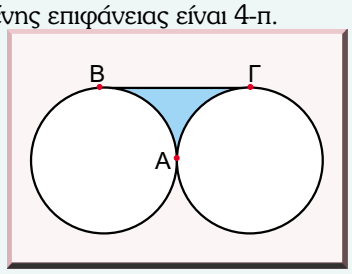
β) Αν φ είναι η κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου, τότε οι τιμές που μπορεί να πάρει το κλάσμα $\frac{360}{\varphi}$ είναι τα στοιχεία του συνόλου Ν*.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

γ) Αν δυο κανονικά πολύγωνα έχουν ίσα αποστάματα, τότε αυτό που έχει τη μικρότερη πλευρά θα έχει και τη μικρότερη ακτίνα.

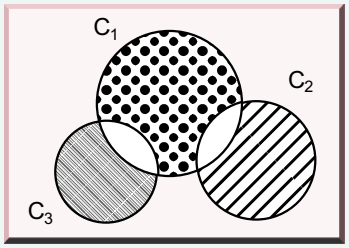
❑ Σωστό ❑ Λάθος

δ) Οι δυο κύκλοι έχουν ακτίνες ίσες με 1 cm και εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας είναι 4-π.



❑ Σωστό ❑ Λάθος

ε) Οι ακτίνες των κύκλων C_1, C_2 και C_3 είναι 5, 4 και 3 αντίστοιχα. Η επιφάνεια με τα στίγματα έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δυο επιφανειών με τις γραμμώσεις.



❑ Σωστό ❑ Λάθος

στ) Αν γράψουμε τρεις κύκλους με διαμέτρους τις πλευρές ενός τριγώνου, τότε το μήκος κάθε κύκλου θα είναι μικρότερο από το άθροισμα των μηκών των άλλων δύο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ζ) Αν γράψουμε τρεις κύκλους με διαμέτρους τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου το εμβαδόν του κύκλου της υποτείνουσας θα είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δυο άλλων κύκλων.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

η) Υπάρχουν κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα σε ένα κύκλο, που είναι όμοια αλλά όχι ίσα.

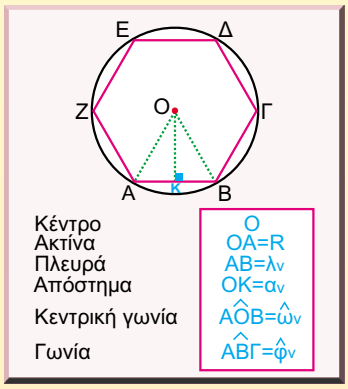
❑ Σωστό ❑ Λάθο

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Το 11ο κεφάλαιο είχε ως αντικείμενο μελέτης τα κανονικά πολύγωνα. Δώσαμε τον ορισμό του κανονικού πολυγώνου (όλες οι πλευρές ίσες και όλες οι γωνίες ίσες), μελετήσαμε τις βασικές ιδιότητές του (εγγράψιμο και περιγράψιμο) και κάναμε μία αναφορά στα στοιχεία του και στους συμβολισμούς τους.

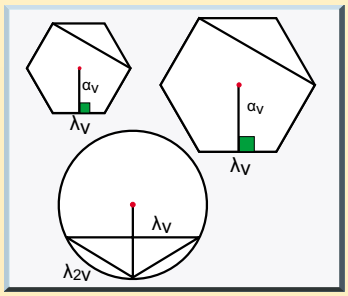
Στη συνέχεια αποδείξαμε τους τύπους:

- $\widehat{\omega}_\nu = \dfrac{360°}{\nu}$ και $\widehat{\varphi}_\nu = 180° - \dfrac{360°}{\nu}$
- $\left(\dfrac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2 = R^2$ • $P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$ • $E_\nu = \dfrac{1}{2} P_\nu \cdot \alpha_\nu$



Συναντήσαμε ακόμη και δύο περιπτώσεις συγγένειας κανονικών πολυγώνων:

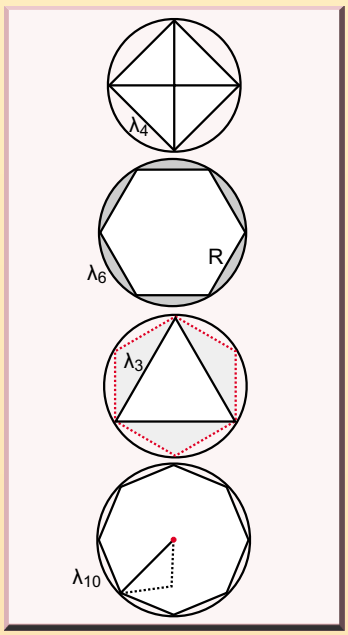
- όταν έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών (είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\dfrac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu}$)
- όταν το ένα έχει διπλάσιο πλήθος πλευρών από το άλλο (τύπος του Αρχιμήδη $\lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^4 - \lambda_\nu^2}}$)



Στη συνέχεια εγγράψαμε συγκεκριμένα κανονικά πολύγωνα σε κύκλο (τετράγωνο, εξάγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο και δεκάγωνο). Για το καθένα απ' αυτά κάναμε γεωμετρική κατασκευή και υπολογίσαμε τα στοιχεία του.

Συγκεκριμένα αποδείξαμε ότι:

- $\lambda_4 = \sqrt{2}\,R$ και $\alpha_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} R$
- $\lambda_6 = R$ και $\alpha_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} R$
- $\lambda_3 = \sqrt{3}\,R$ και $\alpha_3 = \dfrac{1}{2} R$



Τη δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου την αφιερώσαμε στη μέτρηση του κύκλου και τη μέτρηση αυτή τη στηρίξαμε στα κανονικά πολύγωνα. Συγκεκριμένα, ορίσαμε σαν μήκος κύκλου τον αριθμό που προσεγγίζει η περίμετρος ενός κανονικού εγγεγραμμένου ή περιγεγραμμένου πολυγώνου, όταν το πλήθος των πλευρών του δπλασιάζεται απεριόριστες φορές. Αντίστοιχα ορίσαμε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου, το μήκος τόξου και το εμβαδόν κυκλικού τομέα.

Παρατηρήσαμε τη συχνή εμφάνιση του αριθμού π στη μέτρηση του κύκλου και στη μέτρηση των τόξων με μονάδα το rad (ακτίνιο) (τόξο μήκους ίσο με την ακτίνα).

Τέλος, με τη σχέση $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$, είδαμε πώς μετατρέπουμε το μέτρο ενός τόξου ή γωνίας από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα, και πώς η σχέση $E_\tau = \frac{1}{2}R^2 \cdot \alpha$ εκφράζει το εμβαδόν κυκλικού τομέα αν το τόξο του μετρηθεί με ακτίνια.