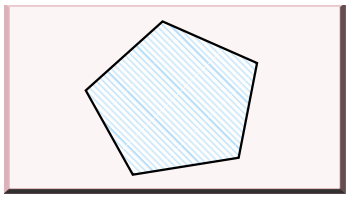
Κεφάλαιο 10

ΕΜΒΑΔΑ

10.1 Η έννοια του εμβαδού

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με μια άλλη σημαντική έννοια της Γεωμετρίας, την έννοια του εμβαδού.

Το εμβαδό σχετίζεται άμεσα με τα κλειστά επίπεδα σχήματα και αποτελεί γι' αυτά το αντίστοιχο του μήκους για τα ευθύγραμμα τμήματα και γενικά τις γραμμές.

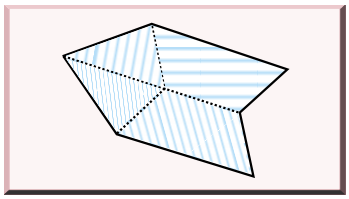


Το εμβαδό, δηλαδή, είναι ένας αριθμός που εκφράζει το μέγεθος της έκτασης που καταλαμβάνει ένα σχήμα.

Ακριβή ορισμό για την έννοια του εμβαδού δεν μπορούμε να δώσουμε, γιατί απαιτούνται περισσότερες γνώσεις. Έτσι θα αρκεστούμε στην αντίληψη, που έχουμε από την εμπειρία μας για το εμβαδό, και θα την εμπλουτίσουμε με τις παρακάτω προτάσεις αξιώματα.

Το εμβαδό ενός σχήματος είναι ένας θετικός αριθμός.	**Αξίωμα I**
Δύο ίσα σχήματα έχουν ίσα εμβαδά.	**Αξίωμα II**
Αν ένα σχήμα χωρίζεται σε επιμέρους σχήματα, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδό του είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους αυτών σχημάτων.	**Αξίωμα III**
Αν μια πολυγωνική επιφάνεια E_1 περιέχεται σε μια πολυγωνική επιφάνεια E_2, το εμβαδό της είναι μικρότερο από το εμβαδό της E_2.	**Αξίωμα IV**

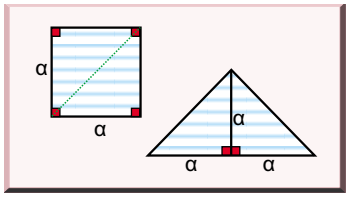
Ο προσδιορισμός του εμβαδού ενός σχήματος Σ γίνεται με τη σύγκρισή του με ένα πρότυπο σχήμα, που θεωρούμε ότι έχει εμβαδόν ίσο με τη μονάδα.



Πρακτικοί λόγοι συνηγορούν στο να επιλέξουμε ως τέτοιο σχήμα ένα τετράγωνο πλευράς μήκους 1. Δεχόμαστε, λοιπόν, ότι: Το εμβαδό ενός τετραγώνου πλευράς 1 είναι ίσο με 1.

Με την πιο πάνω επιλογή καθορίζουμε και τις μονάδες μέτρησης των εμβαδών, που είναι οι αντίστοιχες των μηκών εκφραζόμενες στο τετράγωνο: τετραγωνικό μέτρο, τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσιά του.

Όταν δύο επίπεδα σχήματα έχουν ίσα εμβαδά θα καλούνται **ισοδύναμα** ή **ισοεμβαδικά** . Τα ίσα σχήματα είναι και ισοδύναμα, χωρίς όμως να ισχύει και το αντίστροφο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Τα εμβαδά των σχημάτων είναι θετικοί αριθμοί και μπορούν να συμμετέχουν σ' όλες τις πράξεις των θετικών αριθμών, π.χ. πρόσθεση, πολλαπλασιασμό κτλ., χωρίς αυτό να σημαίνει ότι οι πράξεις αυτές επεκτείνονται και στα ίδια σχήματα.

Τέλος, για το εμβαδό ενός σχήματος Σ έχει επικρατήσει ο συμβολισμός E_{Σ}, π.χ. για το εμβαδό ενός τριγώνου ΑΒΓ γράφουμε $E_{ΑΒΓ}$.

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τα εμβαδά των πολυγώνων.

10.2 Εμβαδά γνωστών σχημάτων

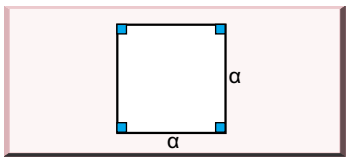
10.2.1 Βασικά θεωρήματα

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Θεώρημα 10.1

Το εμβαδό κάθε τετραγώνου πλευράς α είναι ίσο με $α^2$.

Παραλείπουμε την απόδειξη του θεωρήματος αυτού λόγω της πολυπλοκότητάς της.



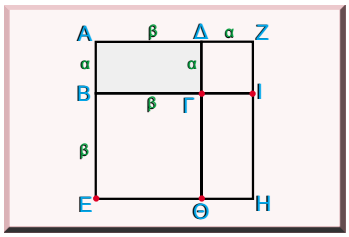
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

Θεώρημα 10.2

Το εμβαδό ορθογωνίου με πλευρές α και β δίνεται από τον τύπο Ε=α·β.

Απόδειξη

Θεωρούμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ=α και ΑΔ=β. Προεκτείνουμε την ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ=α, και την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=β. Φέρουμε από τα σημεία Ζ και Ε παράλληλες προς τις ΑΕ και ΑΖ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο Η. Προφανώς το τετράπλευρο ΑΖΗΕ είναι τετράγωνο πλευράς α+β. Προεκτείνουμε τη ΔΓ και τη ΒΓ οι οποίες τέμνουν τις ΕΗ και ΖΗ στα σημεία Θ και Ι αντίστοιχα. Έτσι το ΑΖΗΕ χωρίζεται σε τέσσερα πολύγωνα: τα ΓΔΖΙ και ΒΓΘΕ είναι τετράγωνα πλευράς α και β αντίστοιχα, και τα ΑΒΓΔ και ΓΙΗΘ είναι ορθογώνια με πλευρές α και β το καθένα. Ισχύει



$$E_{AZHE}=E_{ABΓΔ}+E_{ΓIHΘ}+E_{ΓΔZI}+E_{BΓΘE}$$

ή $$(α+β)^2=E_{ABΓΔ}+E_{ΓIHΘ}+α^2+β^2 \qquad (1)$$

Αλλά ΑΒΓΔ=ΓΙΗΘ, επειδή ΓΔ=ΓΙ=α και ΒΓ=ΓΘ=β. Έτσι η σχέση (1) γίνεται:

$$α^2+2αβ+β^2=2E_{ABΓΔ}+α^2+β^2$$

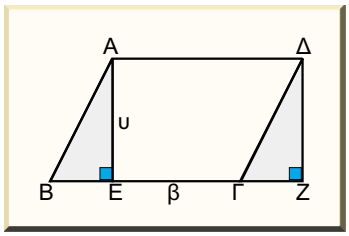
ή $$E_{ABΓΔ}=α·β$$ ■

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

Θεώρημα

Το εμβαδό παραλληλόγραμμου με βάση β και αντίστοιχο ύψος υ δίνεται από τον τύπο Ε=β·υ.

Απόδειξη

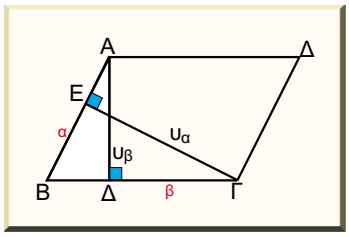


Αν το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο, τότε η βάση β είναι η μία πλευρά του, και το ύψος υ η άλλη και ο τύπος Ε=β·υ προφανώς ισχύει. Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι πλάγιο με ΒΓ=β και ύψος ΑΕ=υ φέρουμε το ύψος ΔΖ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΖ είναι ίσα οπότε $E_{ABE}=E_{\Delta\Gamma Z}$. Επομένως $E_{AB\Gamma\Delta}=E_{AEZ\Delta}$ ή $E_{AB\Gamma\Delta}=\beta\cdot\upsilon$. ■

Πόρισμα 10.1

Σε κάθε παραλληλόγραμμο το γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο σ' αυτήν ύψος ισούται με το γινόμενο μιας άλλης διαδοχικής πλευράς επί το αντίστοιχο σ' αυτήν ύψος.

Απόδειξη



Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=β, ΑΒ=α και φέρουμε τα ύψη $A\Delta=\upsilon_\beta$ και $\Gamma E=\upsilon_\alpha$.

Τότε $E_{AB\Gamma\Delta}=\beta\cdot\upsilon_\beta$ (1)

και $E_{AB\Gamma\Delta}=\alpha\cdot\upsilon_\alpha$ (2)

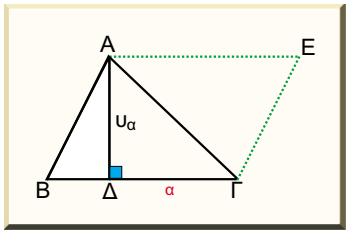
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\beta\cdot\upsilon_\beta=\alpha\cdot\upsilon_\alpha$. ■

ΤΡΙΓΩΝΟ

Θεώρημα 10.4

Το εμβαδό ενός τριγώνου με βάση α και αντίστοιχο ύψος υ_α δίνεται από τον τύπο $E=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha$.

Απόδειξη



Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ=α και ύψος ΑΔ=υ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε παράλληλες προς τις ΒΓ και ΒΑ αντίστοιχα, που τέμνονται στο Ε. Έτσι σχηματίζεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΕ με βάση ΒΓ=α και αντίστοιχο ύψος $A\Delta=\upsilon_\alpha$. Το παραλληλόγραμμο αυτό χωρίζεται από τη διαγώνιο του ΑΓ σε δυο ίσα τρίγωνα, τα ΑΒΓ και ΑΓΕ, οπότε $E_{AB\Gamma}=E_{A\Gamma E}$.

Ισχύει $E_{AB\Gamma E}=E_{AB\Gamma}+E_{A\Gamma E}$ ή $E_{AB\Gamma E}=2E_{AB\Gamma}$

ή $\alpha\cdot\upsilon_\alpha=2E_{AB\Gamma}$ ή $E_{AB\Gamma}=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha$ ■

Πόρισμα 10.2

Το εμβαδό ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο των κάθετων πλευρών του.

Πόρισμα 10.3

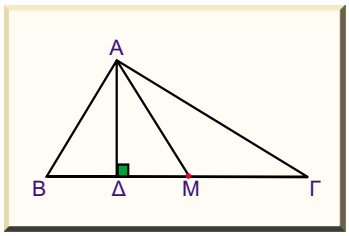
Το γινόμενο μιας πλευράς τριγώνου επί το αντίστοιχο ύψος είναι σταθερό και ίσο με το διπλάσιο εμβαδό του τριγώνου, δηλαδή $α \cdot υ_α = β \cdot υ_β = γ \cdot υ_γ = 2E$

Πόρισμα 10.4

Η διάμεσος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ και ύψος του ΑΔ. Τότε



$$E_{ΑΒΜ} = \frac{1}{2} ΜΒ \cdot ΑΔ \qquad (1)$$

$$E_{ΑΜΓ} = \frac{1}{2} ΜΓ \cdot ΑΔ \qquad (2)$$

και $$ΒΜ = ΜΓ \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει $E_{ΑΒΜ} = E_{ΑΜΓ}$. ■

Πόρισμα 10.5

Η διαγώνιος παραλληλογράμμου χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα, άρα και ισεμβαδικά τρίγωνα.

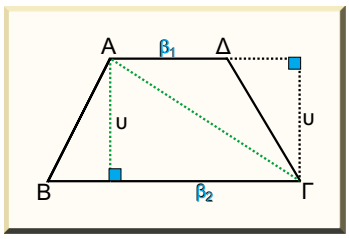
ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Θεώρημα 10.5

Το εμβαδό ενός τραπεζίου με βάσεις $β_1$ και $β_2$ και ύψος υ, είναι ίσο με $E = \frac{1}{2}(β_1 + β_2) \cdot υ$.

Απόδειξη

Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις $ΑΔ = β_1$ και $ΒΓ = β_2$ και φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Το τραπέζιο χωρίζεται σε δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ με βάσεις $ΒΓ = β_2$ και $ΑΔ = β_1$ αντίστοιχα και ύψη με κοινό μήκος υ.



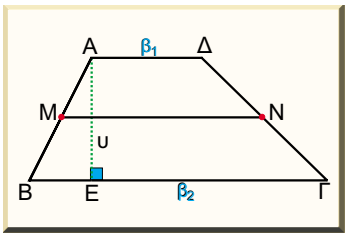
Άρα $$E_{ΑΒΓΔ} = E_{ΑΔΓ} + E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2}β_1 υ + \frac{1}{2}β_2 υ = \frac{1}{2}(β_1 + β_2)υ$$ ■

Πόρισμα 10.6

Το εμβαδό ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο της διαμέσου του επί το ύψος του.

Απόδειξη

Αν ΜΝ η διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΔ=$β_1$, ΒΓ=$β_2$ και ύψος ΑΕ=υ, τότε

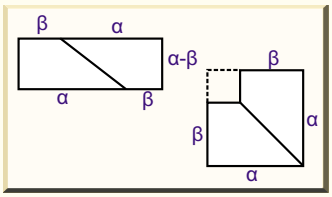


$$E_{ΑΒΓΔ}=\frac{1}{2}(β_1+β_2)\cdot υ \qquad (1)$$

Αλλά
$$ΜΝ=\frac{β_1+β_2}{2} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει $E_{ΑΒΓΔ}=ΜΝ\cdot υ$. ■

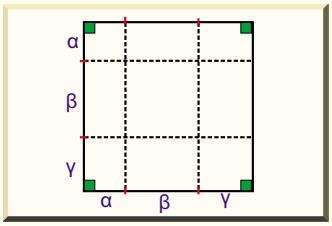
10.1 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ



Με βάση τα δύο σχήματα και γνωστά αξιώματα των εμβαδών να αποδείξετε την ταυτότητα

$(α+β)(α-β)=α^2-β^2$

10.2 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ



Συνδυάζοντας προτάσεις εμβαδών στο σχήμα, ποια γνωστή ταυτότητα μπορούμε να αποδείξουμε και πώς;

10.2.2 Άλλοι τύποι για το εμβαδό τριγώνου

Έχουμε τη δυνατότητα να χωρίσουμε οποιοδήποτε πολύγωνο σε επιμέρους τρίγωνα και στηριζόμενοι στο αξίωμα ΙΙΙ να υπολογίσουμε το εμβαδό του ως άθροισμα εμβαδών τριγώνων. Η δυνατότητα αυτή μας υποχρεώνει να προσδιορίσουμε και με άλλους τύπους το εμβαδό ενός τριγώνου.

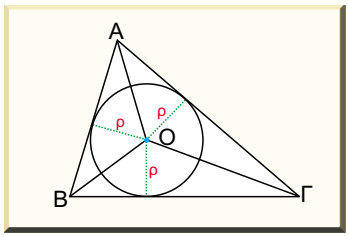
Θεώρημα 10.6

Το εμβαδό ενός τριγώνου ισούται με Ε=τ·ρ, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τον εγγεγραμμένο κύκλο (Ο,ρ).

Σύμφωνα με τα αξιώματα των εμβαδών και το θεώρημα 10.4 έχουμε:



$$E_{ΑΒΓ}=E_{ΑΟΒ}+E_{ΒΟΓ}+E_{ΓΟΑ}$$

ή $$E_{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ρ+\frac{1}{2}ΒΓ\cdot ρ+\frac{1}{2}ΓΑ\cdot ρ$$

$$E_{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}(ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ)ρ \quad ή \quad E_{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}2τ\cdot ρ \quad ή \quad E_{ΑΒΓ}=τ\cdot ρ$$ ■

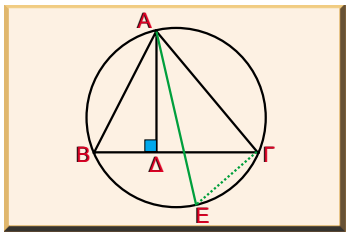
Θεώρημα 10.7

Το εμβαδό ενός τριγώνου ισούται με $E=\frac{α\cdot β\cdot γ}{4R}$, όπου α, β, γ οι πλευρές του και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τον περιγεγραμμένο του κύκλο (Ο,R).

Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου και τη διάμετρο ΑΕ του περιγεγραμμένου του κύκλου. Η γωνία $\widehat{ΑΓΕ}$ είναι ορθή (εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο), άρα το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ορθογώνιο.



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν τις γωνίες τους $\widehat{B}$ και $\widehat{E}$ ίσες (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ}$).

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι όμοια, οπότε προκύπτει η αναλογία

$$\frac{ΑΒ}{ΑΕ}=\frac{ΔΑ}{ΓΑ} \quad ή \quad ΑΒ\cdot ΑΓ=ΔΑ\cdot ΑΕ \quad ή \quad γ\cdot β=υ_α\cdot 2R$$

$$ή \quad α\cdot β\cdot γ=α\cdot υ_α\cdot 2R \quad ή \quad \frac{α\cdot β\cdot γ}{4R}=\frac{α\cdot υ_α\cdot 2R}{4R}$$

$$ή \quad \frac{α\cdot β\cdot γ}{4R}=\frac{1}{2}α\cdot υ_α \quad και τελικά \quad E=\frac{α\cdot β\cdot γ}{4R}$$ ■

Θεώρημα 10.8

τύπος του Ήρωνα

Το εμβαδό ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με

$$E=\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το θεώρημα 10.4 και τον τύπο για το ύψος τριγώνου της παραγράφου 9.1.2 έχουμε

$$E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha \quad \text{και} \quad \upsilon_\alpha = \frac{2\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\alpha}.$$

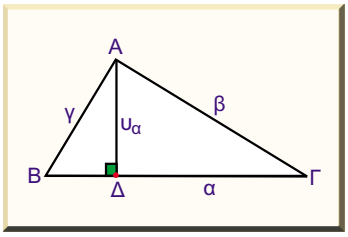
Με αντικατάσταση θα πάρουμε $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$. ■

Θεώρημα 10.9

Το εμβαδό ενός τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχομένης γωνίας των δύο αυτών πλευρών.

Απόδειξη

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:



$$\eta\mu B = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\upsilon_\alpha}{\gamma} \quad \text{ή} \quad \upsilon_\alpha = \gamma \cdot \eta\mu B.$$

Επειδή $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha$ προκύπτει $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu B$ ■

Πόρισμα 10.7

Νόμος ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

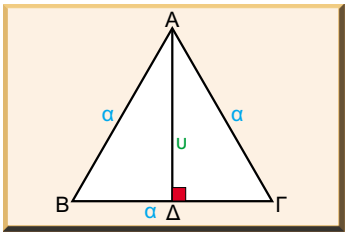
$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \gamma} = 2R$$

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το εμβαδό ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha^2\sqrt{3}$.

Απόδειξη

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α και ύψους υ.



Τότε $E_{ABΓ} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon$ και $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

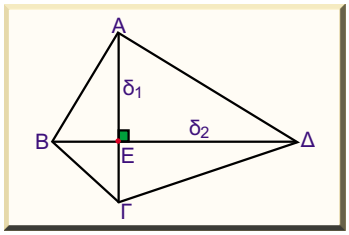
Άρα $E_{ABΓ} = \frac{1}{2}\alpha\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ ή $E_{ABΓ} = \frac{1}{4}\alpha^2\sqrt{3}$

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το εμβαδό ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ με κάθετες διαγώνιες ΑΓ=δ_1 και ΒΔ=δ_2, ισούται με $E=\frac{1}{2}\delta_1\cdot\delta_2$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κάθετες διαγώνιες ΑΓ=δ_1 και ΒΔ=δ_2.



Αν Ε η τομή των διαγωνίων του, θα έχουμε:

$$E_{ΑΒΓΔ}=E_{ΑΒΔ}+E_{ΒΓΔ}=\frac{1}{2}ΒΔ\cdot ΑΕ+\frac{1}{2}ΒΔ\cdot ΓΕ=$$

$$=\frac{1}{2}ΒΔ(ΑΕ+ΓΕ)=\frac{1}{2}ΒΔ\cdot ΑΓ$$

Τελικά $$E=\frac{1}{2}\delta_1\cdot\delta_2$$

Παρατηρήσεις

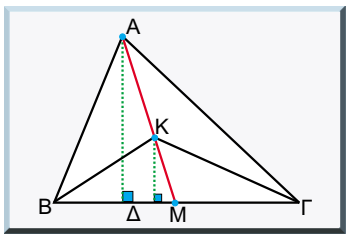
- Το εμβαδό Ε ενός ρόμβου με διαγώνιες δ_1 και δ_2 είναι ίσο με
$$E=\frac{1}{2}\delta_1\cdot\delta_2$$
- Το εμβαδό Ε ενός τετραγώνου με διαγώνιο δ είναι ίσο με
$$E=\frac{1}{2}\delta^2$$

3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν Κ τυχαίο σημείο της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ, τα τρίγωνα ΚΑΒ και ΚΑΓ είναι ισοδύναμα

Απόδειξη

Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, αφού τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ έχουν ίσες βάσεις (ΜΒ=ΜΓ) και κοινό το αντίστοιχο ύψος τους ΑΔ.



Όμοια η διάμεσος ΚΜ του τριγώνου ΒΚΓ το χωρίζει στα δύο ισοδύναμα τρίγωνα ΚΒΜ και ΚΓΜ.

Από τις ισότητες $E_{ΑΒΜ}=E_{ΑΓΜ}$ και $E_{ΚΒΜ}=E_{ΚΓΜ}$ προκύπτει:

$$E_{ΑΒΜ}-E_{ΑΒΚ}=E_{ΑΓΜ}-E_{ΚΓΜ} \quad ή \quad E_{ΚΑΒ}=E_{ΚΑΓ}$$

Παρατήρηση

Αν το Κ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου, τότε και τα τρία τρίγωνα ΑΒΚ, ΒΓΚ και ΑΓΚ είναι ισοδύναμα.

4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{1}{\rho}$.

Απόδειξη

Για το εμβαδό ενός τριγώνου ισχύουν οι σχέσεις

$$E=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha=\frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon_\beta=\frac{1}{2}\gamma\cdot\upsilon_\gamma \quad \text{και} \quad E=\tau\cdot\rho$$

Άρα $\frac{1}{\upsilon_\alpha}=\frac{\alpha}{2E}$, $\frac{1}{\upsilon_\beta}=\frac{\beta}{2E}$ και $\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{\gamma}{2E}$

Επομένως

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{\alpha}{2E}+\frac{\beta}{2E}+\frac{\gamma}{2E}=\frac{2\tau}{2E}=\frac{\tau}{E}=\frac{1}{\rho}$$

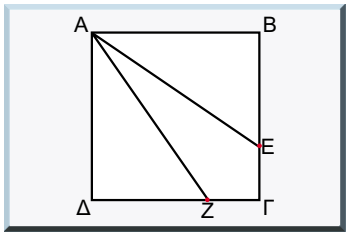
5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να χωρίσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ σε τρία ισοδύναμα χωρία με ευθείες που διέρχονται από μία κορυφή του.

Απόδειξη

Έστω ΑΕ και ΑΖ οι ευθείες που χωρίζουν το τετράγωνο σε τρία ισοδύναμα χωρία και έστω ότι ΑΒ=α. Τότε

$$E_{A\Delta Z}=\frac{E_{AB\Gamma\Delta}}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}\alpha\cdot\Delta Z=\frac{\alpha^2}{3} \quad \text{ή} \quad \Delta Z=\frac{2}{3}\alpha$$



Όμοια βρίσκουμε ότι $BE=\frac{2}{3}\alpha$.

Αρκεί, λοιπόν, να πάρουμε τα σημεία Ζ και Ε στις πλευρές ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα, έτσι, ώστε

$$\Delta Z=\frac{2}{3}\alpha, \quad BE=\frac{2}{3}\alpha$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι οι ΑΖ και ΑΕ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι πλευρές α και β έχουν μήκη α=10 και β=8. Το εμβαδό του τριγώνου ποιες τιμές μπορεί να πάρει;

2 Αν τα εμβαδά δύο τριγώνων δεν είναι ίσα, τότε και τα τρίγωνα αυτά δεν είναι ίσα.

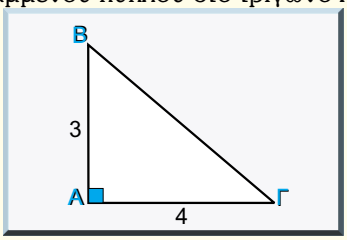
3 Αν ένα τρίγωνο χωρίζεται από μια διχοτόμο του σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τότε είναι ισοσκελές.

4 Με τη βοήθεια του τύπου $E=\frac{1}{2}\alpha\cdot\beta\cdot\eta\mu\Gamma$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α είναι $E=\frac{1}{4}\alpha^2\sqrt{3}$.

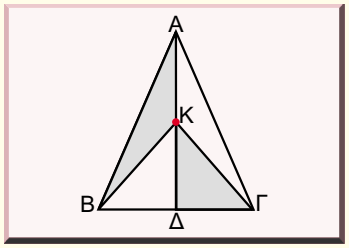
5 Ο λόγος των εμβαδών δύο τραπεζίων με ίσες διαμέσους είναι ίσος με το λόγο των υψών τους.

6 Αν δύο ισόπλευρα τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά, τότε θα είναι ίσα.

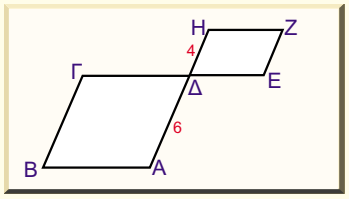
7 Να υπολογίσετε το εμβαδό και την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.



8 Στο παρακάτω σχήμα το Δ είναι τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ και το σημείο Κ είναι το μέσο του ΑΔ. Το σκιασμένο εμβαδό τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ είναι;



9 Αν ο ρόμβος ΑΒΓΔ είναι ισοδύναμος με το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ, τότε ποια είναι η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ;



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Να υπολογίσετε το εμβαδό τριγώνου ΑΒΓ στις εξής περιπτώσεις:

α) ΑΒ=γ, ΑΓ=β και $\widehat{A}=120°$.

β) $\widehat{A}=30°$, $\widehat{B}=105°$ και ΑΒ=12.

γ) $\widehat{A}=90°$, $\upsilon_\alpha=6$ και $B\widehat{A}\Delta=30°$

2 Να υπολογίσετε το εμβαδό παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ στις εξής περιπτώσεις:

α) ΑΔ=24, ΑΒ=32 και $\widehat{A}=60°$.

β) ΑΔ=25, ΑΒ=52 και ΒΔ=63.

3 Αν οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=6 και ΑΓ=8, να υπολογίσετε το εμβαδό του και το ύψος προς την υποτείνουσα.

4 Να υπολογιστούν οι πλευρές παραλληλογράμμου, που έχει περίμετρο 24 και το ένα ύψος είναι διπλάσιο από το άλλο.

5 Ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ το μέσο Μ της πλευράς του ΑΒ απέχει από την κορυφή Γ απόσταση ΜΓ=10. Αν $\widehat{ΒΓΜ}=30°$, να υπολογίσετε το εμβαδό του ορθογωνίου.

6 Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει $\widehat{Α}=120°$, ΑΒ=6κ και ΑΔ=4κ, όπου κ>0. Να υπολογίσετε το ύψος του παραλληλογράμμου, που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ καθώς και το εμβαδό του.

7 Να υπολογίσετε το εμβαδό ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ, που έχει διάμεσο ΜΝ=5, μικρή βάση ΑΒ=4 και τις μη παράλληλες πλευρές ΑΔ=ΒΓ=3.

8 Να χωρίσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα χωρία με ευθείες που διέρχονται από μια κορυφή του.

9 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ η διάμεσός του. Από το Α φέρουμε ευθεία ε κάθετη στην ΑΔ. Από τα σημεία Β και Γ φέρουμε τις ΒΕ και ΓΖ αντίστοιχα κάθετες στην ε. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισοδύναμα.

10 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $E_{ΔΕΖ}=E_{ΖΓΕ}$.

β) $E_{ΔΕΖ}=\frac{1}{4}E_{ΑΒΓ}$.

11 Από ένα σημείο Ε της διαγωνίου ΒΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Να δείξετε ότι τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται εκατέρωθεν της ΒΔ είναι ισοδύναμα.

12 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από το μέσο της διαγωνίου ΒΔ φέρουμε ευθεία ε που τέμνει τις ΑΒ και ΔΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $E_{ΑΕΖΔ}=E_{ΒΓΖΕ}$.

13 Να αποδείξετε ότι το εμβαδό ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{Α}=90°$) δίνεται από τον τύπο Ε=τ(τ–α).

14 Έστω $ρ_α$ η ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται της πλευράς ΒΓ και των προεκτάσεων των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ. (Ο κύκλος αυτός ονομάζεται παρεγγεγραμμένος του τριγώνου ΑΒΓ στη γωνία $\widehat{Α}$). Να αποδείξετε ότι $E_{ΑΒΓ}=(τ-α)ρ_α$.

15 Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\frac{2}{υ_α}=\frac{1}{ρ}-\frac{1}{ρ_α}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ η μια βάση είναι διπλάσια της άλλης. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών των δύο τραπεζίων, στα οποία το τραπέζιο ΑΒΓΔ χωρίζεται από τη διάμεσό του.

2 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ και Ε η τομή των διαγωνίων. Προεκτείνουμε την ΑΓ κατά τμήμα ΓΖ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι $E_{ΑΔΕ}=E_{ΒΓΖ}$.

3 Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ και ΔΓ=2ΑΒ. Αν ΑΔ=ΒΓ=ΑΒ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ και το εμβαδό του.

4 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και κύκλος που περνάει από τα σημεία Α και Β και τέμνει την προέκταση της ΓΒ προς το Β στο σημείο Ε. Αν φέρουμε την εφαπτομένη ΓΚ, να αποδείξετε ότι $E_{ΑΕΓ} = \frac{1}{2}ΓΚ^2$.

5 Ένας ρόμβος έχει περίμετρο 48 και άθροισμα διαγωνίων 26. Να υπολογίσετε το εμβαδό του.

6 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε της πλευράς ΑΒ. Να αποδείξετε ότι $E_{ΔΕΓ}=E_{ΑΕΔ}+E_{ΕΒΓ}$.

7 Να υπολογίσετε το εμβαδό, το ύψος $υ_α$ και τις ακτίνες R, ρ, τριγώνου ΑΒΓ, αν α=43, β=68 και γ=61.

8 Να δείξετε ότι σε ρόμβο του οποίου το εμβαδό είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας διαγωνίου επί την πλευρά του, η μία γωνία του είναι 60°.

9 Η περίμετρος ενός ρόμβου είναι 48 και η απόσταση των δύο απέναντι πλευρών του είναι 5. Να υπολογίσετε το εμβαδό του ρόμβου.

10 Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Να αποδείξετε ότι $E_{ΟΑΒ}+E_{ΟΓΔ}=E_{ΟΑΔ}+E_{ΟΒΓ}$.

11 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ σημείο της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΖ και ΔΕ παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Ε αντίστοιχα. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΔΒ και ΔΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $E_{ΜΝΕΖ} = \frac{1}{2}E_{ΑΒΓ}$

12 Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ=α, ΒΓ=2α και κατασκευάζουμε προς το ίδιο μέρος της ε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΔΕΓ.

13 Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Κ το κέντρο του κύκλου, που είναι εγγεγραμμένο στο τρίγωνο ΒΓΔ. Φέρουμε ΚΛ και ΚΜ κάθετες στις ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $E_{ΑΒΓΔ}=2E_{ΑΛΚΜ}$.

14 Να αποδείξετε ότι απ' όλα τα τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο, μεγαλύτερο εμβαδό έχει το ισόπλευρο.

15 Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο πλευράς α και Μ σημείο της ΑΒ. Να προσδιοριστεί η θέση του σημείου Μ (απόσταση από το Α ή από το Β) ώστε η διαφορά $ΜΔ^2–ΜΓ^2$ να είναι ίση με το $E_{ΜΓΔ}$.

16 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της κορυφής Α τριγώνου ΑΒΓ, το οποίο έχει σταθερή βάση ΒΓ=α και σταθερό εμβαδό $E_{ΑΒΓ}=κ^2$.

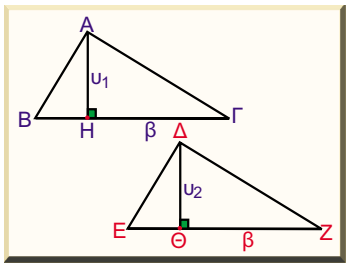
10.3 Σχέσεις εμβαδών

Εκτός από τους τύπους προσδιορισμού των εμβαδών διαφόρων σχημάτων, που ήδη μελετήσαμε, θα αποδείξουμε στη συνέχεια μερικά θεωρήματα, που επιτρέπουν τη σύγκριση εμβαδών μεταξύ σχημάτων.

Θεώρημα 10.10

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των αντίστοιχων υψών.

Απόδειξη



Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με ΒΓ=ΕΖ=β (ίσες βάσεις) και τα αντίστοιχα ύψη τους ΑΗ=$υ_1$ και ΔΘ=$υ_2$.

Έχουμε για τα εμβαδά τους:

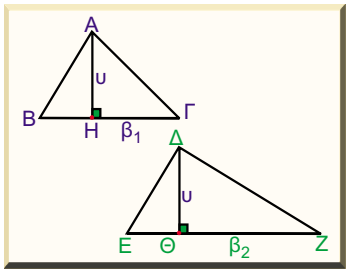
$$E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2}β \cdot υ_1 \quad \text{και} \quad E_{ΔΕΖ} = \frac{1}{2}β \cdot υ_2.$$

Άρα $$\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΔΕΖ}} = \frac{\frac{1}{2}β \cdot υ_1}{\frac{1}{2}β \cdot υ_2} = \frac{2βυ_1}{2βυ_2} \quad \text{ή} \quad \frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΔΕΖ}} = \frac{υ_1}{υ_2}$$ ■

Θεώρημα 10.11

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

Απόδειξη



Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με βάσεις ΒΓ=$β_1$ και ΕΖ=$β_2$ και ίσα τα αντίστοιχα ύψη τους ΑΗ=ΔΘ=υ.

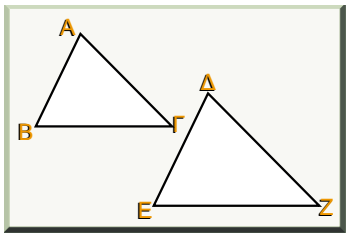
Άρα $$\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΔΕΖ}} = \frac{\frac{1}{2}β_1 \cdot υ}{\frac{1}{2}β_2 \cdot υ} = \frac{2β_1υ}{2β_2υ} \quad \text{ή} \quad \frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΔΕΖ}} = \frac{β_1}{β_2}$$

■

Θεώρημα 10.12

Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μία γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Απόδειξη



Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}$ ίσες. Τότε για τα εμβαδά τους ισχύει

$$E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ημΑ \quad \text{και} \quad E_{ΔΕΖ} = \frac{1}{2} ΔΕ \cdot ΔΖ \cdot ημΔ$$

Επομένως
$$\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΔΕΖ}} = \frac{\frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ημΑ}{\frac{1}{2} ΔΕ \cdot ΔΖ \cdot ημΔ}$$

Επειδή όμως $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, ισχύει ημΑ=ημΔ, οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΔΕΖ}} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ημΑ}{ΔΕ \cdot ΔΖ \cdot ημΑ} \quad \text{ή} \quad \frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΔΕΖ}} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΔΕ \cdot ΔΖ}$$

Ομοίως αποδεικνύεται το θεώρημα και για την περίπτωση που οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}$ των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι παραπληρωματικές. ■

10.3 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να εξετάσετε αν το θεώρημα 10.12 ισχύει και στα παραλληλόγραμμα.

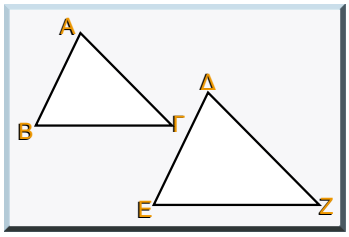
Σχέσεις εμβαδών όμοιων σχημάτων

Το εμβαδό ενός τετραγώνου πλευράς α είναι $α^2$.

Αν διπλασιάσουμε την πλευρά ή την τριπλασιάσουμε, το εμβαδό θα γίνει $(2α)^2=4α^2$ ή $(3α)^2=9α^2$, αντίστοιχα. Διαπιστώνουμε ότι η σχέση των εμβαδών δεν είναι η ίδια με τη σχέση των πλευρών. Η σχέση των εμβαδών σε μια τέτοια περίπτωση δίνεται από τα παρακάτω θεωρήματα.

Θεώρημα 10.13

Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με $λ^2$.



Απόδειξη

Έστω τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με λόγο ομοιότητας λ και $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$. Οπότε ισχύει:

$$\frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{ΓΑ}{ΖΔ} = λ$$

Για τα εμβαδά τους έχουμε σύμφωνα με το θεώρημα 10.11

$$E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ημΑ \quad \text{και} \quad E_{ΔΕΖ} = \frac{1}{2} ΔΕ \cdot ΔΖ \cdot ημΔ .$$

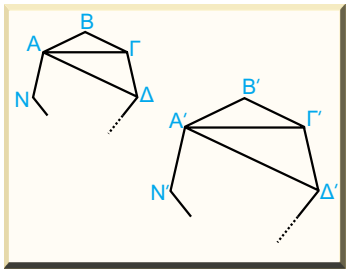
οπότε $$\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΔΕΖ}} = \frac{\frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ημΑ}{\frac{1}{2} ΔΕ \cdot ΔΖ \cdot ημΔ} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ημΑ}{ΔΕ \cdot ΔΖ \cdot ημΔ} =$$

$$= \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΔΕ \cdot ΔΖ} = \frac{ΑΒ}{ΔΕ} \cdot \frac{ΑΓ}{ΔΖ} = λ^2 \quad \text{Άρα} \quad \frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΔΕΖ}} = λ^2$$ ■

Θεώρημα 10.14

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με $λ^2$.

Απόδειξη



Έστω τα όμοια πολύγωνα ΑΒΓΔ...Ν και Α΄Β΄Γ΄...Ν΄ με λόγο ομοιότητας λ και αντιστοιχία στοιχείων όπως προκύπτει αυτή από την ονομασία τους. ($\widehat{Α} = \widehat{Α'}$, $\widehat{Β} = \widehat{Β'}$, κτλ.). Με τις διαγώνιες που φέρουμε από τις κορυφές Α και Α΄ χωρίζουμε τα πολύγωνα σε ίσο πλήθος τριγώνων, ομοίων ανά δύο με λόγο ομοιότητας:

$$λ = \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \frac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \cdots$$

Από το προηγούμενο θεώρημα 10.13 έχουμε:

$$\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{Α'Β'Γ'}} = λ^2 \quad \text{ή} \quad E_{ΑΒΓ} = λ^2 E_{Α'Β'Γ'}$$

Ομοίως $E_{ΑΓΔ} = λ^2 E_{Α'Γ'Δ'}$, $E_{ΑΔΕ} = λ^2 E_{Α'Δ'Ε'}$, ...

Με πρόσθεση κατά μέλη όλων αυτών των σχέσεων προκύπτει:

$$E_{ΑΒΓ} + E_{ΑΓΔ} + E_{ΑΔΕ} + \cdots = λ^2 (E_{Α'Β'Γ'} + E_{Α'Γ'Δ'} + E_{Α'Δ'Ε'} + \cdots) \quad \text{ή}$$

$$E_{ΑΒΓ...Ν} = λ^2 E_{Α'Β'Γ'...Ν'} \quad \text{ή} \quad \frac{E_{ΑΒΓ...Ν}}{E_{Α'Β'Γ'...Ν'}} = λ^2$$

10.4 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σ' ένα χάρτη με κλίμακα 1:1.000.000 το εμβαδό ενός νησιού είναι 12 cm^2 και η απόσταση δύο χωριών του Α και Β είναι 3 cm. Να βρεθεί το πραγματικό εμβαδό του νησιού και η πραγματική απόσταση των δύο χωριών.

10.5 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στην τελική αναμέτρηση ενός αγώνα γρήγορης ανάγνωσης ο παίκτης Α διάβασε σε μια ώρα 80 σελίδες ενός βιβλίου διαστάσεων 16×24. Η κάθε σελίδα του βιβλίου έχει περιμετρικά περιθώριο λευκό 2 cm. Ένας άλλος παίκτης Β διάβασε σε μια ώρα 60 σελίδες ενός άλλου βιβλίου διαστάσεων 22×30 του οποίου η κάθε σελίδα έχει περιμετρικά περιθώριο 3 cm. Ποιος από τους δύο παίκτες πρέπει να θεωρηθεί νικητής;

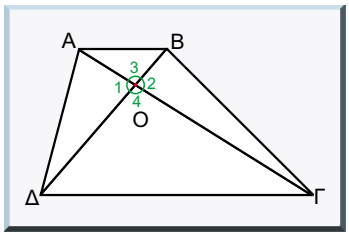
1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων τραπεζίου ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

α) $E_{OA\Delta} = E_{OB\Gamma}$

β) $E^2_{OA\Delta} = E_{OAB} \cdot E_{O\Gamma\Delta}$

Απόδειξη



α) Τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ έχουν $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα 10.14 έχουμε:

$$\frac{E_{AO\Delta}}{E_{BO\Gamma}} = \frac{AO \cdot O\Delta}{BO \cdot O\Gamma} \qquad (1)$$

Επειδή όμως ΑΒ//ΔΓ θα ισχύει $\frac{AO}{O\Gamma} = \frac{BO}{O\Delta}$ ή $AO \cdot O\Delta = BO \cdot O\Gamma$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $E_{AO\Delta} = E_{BO\Gamma}$.

β) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΑΒ έχουν $\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 180°$ και τα τρίγωνα ΟΔΓ και ΟΑΔ έχουν $\hat{O}_4 + \hat{O}_1 = 180°$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα 10.14 έχουμε

$$\frac{E_{OA\Delta}}{E_{OAB}} = \frac{OA \cdot O\Delta}{OA \cdot OB} = \frac{O\Delta}{OB} \qquad (1)$$

και

$$\frac{E_{O\Delta\Gamma}}{E_{OA\Delta}} = \frac{O\Delta \cdot O\Gamma}{OA \cdot O\Delta} = \frac{O\Gamma}{OA} \qquad (2)$$

Αλλά επειδή ΑΒ//ΔΓ ισχύει

$$\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει

$$\frac{E_{ΟΑΔ}}{E_{ΟΑΒ}}=\frac{E_{ΟΔΓ}}{E_{ΟΑΔ}} \quad ή \quad E^2_{ΟΑΔ}=E_{ΟΑΒ}\cdot E_{ΟΔΓ}$$

Για το α) ερώτημα μπορούμε να κάνουμε και την παρακάτω απόδειξη.

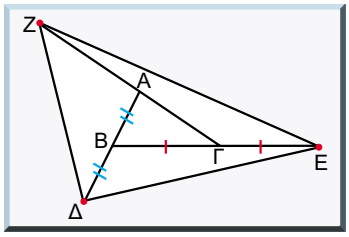
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση και ίσα τα αντίστοιχα ύψη (εφόσον ΑΒ//ΓΔ). Άρα είναι ισοδύναμα, δηλαδή

$E_{ΑΒΔ}=E_{ΑΒΓ}$ ή $E_{ΑΒΔ}-E_{ΟΑΒ}=E_{ΑΒΓ}-E_{ΟΑΒ}$ ή $E_{ΟΑΔ}=E_{ΟΒΓ}$

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ κατά την ίδια φορά κατά τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ, ΓΕ και ΑΖ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΒΔ=ΑΒ, ΓΕ=ΒΓ και ΑΖ=ΑΓ. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΔΕΖ και ΑΒΓ.

Απόδειξη



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΒ έχουν $\widehat{ΑΒΓ}+\widehat{ΔΒΕ}=180°$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα 10.14 έχουμε

$$\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΔΒΕ}}=\frac{ΑΒ\cdot ΒΓ}{ΔΒ\cdot ΒΕ}=\frac{ΒΓ}{2ΒΓ}=\frac{1}{2} \quad άρα \quad E_{ΔΒΕ}=2E_{ΕΑΒ} \qquad (1)$$

Ομοίως προκύπτει ότι $E_{ΕΓΖ}=2E_{ΑΒΓ}$ (2)

και $E_{ΖΑΔ}=2E_{ΑΒΓ}$ (3)

Σύμφωνα με τα αξιώματα των εμβαδών ισχύει

$$E_{ΔΕΖ}=E_{ΑΒΓ}+E_{ΔΒΕ}+E_{ΕΓΖ}+E_{ΖΑΔ} \qquad (4)$$

Η σχέση (4) λόγω των (1), (2) και (3) γίνεται:

$$E_{ΔΕΖ}=E_{ΑΒΓ}+2E_{ΑΒΓ}+2E_{ΑΒΓ}+2E_{ΑΒΓ} \quad ή \quad E_{ΔΕΖ}=7E_{ΑΒΓ}$$

ή

$$\frac{E_{ΔΕΖ}}{E_{ΑΒΓ}}=7$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

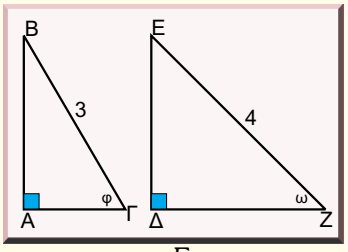
1 Ο λόγος των εμβαδών δύο τετραγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου των περιμέτρων τους;

2 Αν μια γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου ορθογωνίου τριγώνου, ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων αυτών είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου των υποτεινουσών;

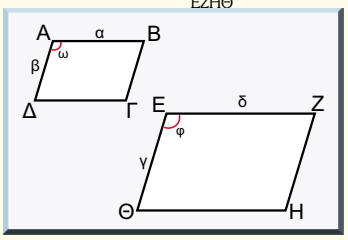
3 Αν μια γωνία ενός παραλληλογράμμου είναι ίση με μία γωνία ενός άλλου παραλληλογράμμου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δυο παραλληλογράμμων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές;

4 Ο λόγος των εμβαδών δυο ισόπλευρων τριγώνων, τι σχέση έχει με το λόγο των περιμέτρων τους;

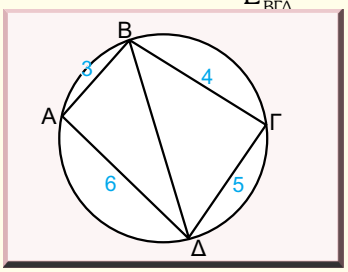
5 Αν $\widehat{\omega}+\widehat{\varphi}=90^\circ$ με τι ισούται ο λόγος $\dfrac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΕΖΔ}}$;



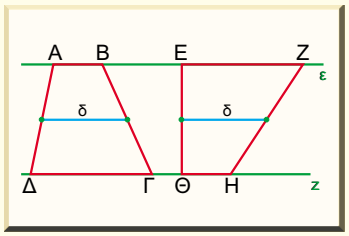
6 Αν $\widehat{\omega}=\widehat{\varphi}$ με τι ισούται $\dfrac{E_{ΑΒΓΔ}}{E_{ΕΖΗΘ}}$;



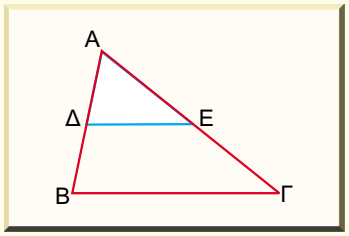
7 Ποια είναι η τιμή του λόγου $\dfrac{E_{ΑΒΔ}}{E_{ΒΓΔ}}$;



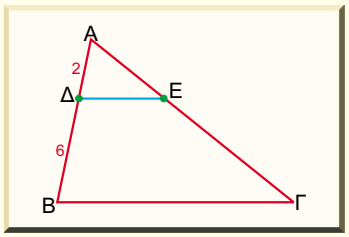
8 Αν ε//z και οι διάμεσοι των τραπεζίων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι ίσες, τι σχέση έχουν τα εμβαδά τους;



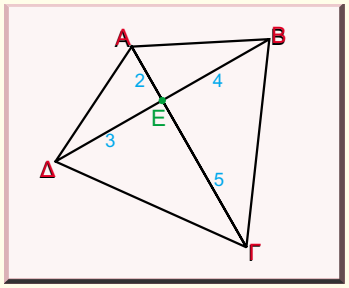
9 Αν τα Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, με τι ισούται ο λόγος $\dfrac{E_{ΑΔΕ}}{E_{ΑΒΓ}}$;



10 Αν ΔΕ//ΒΓ και $E_{ΑΒΓ}=20$, πόσο είναι το $E_{ΑΔΕ}$;



11 Μπορείτε να διατάξετε τα εμβαδά $E_{ΑΒΕ}$, $E_{ΒΓΕ}$, $E_{ΓΔΕ}$ και $E_{ΔΑΕ}$ από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο;



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δυο τρίγωνα έχουν εμβαδά E_1 και E_2 με $E_2=8E_1$. Αν έχουν μια πλευρά ίση, να βρείτε το λόγο των υψών που αντιστοιχούν στις ίσες αυτές πλευρές.

2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών και το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΚΛ και ΑΒΓ.

3 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Κ τυχαίο εσωτερικό σημείο. Φέρουμε ΚΛ=ΑΓ κάθετη στην ΑΓ και ΚΜ=ΒΓ κάθετη στη ΒΓ. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΚΛΜ}}$.

4 Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει α=17, β=15 και γ=8 και ΑΔ είναι το ύψος του. Αφού δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, να υπολογίστε το λόγο $\frac{E_{ΑΒΔ}}{E_{ΑΓΔ}}$.

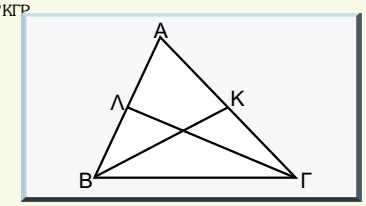
5 Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\hat{A}=\hat{Δ}$ και $\hat{B}+\hat{E}=180°$. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ}$.

6 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $ΓΜ=\frac{8}{9}ΓΑ$. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΒΜΓ.

7 Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{E_{ΑΚΒ}}{E_{ΑΛΓ}}=1$.

β) Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΛΓ και ΚΒ, τότε $\frac{E_{ΒΛΡ}}{E_{ΚΓΡ}}=1$.



8 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε της διαγωνίου ΒΔ. Να βρείτε τους λόγους:

α) $\frac{E_{ΑΔΕ}}{E_{ΓΔΕ}}$ και β) $\frac{E_{ΑΕΒ}}{E_{ΓΕΒ}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από ένα σημείο Ο εσωτερικό του ΑΒΓ φέρουμε κάθετες στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και πάνω σ' αυτές παίρνουμε τμήματα ΟΔ=ΑΒ, ΟΕ=ΒΓ και ΟΖ=ΓΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $E_{ΖΟΕ}=E_{ΑΒΓ}$.

β) $E_{ΔΕΖ}=3E_{ΑΒΓ}$.

2 Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδό $E_{ΑΒΓ}=90$. Από ένα σημείο Μ του ύψους ΑΔ τέτοιο ώστε $\frac{ΑΜ}{ΜΔ}=2$ φέρουμε μια ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ. Να υπολογίσετε το $E_{ΑΕΖ}$.

3 Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε και Ζ, τέτοια ώστε να είναι

$$ΑΔ=\frac{1}{2}ΑΒ,\quad ΒΕ=\frac{1}{3}ΒΓ,\quad ΓΖ=\frac{1}{4}ΓΑ$$

Αν γνωρίζουμε ότι το $E_{ΑΒΓ}=24\ cm^2$, να υπολογίσετε:

α) Τα εμβαδά των τριγώνων ΔΒΕ, ΕΖΓ και ΑΔΖ.

β) Το εμβαδό του τριγώνου ΔΕΖ.

4 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Κ στο εσωτερικό του. Αν ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ οι αποστάσεις του Κ από τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{ΚΔ}{υ_α}+\frac{ΚΕ}{υ_β}+\frac{ΚΖ}{υ_γ}=1$$

5 Αν Ι το έγκεντρο ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ, τότε ΙΒ·ΙΓ=ΙΑ·ΒΓ.

6 Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και μια χορδή του $ΑΒ=\frac{3R}{2}$. Στο Β φέρουμε εφαπτομένη του κύκλου και από το Α την ΑΓ κάθετη σ' αυτήν. Αν ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου, να υπολογίσετε το λογο των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΒΓ.

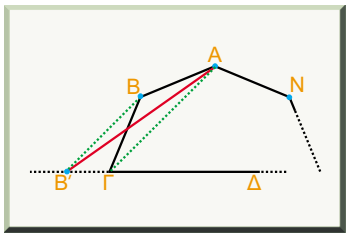
Το τετράγωνο είναι το σχήμα που επιλέξαμε για να καθορίσουμε τη μονάδα μέτρησης των εμβαδών. Επίσης για το τετράγωνο πλευράς 1 αξιωματικά καθορίσαμε ότι το εμβαδό του θα είναι 1. Φαίνεται, επομένως, να κατέχει αυτό μία σημαντική θέση στα εμβαδά και είναι λογικό να επιδιώκουμε να συγκρίνουμε ή και να μετατρέψουμε ένα πολύγωνο σε ένα ισοδύναμο τετράγωνο. Αυτό το τελευταίο μπορούμε να το πετύχουμε με τη βοήθεια των δυο κατασκευών που ακολουθούν.

Πρόβλημα 10.1

Δίνεται πολύγωνο ΑΒΓ...Ν. Να μετασχηματιστεί αυτό σε ένα άλλο ισοδύναμό του με μία πλευρά λιγότερη.

Κατασκευή

Έστω το πολύγωνο ΑΒΓ...Ν. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ και από την κορυφή Β μια ευθεία ΒΒ΄ παράλληλη στην ΑΓ, η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο Β΄. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ΄Γ είναι ισοδύναμα, διότι έχουν κοινή βάση την ΑΓ και ίσα τα ύψη τους από τις κορυφές Β και Β΄ λόγω της παραλληλίας ΒΒ΄//ΑΓ.



Το πολύγωνο ΑΒ΄Δ...Ν είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

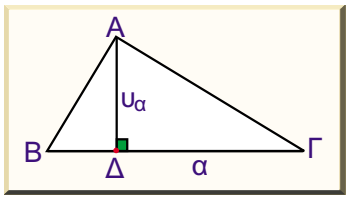
Όσον αφορά το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ μπορεί να αντικατασταθεί από το εμβαδό του τριγώνου ΑΒ΄Γ. Στην περίπτωση όμως αυτή αντί για τις τρεις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ θα έχουμε τις δυο ΑΒ΄ και Β΄Δ., δηλαδή μία λιγότερη.

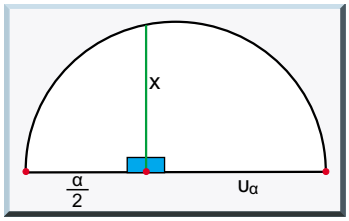
Παρατήρηση

Συμπεραίνουμε ότι κάθε πολύγωνο έχει τη δυνατότητα μειώνοντας κατά μία τις πλευρές του, να μετασχηματιστεί σε ισεμβαδικά πολύγωνα μέχρι να καταλήξει σε ισεμβαδικό τρίγωνο.

Πρόβλημα 10.2

Να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο ισοδύναμο με δοθέν τρίγωνο.





Έστω ΑΒΓ το δοθέν τρίγωνο με εμβαδό $E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2}α \cdot υ_α$.

Αν η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου είναι x, θα πρέπει να ισχύει:

$$x^2 = \frac{1}{2}α \cdot υ_α \quad ή \quad x^2 = \left(\frac{α}{2}\right) \cdot υ_α$$

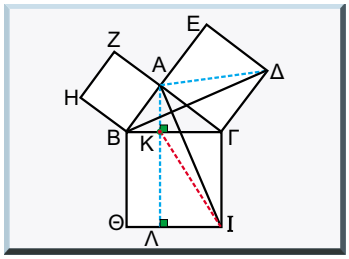
Με άλλα λόγια η πλευρά x θα είναι μέση ανάλογος των τμημάτων $\frac{α}{2}$ και $υ_α$. Η κατασκευή της είναι γνωστή και στη συνέχεια κατασκευάζουμε και το τετράγωνο.

Παρατήρηση

Η αναγωγή ενός πολυγώνου σε ισοδύναμο τετράγωνο καλείται τετραγωνισμός του πολυγώνου αυτού.

Αν και είναι προφανές θα εξηγήσουμε πως τετραγωνίζεται ένα πολύγωνο. Σύμφωνα με τη διαδικασία του προβλήματος 10.1 μπορούμε να πετύχουμε την κατασκευή ισοδυνάμου τριγώνου. Στη συνέχεια με τη διαδικασία του προβλήματος 10.2 κατασκευάζουμε τετράγωνο ισοδύναμο με το τρίγωνο αυτό, άρα και με το αρχικό πολύγωνο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ



Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ. Κατασκευάζουμε εκτός αυτού τα τετράγωνα ΑΒΗΖ, ΑΓΔΕ και ΒΓΙΘ.

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι $E_{ΑΓΔΕ}+E_{ΑΒΗΖ}=E_{ΒΓΙΘ}$.

Φέρουμε τις ΑΙ και ΒΔ και την ΑΚ⊥ΘΙ. Τα δύο τρίγωνα ΒΓΔ και ΑΓΙ έχουν

ΒΓ=ΓΑ (πλευρές τετραγώνου)

ΓΔ-ΓΑ (πλευρές τετραγώνου

$B\hat{Γ}Δ = I\hat{Γ}A$ (η καθεμιά ίση με $90° + \hat{Γ}$)

Άρα είναι ίσα και επομένως $E_{ΒΓΔ}=E_{ΑΓΙ}$.

Όμως $E_{ΒΓΔ}=E_{ΑΓΔ}$ (κοινή βάση ΓΔ και ΑΒ//ΓΔ) και

$E_{ΑΓΙ}=E_{ΚΓΙ}$ (κοινή βάση ΓΙ και ΑΚ//ΓΙ)

Οπότε θα έχουμε $E_{ΑΓΔ}=E_{ΚΓΙ}$ ή $2E_{ΑΓΔ}=2P_{ΚΓΙ}$

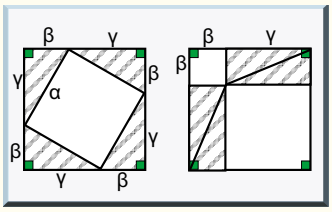
Δηλαδή $E_{ΑΓΔΕ}=E_{ΚΓΙΛ}$

Με αντίστοιχη διαδικασία αποδεικνύεται ότι $E_{ΑΒΗΖ}=E_{ΚΒΘΛ}$ και με πρόσθεση κατά μέλη των δύο τελευταίων σχέσεων θα πάρουμε

$E_{ΑΓΔΕ}+E_{ΑΒΗΖ}=E_{ΚΓΙΛ}+E_{ΚΒΘΙ}$ ή $E_{ΑΓΔΕ}+E_{ΑΒΗΖ}=E_{ΒΓΙΘ}$

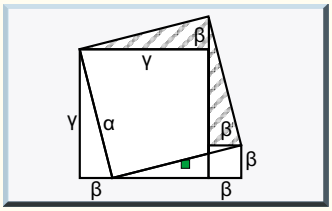
10.6 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Με βάση τα δύο τετράγωνα και γνωστά αξιώματα για τα εμβαδά, να δώσετε μία εξήγηση πως επαληθεύεται το Πυθαγόρειο θεώρημα.



10.7 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Με βάση το σχήμα και γνωστά αξιώματα για τα εμβαδά, να εξηγήσετε πως επαληθεύεται το Πυθαγόρειο θεώρημα.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Να κατασκευαστεί τετράγωνο ισοδύναμο με ορθογώνιο, που έχει διαστάσεις α, β.

2 Να κατασκευαστεί τετράγωνο ισοδύναμο με τραπέζιο, που έχει βάσεις $β_1$, $β_2$ και ύψος υ.

3 Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Να κατασκευαστεί ένα ισοσκελές τρίγωνο ΔΕΖ με ΔΕ=ΔΖ το οποίο να είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο ΑΒΓ και να έχει $\widehat{Δ} = \widehat{Α}$.

4 Να κατασκευαστεί ορθογώνιο, αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με $α^2$ και ότι το άθροισμα των διαστάσεών του είναι ίσο με κ.

5 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο της ΑΒ τέτοιο ώστε $ΒΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$. Να φέρετε ευθεία από το Δ, έτσι ώστε το τρίγωνο να χωριστεί σε δύο χωρία με λόγο εμβαδών $\frac{1}{2}$.

6 Να διαιρεθεί ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ σε δύο μέρη ισοδύναμα με μια ευθεία, που διέρχεται από την κορυφή Γ.

7 Να διαιρεθεί ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ σε δύο μέρη ισοδύναμα, με μια ευθεία, που να περνάει από ένα σταθερό σημείο Σ της πλευράς του ΑΒ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6, ΑΓ=8 και $\mu_\alpha=5$. Να υπολογίσετε τη ΒΓ και το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

2 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90°$. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των δυνάμεων των σημείων Β και Γ ως προς τον εγγεγραμμένο κύκλο είναι ίσο με $E^2_{ΑΒΓ}$.

3 Να αποδείξετε ότι το εμβαδό τραπεζίου ΑΒΓΔ ισούται με το γινόμενο μιας από τις μη παράλληλες πλευρές του επί την απόσταση του μέσου της άλλης απ' αυτήν.

4 Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=12, ΒΓ=13, ΑΓ=5. Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου, που έχει κορυφές τα σημεία επαφής του ΑΒΓ με τον εγγεγραμμένο κύκλο.

5 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, τα σημεία Δ και Ζ στην ΑΒ ώστε $ΑΔ=ΒΖ=\frac{\gamma}{3}$, τα Ε και Ι στην ΑΓ ώστε $ΑΕ=ΓΙ=\frac{\beta}{4}$ και Η και Θ στη ΒΓ ώστε $ΒΗ=ΓΘ=\frac{\alpha}{6}$. Αν το $E_{ΑΒΓ}=144$, να υπολογίσετε το εμβαδό του εξαγώνου ΖΔΕΙΘΗ.

6 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=β, ΑΒ=γ και $\widehat{A}=30°$. Με βάσεις τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε έξω από το τρίγωνο τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του εξαγώνου ΒΓΖΗΕΔ.

7 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΖ η διχοτόμος του. Πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε ΑΔ=ΒΖ και ΑΕ=ΓΖ. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΕ και ΑΓΔ.

8 Οι πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ εγγράψιμου τετραπλεύρου αποτελούν γεωμετρική πρόοδο κατά τη σειρά αυτή. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΔ.

9 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Σ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν E_1, E_2, E_3 και E_4 είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΣΑΒ, ΣΒΓ, ΣΓΔ και ΣΔΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_1\cdot E_4}{E_2\cdot E_3}=\left(\frac{ΣΑ}{ΣΓ}\right)^2.$$

10 Έστω ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγράψιμο σε κύκλο με ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ, ΔΑ=δ. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{ΑΓ}{ΒΔ}=\frac{αδ+βγ}{αβ+γδ}$$ (2ο θεώρημα Πτολεμαίου).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 10ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

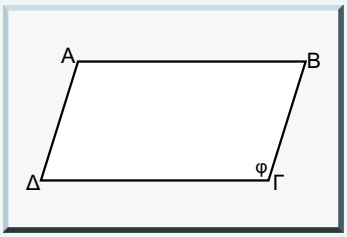
1 Αν ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχει τριπλάσια περίμετρο από ένα άλλο ισόπλευρο τρίγωνο ΚΛΜ, τότε ο λόγος $\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΚΛΜ}}$ είναι ίσος με:

α) ❑ $\frac{1}{3}$ β) ❑ 3

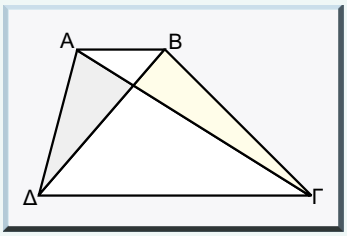
γ) ❑ 6 δ) ❑ 9

ε) ❑ $\frac{1}{6}$

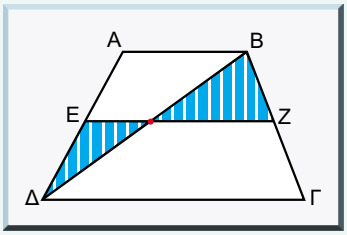
2 Το εμβαδό Ε του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσο με Ε=ΑΒ·ΑΔ·ημφ.



3 Αν τα σκιασμένα εμβαδά είναι ίσα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο;



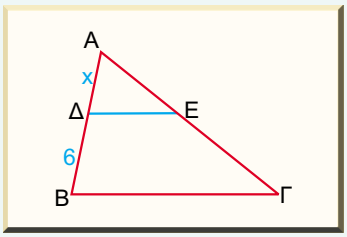
4 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι η διάμεσος. Το σκιασμένο εμβαδό τι μέρος όλου του εμβαδού είναι;



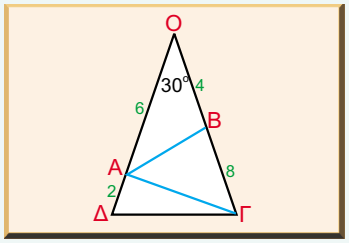
α) ❑ το $\frac{1}{2}$ β) ❑ το $\frac{1}{3}$ γ) ❑ το $\frac{1}{4}$

δ) ❑ το $\frac{1}{5}$ ε) ❑ τα $\frac{2}{3}$

5 Αν ΔΕ//ΒΓ και $\frac{E_{ΑΔΕ}}{E_{ΒΓΕΔ}} = \frac{1}{8}$, πόσο είναι το x;



6 Να υπολογίσετε τα εμβαδά $E_{ΟΑΒ}$, $E_{ΑΒΓΔ}$, $E_{ΑΒΓ}$.



7 Να εξηγήσετε γιατί κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι λάθος ή σωστό.

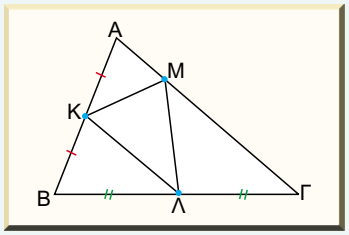
α) Αν διπλασιαστεί η βάση και το αντίστοιχο ύψος ενός τριγώνου, τότε διπλασιάζεται και το εμβαδό του.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

β) Σε κάθε τραπέζιο κάθε διαγώνιος χωρίζει αυτό σε δύο τρίγωνα με άνισα εμβαδά.

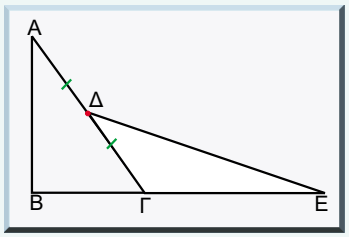
❑ Σωστό ❑ Λάθος

γ) Αν τα Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα και το Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ, τότε το εμβαδό του ΚΛΜ είναι το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του ΑΒΓ.



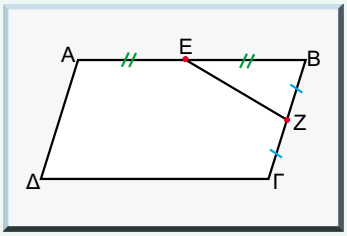
❑ Σωστό ❑ Λάθος

δ) Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ είναι ισοδύναμα και το Δ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ, τότε και το Γ είναι μέσο του ΒΕ.



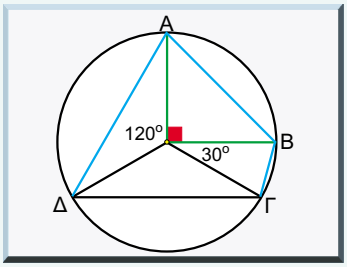
❑ Σωστό ❑ Λάθος

ε) Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ. Το εμβαδό του τριγώνου ΒΕΖ είναι το $\frac{1}{8}$ του εμβαδού του ΑΒΓΔ.



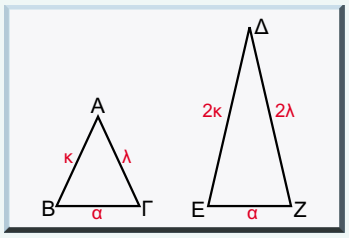
❑ Σωστό ❑ Λάθος

στ) Αν η ακτίνα του κύκλου είναι 1 το εμβαδό του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι ίσο με $\frac{5\sqrt{3}}{4}$.



❑ Σωστό ❑ Λάθος

ζ) Το εμβαδό του τριγώνου ΔΕΖ είναι διπλάσιο από το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.



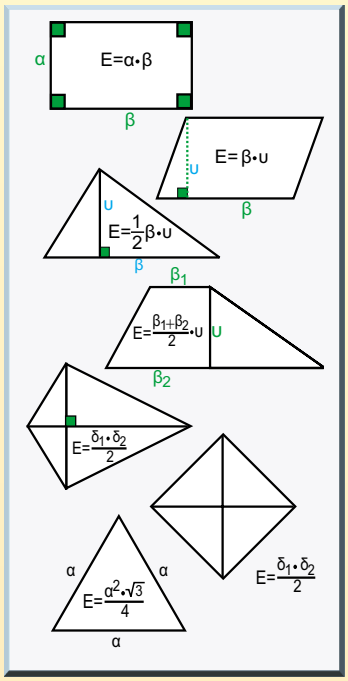
❑ Σωστό ❑ Λάθος

8 Ένα τρίγωνο ΑΒΓ μπορεί να μετασχηματιστεί σε ισοδύναμο τετράγωνο:

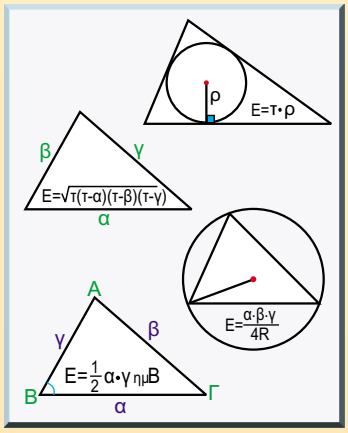
Α) ❑ Πάντοτε.
Β) ❑ Ποτέ.
Γ) ❑ Μόνο αν είναι ορθογώνιο.
Δ) ❑ Μόνο αν είναι ισόπλευρο.
Ε) ❑ Μόνο αν είναι ορθογώνιο ισοσκελές.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

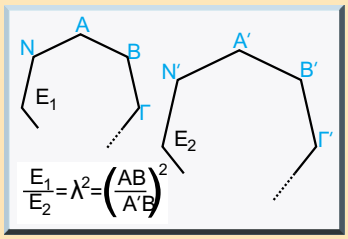
Στο 10ο κεφάλαιο ορίσαμε το εμβαδό ενός σχήματος ως έναν αριθμό που εκφράζει το μέγεθος της έκτασης που καταλαμβάνει το σχήμα. Αποδείξαμε τους τύπους των εμβαδών ορισμένων πολυγώνων και συγκεκριμένα του ορθογωνίου, του παραλληλογράμμου, του τριγώνου, του τραπεζίου, του τετραπλεύρου με κάθετες διαγώνιες, του ρόμβου και του ισοπλεύρου τριγώνου.



Στη συνέχεια εκφράσαμε το εμβαδό τριγώνου και με άλλους τρόπους, οι οποίοι περιέχουν μετρικά στοιχεία του.

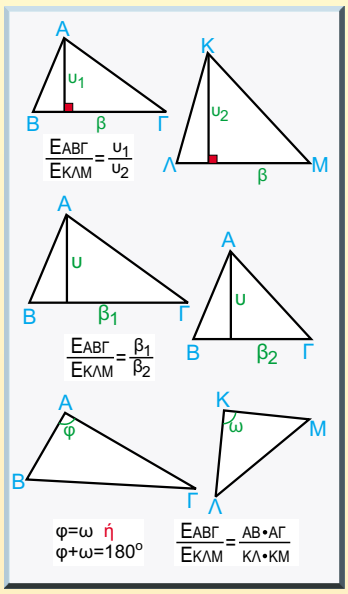


Μελετήσαμε τη σχέση εμβαδών όμοιων σχημάτων και αποδείξαμε ότι ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων με λόγο ομοιότητας λ ισούται με λ^2.



Επίσης μελετήσαμε τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των εμβαδών δύο τριγώνων που έχουν

- κοινή βάση ή ίσες βάσεις.
- δύο αντίστοιχα ύψη ίσα.
- ένα ζεύγος γωνιών ίσες ή παραπληρωματικές.



Το κεφάλαιο έκλεισε με την έννοια του τετραγωνισμού (κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με δοσμένο σχήμα) και με δύο προβλήματα κατασκευών που μας επιτρέπουν να τετραγωνίσουμε οποιοδήποτε πολύγωνο.