Κεφάλαιο

9

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

9.1 Μετρικές σχέσεις σε τρίγωνα

Μετρική σχέση στη Γεωμετρία λέγεται κάθε σχέση που συνδέει τα μέτρα ευθύγραμμων τμημάτων ή και άλλων ομοειδών γεωμετρικών μεγεθών, όταν αυτά μετρούνται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Επειδή η μονάδα μέτρησης είναι αυθαίρετη, κάθε μετρική σχέση είναι ανεξάρτητη από τη μονάδα μέτρησης και είναι καθαρά σχέση λόγων.

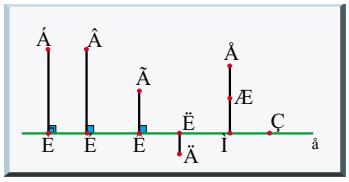
Συγκεκριμένα, με την έκφραση **μετρικές σχέσεις σε τρίγωνα** εννοούμε τις μετρικές σχέσεις των κύριων στοιχείων τους (γωνίες, πλευρές) με τα δευτερεύοντα (ύψη, διαμέσοι κ.α.), όπως και τις σχέσεις των δευτερευόντων στοιχείων μεταξύ τους.

Υπενθυμίζουμε ότι εφόσον κάθε μετρική σχέση συνδέει τα μέτρα ευθύγραμμων τμημάτων το γινόμενο ΑΒ·ΒΓ, όπου ΑΒ ή ΒΓ ευθύγραμμα τμήματα, είναι γινόμενο μηκών και όχι γινόμενο ευθύγραμμων τμημάτων.

Στις μετρικές σχέσεις που ακολουθούν θα χρειαστούμε την έννοια της ορθής προβολής.

ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΗΜΕΙΟΥ - ΠΡΟΒΟΛΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Την προβολή ενός σημείου σε ευθεία την ορίσαμε στην παράγραφο 2.3.4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε μία ευθεία ε και τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και Η. Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στην παράγραφο 2.3.4 οι προβολές των Α, Β, Γ, Δ, Ε είναι τα σημεία Θ, Ι, Κ, Λ, Μ αντίστοιχα. Τα σημεία Ζ και Ε έχουν την ίδια προβολή πάνω στην ευθεία ε, το σημείο Μ. Προβολή του σημείου Η είναι το



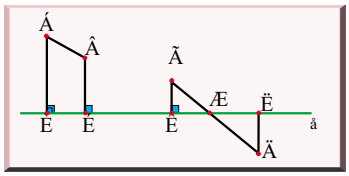
ίδιο το Η. Επεκτείνουμε τώρα την έννοια της προβολής σημείου σε προβολή σχήματος.

Ορισμός

Αν βρούμε τις προβολές όλων των σημείων ενός σχήματος Σ σε μία ευθεία ε, τότε το σύνολο όλων των προβολών αυτών ονομάζεται προβολή του σχήματος Σ στην ε.

Αποδεικνύεται ότι η προβολή ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μία ευθεία είναι ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τις προβολές των άκρων του.

Έτσι στο διπλανό σχήμα προβολή του τμήματος ΑΒ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΘΙ, προβολή του ΓΔ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και προβολή του ΓΖ είναι το ΚΖ.



9.1.1 Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνια τρίγωνα

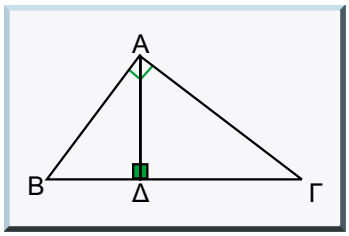
Θεώρημα 9.1

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του ισούται με το γινόμενο της προβολή της στην υποτείνουσα επί την υποτείνουσα.

Απόδειξη

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $AB^2 = BΔ \cdot BΓ$.

Τα ευθύγραμμα τμήματα, που εμφανίζονται στη σχέση αυτή, είναι πλευρές των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΒΓ, τα οποία έχουν τις γωνίες $\widehat{Δ}$ και $\widehat{A}$ ορθές, και τη γωνία $\widehat{B}$ κοινή. Επομένως είναι όμοια και προκύπτει ότι $\frac{AB}{BΓ} = \frac{ΔB}{AB} = \frac{AΔ}{AΓ}$. Από τα δύο πρώτα κλάσματα της αναλογίας αυτής παίρνουμε $AB^2 = BΔ \cdot BΓ$. ■



9.1 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να γράψετε την αντίστοιχη σχέση για την πλευρά ΑΓ, να προσδιορίσετε τα δύο όμοια τρίγωνα και να κάνετε την απόδειξη.

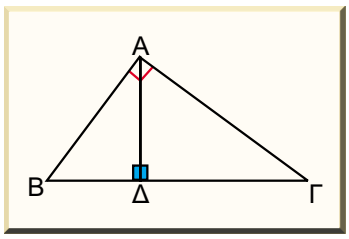
Πόρισμα 9.1

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του ισούται με το λόγο των προβολών τους στην υποτείνουσά του.

Θεώρημα 9.2

Πυθαγόρειο θεώρημα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσάς του.



Απόδειξη

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) ισχύουν οι σχέσεις $AB^2=B\Delta\cdot B\Gamma$ και $A\Gamma^2=\Gamma\Delta\cdot B\Gamma$ (σύμφωνα με το θεώρημα 9.1). Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη παίρνουμε:

$$AB^2+A\Gamma^2=B\Delta\cdot B\Gamma+\Gamma\Delta\cdot B\Gamma=(B\Delta+\Gamma\Delta)B\Gamma=B\Gamma\cdot B\Gamma=B\Gamma^2$$ ■

Πόρισμα 9.2

Η διαγώνιος δ ορθογωνίου με διαστάσεις α και β είναι ίση με $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

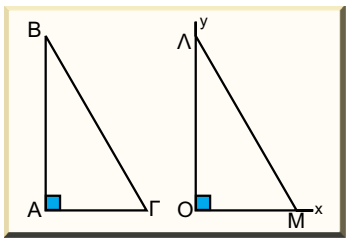
Πόρισμα 9.3

Το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με τη διαφορά του τετραγώνου της άλλης κάθετης από το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Θεώρημα 9.3

Αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $AB^2+A\Gamma^2=B\Gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ.



Απόδειξη

Στις πλευρές Oy και Ox μιας ορθής γωνίας $x\widehat{O}y$ παίρνουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα ΟΛ και ΟΜ αντίστοια τέτοια, ώστε ΟΛ=ΑΒ και ΟΜ=ΑΓ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΛΜ ισχύει $O\Lambda^2+OM^2=M\Lambda^2$ (σύμφωνα με το θεώρημα 9.2). Εφόσον ΑΒ=ΟΛ και ΑΓ=ΟΜ, θα ισχύει και $AB^2+A\Gamma^2=M\Lambda^2$ ή $B\Gamma^2=M\Lambda^2$ ή ΒΓ=ΜΛ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΟΛΜ θα έχουν έτσι τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα θα είναι ίσα. Συνεπώς και το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90°$. ■

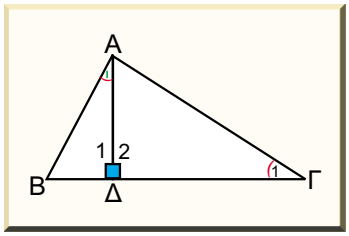
Θεώρημα 9.4

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το ύψος προς την υποτείνουσα είναι μέσο ανάλογο των δύο προβολών των κάθετων πλευρών πάνω σ' αυτήν.

Απόδειξη

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$ και ΑΔ το ύψος του. Θέλουμε να αποδείξουμε τη σχέση:

$$ΑΔ^2=ΔΒ\cdot ΔΓ \quad ή \quad \frac{ΔΒ}{ΑΔ}=\frac{ΑΔ}{ΔΓ}.$$



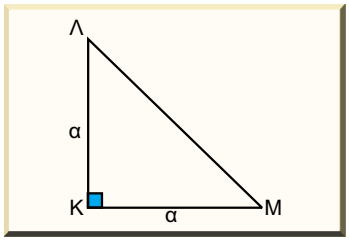
Τα τμήματα που σχηματίζουν την αναλογία αυτή είναι πλευρές των τριγώνων ΑΒΔ και ΓΑΔ, τα οποία έχουν τις γωνίες $\widehat{Δ}_1=\widehat{Δ}_2$ (ορθές) και τις γωνίες $\widehat{Α}_1=\widehat{Γ}_1$ (οξείες με πλευρές κάθετες). Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΑΔ είναι όμοια, οπότε προκύπτει η σχέση

$$\frac{ΑΔ}{ΓΔ}=\frac{ΒΔ}{ΑΔ} \quad ή \quad ΑΔ^2=ΔΒ\cdot ΔΓ.$$ ■

Εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος

Να υπολογιστεί η υποτείνουσα ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές μήκους α.

Λύση



Έστω τρίγωνο ΚΛΜ με $\widehat{Κ}=90°$ και ΚΛ=ΚΜ=α. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$ΜΛ^2=ΚΜ^2+ΚΛ^2=α^2+α^2=2α^2$ ή $ΜΛ=\sqrt{2}\,α$.

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $\frac{ΜΛ}{α}=\sqrt{2}$ ή $\frac{ΜΛ}{ΚΜ}=\sqrt{2}$ δηλαδή τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ και ΚΜ έχουν λόγο τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$.

Συμπέρασμα

Στηριζόμενοι στην εφαρμογή που προηγήθηκε διαπιστώνουμε πως η διαγώνιος δ τετραγώνου πλευράς α έχει μήκος $α\sqrt{2}$.

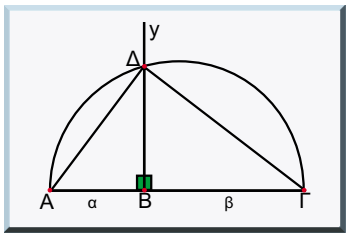
Γεωμετρικές κατασκευές

Πρόβλημα 9.1

Να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα που να είναι η μέση ανάλογος δύο ευθύγραμμων τμημάτων α και β.

Ανάλυση

Το ζητούμενο είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα x τέτοιο, ώστε να ισχύει $x^2=α\cdot β$. Αυτή η σχέση μας οδηγεί στο θέωρημα 9.4.



Σύνθεση

Παίρνουμε δύο διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ=α και ΒΓ=β και φέρουμε μια ημιευθεία By κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Με διάμετρο την ΑΓ κατασκευάζουμε ένα ημικύκλιο το οποίο τέμνει την ημιευθεία By στο σημείο Δ. Το σημείο Δ είναι κορυφή

ορθής γωνίας και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ είναι η μέση ανάλογος των ΑΒ και ΒΓ.

Απόδειξη

Η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι ορθή (εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο). Άρα το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο και το ΔΒ είναι το ύψος του προς την υποτείνουσα. Άρα ισχύει $B\Delta^2=BA\cdot B\Gamma$ ή $B\Delta^2=\alpha\cdot\beta$ (σύμφωνα με το θεώρημα 9.4).

Διερεύνηση

Το τμήμα πάντοτε κατασκευάζεται και είναι μοναδικό.

Πρόβλημα 9.2

Αν α γνωστό ευθύγραμμο τμήμα και ν φυσικός αριθμός, να κατασκευαστεί το τμήμα $\sqrt{\nu}\,\alpha$.

Ανάλυση - Σύνθεση

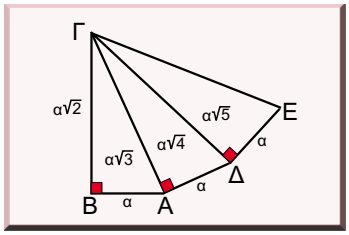
Η εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος μας δίνει έναν τρόπο κατασκευής του τμήματος $\sqrt{\nu}\,\alpha$, αν $\nu=2$.

Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=90^\circ$ και $AB=\alpha$ και $B\Gamma=\sqrt{2}\,\alpha$. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$A\Gamma^2=BA^2+B\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2=\alpha^2+(\sqrt{2}\,\alpha)^2$

ή $A\Gamma^2=3\alpha^2\cdot 3$ ή $A\Gamma=\sqrt{3}\,\alpha$

Οδηγηθήκαμε έτσι στην κατασκευή του ευθύγραμμου τμήματος $\sqrt{3}\,\alpha$.



Συνεχίζοντας, κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ με $\hat{A}=90^\circ$, $A\Delta=\alpha$ και $A\Gamma=\sqrt{3}\,\alpha$. Οπότε $\Delta\Gamma^2=\Gamma A^2+A\Delta^2$ ή $\Delta\Gamma^2=(\sqrt{3}\,\alpha)^2+\alpha^2$ ή $\Delta\Gamma^2=4\alpha^2$ ή $\Delta\Gamma=\sqrt{4}\,\alpha$. Κατά συνέπεια κατασκευάστηκε ένα ευθύγραμμο τμήμα $\sqrt{4}\,\alpha$.

Με την ίδια διαδικασία είναι φανερό ότι μπορούμε να πετύχουμε οποιαδήποτε κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος της μορφής $\sqrt{\nu}\,\alpha$.

9.2 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα που να είναι η μέση ανάλογος των α και 7α και να ανακαλύψετε άλλο τρόπο κατασκευής του τμήματος $\sqrt{\nu}\,\alpha$.

9.1.2 Μετρικές σχέσεις σε τυχαία τρίγωνα

Το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει στα ορθογώνια τρίγωνα. Γενικεύοντάς το θα εξετάσουμε αν ισχύουν ανάλογες σχέσεις και στα μη ορθογώνια τρίγωνα.

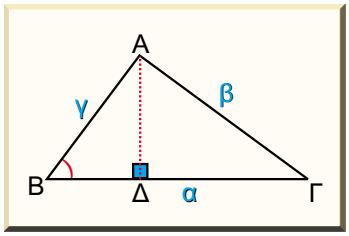
Θεώρημα 9.5

Γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για οξεία γωνία

Το τετράγωνο μιας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο του γινομένου της μιας από τις πλευρές αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτήν.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} < 90°$. Φέρουμε το ύψος ΑΔ, οπότε η ΒΔ είναι προβολή της ΑΒ στη ΒΓ.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2$

ή $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + (ΒΓ - ΒΔ)^2$

ή $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + ΒΔ^2 - 2ΒΓ \cdot ΒΔ$

ή $ΑΓ^2 = \underbrace{ΑΔ^2 + ΒΔ^2} + ΒΓ^2 - 2ΒΓ \cdot ΒΔ$

ή $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2ΒΓ \cdot ΒΔ$ ή $β^2 = γ^2 + α^2 - 2α \cdot ΒΔ$ ■

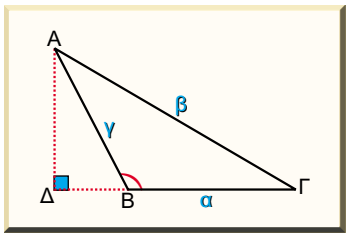
Θεώρημα 9.6

Γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για αμβλεία γωνία

Το τετράγωνο μιας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο του γινομένου της μιας από τις πλευρές αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτήν.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} > 90°$. Φέρουμε το ύψος ΑΔ οπότε η ΒΔ είναι προβολή της ΑΒ στη ΒΓ.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει

$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + (ΔΒ + ΒΓ)^2$

ή $ΑΓ^2 = \underbrace{ΑΔ^2 + ΔΒ^2} + ΒΓ^2 + 2ΒΓ \cdot ΔΒ$

ή $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + 2ΒΓ \cdot ΒΔ$

ή $β^2 = γ^2 + α^2 + 2α \cdot ΒΔ$ ■

Νόμος συνημιτόνων

Τα δύο προηγούμενα θεωρήματα συνοψίζονται στην παρακάτω πρόταση, που είναι γνωστή ως νόμος των συνημιτόνων.

Πόρισμα 9.4

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\cdot\gamma\cdot\text{συν}A$$
$$\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\cdot\gamma\cdot\text{συν}B$$
$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\cdot\beta\cdot\text{συν}\Gamma$$

Απόδειξη

Αν η γωνία $\widehat{B}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι οξεία, ισχύει η σχέση $\beta^2=\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\cdot B\Delta$ (θεώρημα 9.5). Επειδή $B\Delta=\gamma\cdot\text{συν}B$, η προηγούμενη σχέση γράφεται $\beta^2=\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\cdot\gamma\cdot\text{συν}B$.

Αν η γωνία $\widehat{B}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι αμβλεία, ισχύει η σχέση $\beta^2=\gamma^2+\alpha^2+2\alpha\cdot B\Delta$ (θεώρημα 9.6). Επειδή $B\Gamma=\gamma\text{συν}A\widehat{B}\Delta$, η προηγούμενη σχέση γράφεται $\beta^2=\gamma^2+\alpha^2+2\alpha\cdot\gamma\cdot\text{συν}A\widehat{B}\Delta$ ή $\beta^2=\gamma^2+\alpha^2+2\alpha\cdot\gamma\cdot(-\text{συν}B)$ ή $\beta^2=\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\cdot\gamma\cdot\text{συν}B$.

Ομοίως αποδεικνύονται και οι άλλες δύο σχέσεις

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\cdot\gamma\cdot\text{συν}A \quad \text{και} \quad \gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\cdot\beta\cdot\text{συν}\Gamma$$ ■

Έλεγχος για το είδος γωνίας τριγώνου

Τα παραπάνω θεωρήματα μας δίνουν τη δυνατότητα του προσδιορισμού του είδους των γωνιών ενός τριγώνου, αν γνωρίζουμε τα μήκη των πλευρών.

Πόρισμα 9.5

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι επόμενες ισοδυναμίες:

$\alpha^2<\beta^2+\gamma^2$ **, αν και μόνο αν** $\widehat{A}<90^\circ$

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ **, αν και μόνο αν** $\widehat{A}=90^\circ$

$\alpha^2>\beta^2+\gamma^2$ **, αν και μόνο αν** $\widehat{A}>90^\circ$

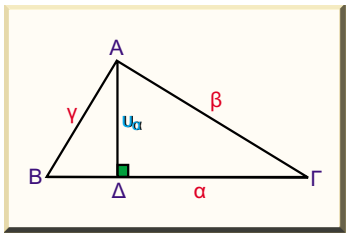
Πρόβλημα 9.3

Αν ΑΒ=γ, ΒΓ=α και ΑΓ=β οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογιστούν τα μήκη των υψών του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει των α, β, γ.

Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B}<90^\circ$ και ΑΔ το ύψος του. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει $A\Delta^2=AB^2-B\Delta^2$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ $\widehat{B} < 90^\circ$, άρα $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot B\Delta$ (θεώρημα 9.5). Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς ΒΔ έχουμε



$$B\Delta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} \qquad (2)$$

Η σχέση (1) λόγω της (2) γίνεται

$$A\Delta^2 = \gamma^2 - \left(\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha}\right)^2 =$$

$$= \left(\gamma + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha}\right) \cdot \left(\gamma - \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{2\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} \cdot \frac{2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2}{2\alpha} =$$

$$= \frac{[(\alpha+\gamma)^2 - \beta^2]}{2\alpha} \cdot \frac{[\beta^2 - (\alpha-\gamma)^2]}{2\alpha} =$$

$$= \frac{(\alpha+\gamma+\beta)(\alpha+\gamma-\beta)\cdot(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-\alpha+\gamma)}{4\alpha^2} =$$

$$= \frac{2\tau \cdot 2(\tau-\beta) \cdot 2(\tau-\gamma) 2(\tau-\alpha)}{4\alpha^2} = \frac{4\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\alpha^2}$$

Άρα $$A\Delta = \upsilon_\alpha = \frac{2\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\alpha}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$\upsilon_\beta = \frac{2\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\beta} \quad \text{και} \quad \upsilon_\gamma = \frac{2\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\gamma}$$

9.3 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Με ανάλογο τρόπο να υπολογίσετε τα ύψη υ_α, υ_β, υ_γ ενός αμβλυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ με $\widehat{B} > 90^\circ$.

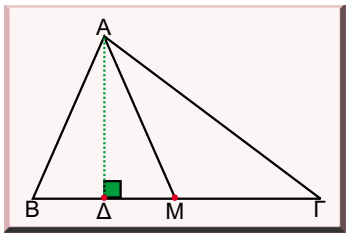
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ

Θεώρημα 9.7

1ο θεώρημα διαμέσων

Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο πλευρών του είναι ίσο με το διπλάσιο του τετραγώνου της περιεχόμενης μεταξύ των πλευρών αυτών διαμέσου, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσός του ΑΜ και το ύψος του ΑΔ. Οι γωνίες $A\widehat{M}B$ και $A\widehat{M}Γ$ είναι παραπληρωματικές και αν η μία είναι οξεία, έστω η $A\widehat{M}B$, τότε η άλλη θα είναι αμβλεία. Σύμφωνα με τα γενικευμένα θεωρήματα 9.5 και 9.6 στα τρίγωνα ΑΜΓ και ΑΜΒ έχουμε:

$AΓ^2=AM^2+MΓ^2+2MΓ\cdot MΔ$ και

$AB^2=AM^2+MB^2-2MB\cdot MΔ$

Με πρόσθεση των δύο αυτών σχέσεων κατά μέλη και επειδή ΜΒ=ΜΓ παίρνουμε $AΓ^2+AB^2=2AM^2+MΓ^2+MB^2$

ή $AΓ^2+AB^2=2AM^2+\left(\frac{BΓ}{2}\right)^2+\left(\frac{BΓ}{2}\right)^2$ ή

$AΓ^2+AB^2=2AM^2+2\left(\frac{BΓ}{2}\right)^2$ ή $AΓ^2+AB^2=2AM^2+\frac{BΓ^2}{2}$

ή $\gamma^2+\beta^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}$ ■

Το θεώρημα 9.7 μπορεί να εφαρμοστεί και για τις άλλες διαμέσους του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε έχουμε συνολικά από το 1° θεώρημα διαμέσων τις παρακάτω σχέσεις:

$$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2=2\mu_\gamma^2+\frac{\gamma^2}{2}} \qquad \boldsymbol{\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}} \qquad \boldsymbol{\gamma^2+\alpha^2+2\mu_\beta^2+\frac{\beta^2}{2}}$$

Οι παραπάνω σχέσεις αν επιλυθούν ως προς μ_α, μ_β, μ_γ μας επιτρέπουν τον υπολογισμό των διαμέσων τριγώνου, αν είναι γνωστές οι πλευρές του. Συγκεκριμένα, αν επιλύσουμε τις παραπάνω σχέσεις ως προς μ_α, μ_β, μ_γ προκύπτουν οι τύποι:

$$\mu_\alpha^2=\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4},\quad \mu_\beta^2=\frac{2\gamma^2+2\alpha^2-\beta^2}{4},\quad \mu_\gamma^2=\frac{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}{4}$$

Θεώρημα 9.8

2ο θεώρημα διαμέσων

Σε κάθε τρίγωνο η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω σ' αυτήν.

Απόδειξη

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έστω ΑΒ<ΑΓ, οπότε $\widehat{M}_1<\widehat{M}_2$.

Εφαρμόζοντας το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΑΜΓ και ΑΜΒ έχουμε τις σχέσεις:

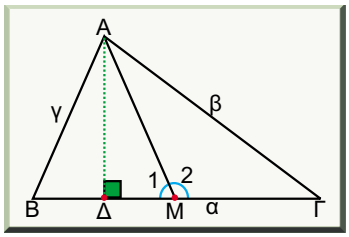
$$ΑΓ^2=ΜΑ^2+ΜΓ^2+2ΜΓ\cdot ΜΔ \quad \text{και}$$
$$ΑΒ^2=ΜΑ^2+ΜΒ^2-2ΜΒ\cdot ΜΔ$$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$ΑΓ^2-ΑΒ^2=ΜΓ^2-ΜΒ^2+2ΜΓ\cdot ΜΔ-(-2ΜΒ\cdot ΜΔ)$$

Επειδή $ΜΒ = ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$ΑΓ^2-ΑΒ^2=2ΒΓ\cdot ΜΔ$$
$$\text{ή} \quad β^2-γ^2=2α\cdot ΜΔ$$



9.4 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να εφαρμόσετε αν τα θεωρήματα 9.7 και 9.8 σε ορθογώνιο και σε ισοσκελές τρίγωνο. Να διατυπώσετε κάποια συμπεράσματα αντίστοιχα.

Πρόβλημα 9.4

Να βρεθεί ο Γ.Τ των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $ΜΑ^2+ΜΒ^2=κ^2$, όπου Α και Β δύο δοσμένα σημεία και κ γνωστό ευθύγραμμο τμήμα.

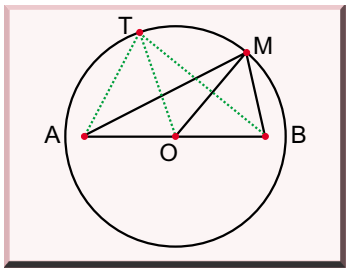
Λύση

Έστω Μ ένα σημείο για το οποίο ισχύει $ΜΑ^2+ΜΒ^2=κ^2$. Στο τρίγωνο ΜΑΒ σύμφωνα με το 1° θεώρημα των διαμέσων έχουμε:

$ΜΑ^2 + ΜΒ^2 = 2ΜΟ^2 + \frac{ΑΒ^2}{2}$ από όπου προκύπτει

$$2ΜΟ^2 + \frac{ΑΒ^2}{2} = κ^2 \text{ ή } 4ΜΟ^2=2κ^2-ΑΒ^2$$

$$\text{ή} \qquad ΜΟ = \frac{1}{2}\sqrt{2κ^2 - ΑΒ^2}, \quad \text{εφόσον } 2κ^2-ΑΒ^2\geq 0.$$



Το δεύτερο μέλος της τελευταίας ισότητας απαρτίζεται από σταθερά μεγέθη. Άρα το ΜΟ έχει σταθερό μήκος. Δηλαδή το σημείο Μ απέχει από το σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση ίση με $\frac{1}{2}\sqrt{2κ^2 - ΑΒ^2}$. Άρα ανήκει σε κύκλο $\left(O, \frac{1}{2}\sqrt{2κ^2 - ΑΒ^2}\right)$.

Αντιστρόφως

Αν θεωρήσουμε τώρα ένα οποιοδήποτε σημείο Τ του κύκλου αυτού θα έχουμε

$$TO=\frac{1}{2}\sqrt{2\kappa^2-AB^2} \quad (1) \text{ και } TA^2+TB^2=2TO^2+\frac{AB^2}{2} \quad (2)$$

Η σχέση (2) λόγω της (1) γίνεται

$$TA^2+TB^2=2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\kappa^2-AB^2}\right)^2+\frac{AB^2}{2}$$

και τελικά $TA^2+TB^2=\kappa^2$.

Ώστε για κάθε σημείο Τ του συγκεκριμένου κύκλου ικανοποιεί τη σχέση $TA^2+TB^2=\kappa^2$.

Άρα ο Γ.Τ είναι ο προαναφερόμενος κύκλος.

Διερεύνηση

Αναφέρθηκε σε κάποιο σημείο η προϋπόθεση $2\kappa^2-AB^2\geq 0$.

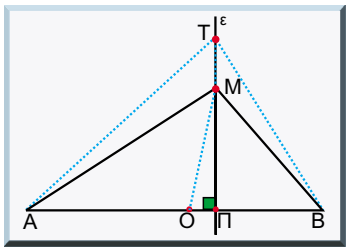
Αν $2\kappa^2-AB^2<0$ δεν υπάρχει κανένα σημείο με την ιδιότητα αυτή.

Αν $2\kappa^2-AB^2=0$, υπάρχει μόνο ένα σημείο το Ο.

Πρόβλημα 9.5

Δίνονται δύο σταθερά σημεία Α και Β και ένα ευθύγραμμο τμήμα κ. Να βρεθεί ο Γ.Τ των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $MA^2-MB^2=\kappa^2$.

Απόδειξη



Έστω Μ ένα σημείο για το οποίο ισχύει $MA^2-MB^2=\kappa^2$. Στο τρίγωνο ΜΑΒ θα ισχύει ακόμη $MA^2-MB^2=2AB\cdot O\Pi$, όπου Ο το μέσον του ΑΒ και Π η προβολή του Μ στην ΑΒ.

Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει

$$2AB\cdot O\Pi=\kappa^2 \quad \text{ή} \quad O\Pi=\frac{\kappa^2}{2AB}$$

Στη σχέση αυτή το δεύτερο μέλος είναι σταθερό άρα και το ΟΠ έχει σταθερό μήκος. Το σημείο Ο όμως είναι σταθερό, επομένως και το Π θα είναι σταθερό. (Το σταθερό της απόστασης ΟΠ δεν αρκεί να συμπεράνουμε ότι το Π είναι σταθερό. Θα μπορούσε να βρίσκεται στη συμμετρική θέση ως προς το Ο. Αυτό το αποκλείουμε όμως διότι $MA^2=MB^2+\kappa^2>MB^2$, άρα και $MA>MB$.) Άρα το σημείο Μ ανήκει σε ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο Π και είναι κάθετη στην ΑΒ.

Αντιστρόφως

Έστω Τ τυχαίο σημείο ευθείας ε. Τότε σύμφωνα με το 2ο θεώρημα των διαμέσων έχουμε

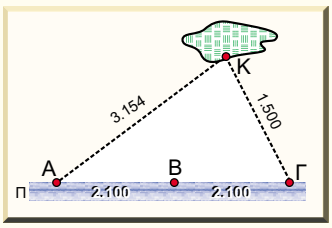
$$ΤΑ^2 - ΤΒ^2 = 2ΑΒ \cdot ΟΠ = 2ΑΒ \frac{κ^2}{2ΑΒ} = κ^2.$$

Άρα για το σημείο Τ ισχύει η σχέση $ΤΑ^2 - ΤΒ^2 = κ^2$

Επομένως ο ζητούμενος Γ.Τ είναι η ευθεία ε.

9.5 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα ποτάμι (Π) και στα σημεία του Α, Β και Γ υπάρχουν τρεις αντλίες νερού. Το σημείο Β απέχει από το Α απόσταση ίση με 2.100 μέτρα και το σημείο Γ απέχει από το Β απόσταση ίση και αυτή με 2.100 μέτρα. Το αγρόκτημα Κ απέχει από τις αντλίες Α και Γ αποστάσεις ίσες με 3.154 και 1.500 μέτρα αντίστοιχα. Το κόστος αγοράς και τοποθέτησης των σωλήνων είναι 2.000 το μέτρο και το κόστος αγοράς και τοποθέτησης νέας αντλίας 150.000 δρχ.



Για το αγρόκτημα Κ η σύνδεση συμφέρει να γίνει με μία από τις υπάρχουσες αντλίες ή με μία νέα αντλία που θα αγοραστεί και θα τοποθετηθεί σε νέο σημείο;

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν οι προβολές των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου πάνω στην υποτείνουσα έχουν μήκη 9 και 16, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου καθώς και το μήκος του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Λύση

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{Α} > 90°$, ΒΔ=9 και ΔΓ=16.

Τότε

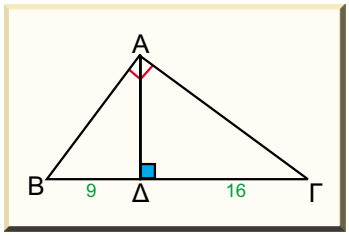
$ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$ ή $ΑΒ^2 = 25 \cdot 9$ ή $ΑΒ^2 = 225$ ή $ΑΒ = 15$

Ομοίως

$ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΔΓ$ ή $ΑΓ^2 = 25 \cdot 16$ ή $ΑΓ^2 = 400$ ή $ΑΓ = 20$

Επίσης

$ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$ ή $ΑΔ^2 = 9 \cdot 16$ ή $ΑΔ^2 = 144$ ή $ΑΔ = 12$

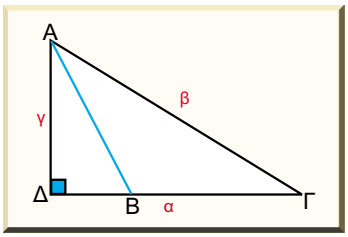


2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\beta^2=\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{B}$.

Λύση

Εφόσον $\beta^2>\alpha^2+\gamma^2$, έχουμε $\widehat{B}>90°$.



Εφαρμόζοντας θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε $\beta^2=\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\cdot B\Delta$ (1)

Επίσης $\beta^2=\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma$ (2)

Λόγω των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $B\Delta=\frac{\gamma}{2}$.

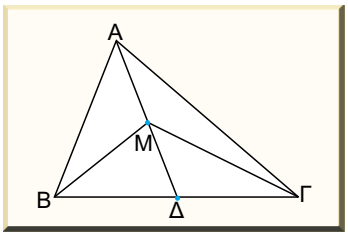
Άρα $\widehat{\Delta AB}=30°$, οπότε $\widehat{AB\Delta}=60°$ και συνεπώς $\widehat{B}=120°$.

3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν Μ το μέσο της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $AB^2+2M\Gamma^2=A\Gamma^2+2MB^2$.

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας το 1ο θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΔ έχουμε



$$A\Gamma^2+\Gamma\Delta^2=2M\Gamma^2+\frac{A\Delta^2}{2} \quad (1)$$

και

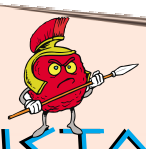
$$AB^2+B\Delta^2=2MB^2+\frac{A\Delta^2}{2} \quad (2)$$

Αφαιρώντας από τη σχέση (1) τη (2) προκύπτει

$$A\Gamma^2+\Gamma\Delta^2-AB^2-B\Delta^2=2M\Gamma^2-2MB^2$$

ή $A\Gamma^2-AB^2=2M\Gamma^2-2MB^2$ (εφόσον $B\Delta=\Gamma\Delta$)

ή $AB^2+2M\Gamma^2=A\Gamma^2+2MB^2$



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Είναι ιστορικά βεβαιωμένο ότι οι Βαβυλώνιοι, οι Ινδοί και οι Κινέζοι γνώριζαν το θεώρημα που αποδίδει τη σχέση της υποτείνουσας με τις δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τρίγωνου. Όμως πουθενά δε βρέθηκε απόδειξή του.

Ο Πυθαγόρας ή κάποιος μαθητής του ήταν ο πρώτος που το απέδειξε, γι' αυτό και ονομάστηκε "Πυθαγόρειο Θεώρημα".

Η σπουδαιότητα του Πυθαγόρειου Θεωρήματος πιστοποιείται από το γεγονός ότι από τον Πυθαγόρα μέχρι σήμερα έχει αποδειχτεί με πάρα πολλούς τρόπους. Η E.S. Loomis στο βιβλίο της "Η πυθαγόρεια πρόταση" που εκδόθηκε το 1940 έχει συγκεντρώσει και ταξινομήσει 370 διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Η απόδειξη που παρουσιάζουμε εμείς στο κεφάλαιο αυτό είναι όμοια με εκείνη που έδωσε ο Ινδός μαθηματικός Bhascara (Μπασκάρα) γύρω στο 1150 μ.Χ.

Στον Πυθαγόρα επίσης αποδίδεται η ανακάλυψη του τύπου που δίνει όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με μήκος πλευρών ακέραιους αριθμούς. Τρεις ακέραιοι αριθμοί, που είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου ονομάζονται Πυθαγόρεια τριάδα. Ο τύπος που δίνει τριάδες πλευρών με μήκη ακέραια είναι: $\left(\alpha, \frac{\alpha^2-1}{2}, \frac{\alpha^2+1}{2}\right)$. Αν όπου α βάλουμε 3 ή 5 παίρνουμε αντίστοιχα τις γνωστές πυθαγόρειες τριάδες, 3,4,5 ή 5,12,13.

Ο Πλάτωνας, μαθητής του Πυθαγόρα, ανακάλυψε έναν άλλο τύπο που δίνει ορθογώνια τρίγωνα με μήκη πλευρών ακέραιους αριθμούς, λαμβάνοντας όμως ως αφετηρία άρτιο αριθμό α. Ο τύπος αυτός είναι:

$$\left(\alpha, \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-1, \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+1\right)$$

Στη συνέχεια ο Διόφαντος, ο γενάρχης της μεγάλης οικογένειας των αλγεβριστών, ανακάλυψε όλους τους τύπους που δίνουν ορθογώνια τρίγωνα με μήκη πλευρών ακέραιους αριθμούς, λύνοντας την εξίσωση $x^2+y^2=\omega^2$ με x, y, ω ακέραιους αριθμούς. Ο μεγάλος Γάλλος μαθηματικός, Φερμά (Pierre de Fermat, 1601-1665), γενικεύοντας την εξίσωση $x^2+y^2=\omega^2$ διατύπωσε την πρόταση: "Η εξίσωση $x^\nu+\psi^\nu=\omega^\nu$, για φυσικό $\nu\geq 3$ δεν έχει λύση στο σύνολο των ακέραιων". Η απόδειξη της πρότασης αυτής γνωστής και ως εικασία του Φερμά, απασχόλησε τους μαθηματικούς για πάνω από 350 χρόνια! Το 1908 αθλοθετήθηκε βραβείο 100.000 μάρκων, για την απόδειξη του θεωρήματος. Τελικά μόλις το καλοκαίρι του 1994, αποδείχτηκε από τον Άγγλο μαθηματικό Andrew Wiles.

Με το Πυθαγόρειο θεώρημα συνδέεται αναπόσπαστα η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών, η οποία οφείλεται επίσης στην Πυθαγόρεια φιλοσοφική σχολή. Η έννοια των ασύμμετρων μεγεθών εμφανίζεται πιο κατανοητά στο κλασικό παράδειγμα της σύγκρισης διαγωνίου και πλευράς ενός τετραγώνου με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος σε ένα από τα δύο ίσα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα στα οποία χωρίζεται το τετράγωνο από τη διαγώνιο.

«Η διαγώνιος του τετραγώνου είναι ασύμ-

μετρη προς την πλευρά του », αναφέρει ο Αριστοτέλης μαζί με την απόδειξη, χωρίς βεβαίως να την έχει επινοήσει ο ίδιος. Σε σύγχρονη γλώσσα η απόδειξη συνοψίζεται ως εξής: η $\sqrt{2}$ δεν είναι αριθμός ακέραιος, αφού μεταξύ 1 και 4 δεν υπάρχει κανένα τέλειο τετράγωνο.

Πρόταση

Ο λόγος της διαγωνίου κάθε τετραγώνου προς την κάθετη πλευρά του δεν είναι ρητός αριθμός.

Απόδειξη

Έστω το τετράγωνο ΑΒΓΔ με ΑΒ=α και διαγώνιο ΒΓ=δ.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει $\delta^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2$ (1)

Αν ο λόγος της διαγωνίου προς την πλευρά τετραγώνου ήταν αριθμός ρητός, θα έπρεπε $\frac{\delta}{\alpha}=\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν οι όροι ενός ανάγωγου (μη απλοποιήσιμου) κλάσματος. Αυτό σημαίνει ότι θα ισχύει και

$$\delta^2 \quad \mu^2$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

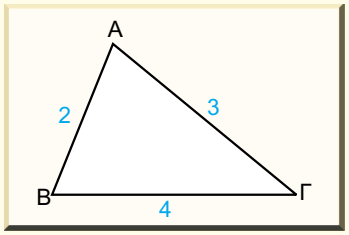
$$2=\frac{\mu^2}{\nu^2} \quad \text{ή} \quad \sqrt{2}=\frac{\mu}{\nu}$$

σχέση η οποία μας οδηγεί σε άτοπο, αφού γνωρίζουμε από την Άλγεβρα ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός. Συνεπώς, ο λόγος της διαγωνίου προς την πλευρά τετραγώνου είναι πάντοτε αριθμός άρρητος.

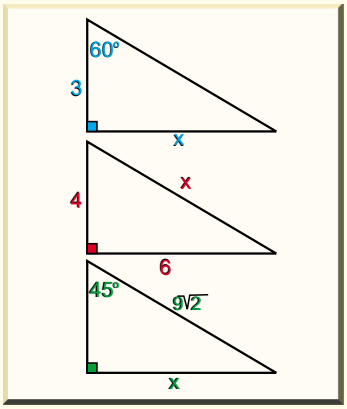
Η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών, χαρακτηριζόμενη εύλογα σαν "ζήτημα πρώτης τάξης στην ιστορία του πνεύματος και της λογικής", συγκλόνισε την Πυθαγόρεια κοινότητα, εξαιτίας του ανατρεπτικού αντίκτυπου που είχε στην αριθμοθεωρία τους. Σύμφωνα με την Πυθαγόρεια φιλοσοφική σχολή, οι σχέσεις των αντικειμένων σ' όλο το Σύμπαν εκφράζονται με ακέραιους και κλασματικούς αριθμούς, κάτι που φυσικά δεν ισχύει, όπως πανηγυρικά οι ίδιοι απέδειξαν.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

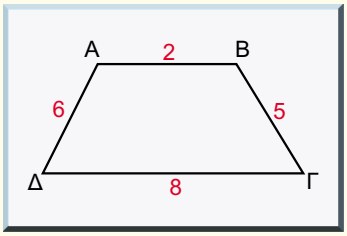
1 Τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΒΓ ως προς τις γωνίες; Αν πρέπει να αυξήσουμε κάθε πλευρά κατά το ίδιο μήκος x ώστε να γίνει ορθογώνιο τρίγωνο, πόσο πρέπει να είναι το x;



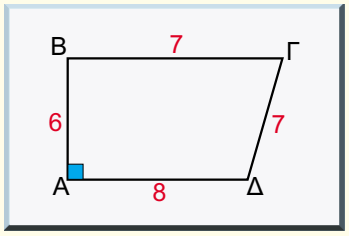
2 Πόσο είναι το μήκος x σε κάθε ένα από τα τρίγωνα;



3 Πόσο είναι το ύψος του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ;



4 Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι ορθή, οξεία ή αμβλεία;

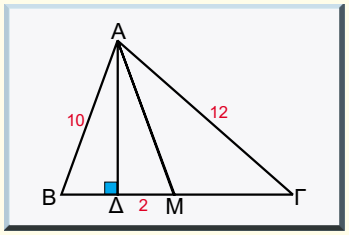


5 Αν α, β, γ τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου με $\hat{A}=90°$, τι είδους ως προς τις γωνίες είναι το τρίγωνο που έχει πλευρές α+2, β+2, γ+2;

6 Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε α=12 και γ=5. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η πλευρά β ώστε η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου να είναι αμβλεία;

7 Σε τρίγωνο ΑΒΓ πώς από τη σχέση $\mu_\alpha=\mu_\beta$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές;

8 Αν η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε το μήκος της ΒΓ και της ΑΜ.



9 Από το 1ο θεώρημα των διαμέσων, ποια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου μπορούμε να αποδείξουμε;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Αν υ το ύψος ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α, να αποδείξετε ότι $\upsilon=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

2 Αν Δ το μέσο της κάθετης πλευράς ΑΒ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) και Κ η προβολή του στη ΒΓ, να αποδείξετε ότι $\text{ΚΓ}^2-\text{ΚΒ}^2=\text{ΑΓ}^2$.

3 Αν οι μη παράλληλες πλευρές τραπεζίου τέμνονται κάθετα, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των βάσεών του.

4 Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ. Φέρουμε τη

διχοτόμο ΟΔ της γωνίας $\widehat{AOB}$ και από τυχαίο σημείο του τόξου $\overset{\frown}{BΔ}$ φέρουμε ΓΕ⊥ΟΑ, που τέμνει την ΟΔ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι $OA^2=ΓE^2+ZE^2$.

5 Να αποδείξετε ότι η κοινή εξωτερική εφαπτομένη δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά είναι μέση ανάλογος των διαμέτρων τους.

6 Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των μη παράλληλων πλευρών του συν το διπλάσιο των βάσεών του.

7 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 1. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ κατά ίσα τμήματα ΒΔ=ΓΕ=ΑΖ=x, έτσι ώστε η πλευρά του σχηματιζόμενου ισόπλευρου τριγώνου ΔΕΖ να έχει μήκος 13. Να υπολογίσετε το x.

8 Να βρείτε το είδος του τριγώνου (ως προς τις γωνίες του) του οποίου οι πλευρές γ, β, α είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 5 και 6 αντίστοιχα. Αν ΑΔ είναι η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, να δείξετε ότι $AΔ=\frac{α+β+γ}{30}$.

9 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με ΑΒ=ΑΓ=11 και ΒΓ=10. Στη βάση ΒΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε να είναι ΒΔ=3. Να υπολογιστεί το ΑΔ.

10 Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του.

11 Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=κ, $AΔ=κ\sqrt{2}$ και $AΓ=κ\sqrt{3}$. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ.

12 Αν Θ το κέντρο βάρους τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι
$ΘA^2+ΘB^2+ΘΓ^2=\frac{1}{3}(α^2+β^2+γ^2)$.

13 Αν οι διάμεσοι $μ_β$ και $μ_γ$ ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι:
α) $μ_β^2+μ_γ^2=μ_α^2$.
β) $β^2+γ^2=5α^2$.

14 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $α^2+β^2+γ^2=8μ_α^2$, να αποδείξετε ότι $\widehat{A}=90°$.

15 Αν Ε τυχαίο σημείο του ύψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $AB^2-AΓ^2=BE^2-EΓ^2$.

16 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β>γ, Κ και Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και Μ το μέσο του ΚΛ. Να αποδείξετε ότι $β^2-γ^2=2MΓ^2-2MB^2$.

17 Να βρεθούν οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ, που έχει διαμέσους με μήκη 3, 4 και 5.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται κύκλος (Ο,R), μια διάμετρος ΑΒ και δύο ακτίνες ΟΓ και ΟΔ κάθετες μεταξύ τους. Αν Ε και Ζ οι προβολές των Γ και Δ αντίστοιχα πάνω στην ΑΒ, να αποδείξετε ότι $OE^2+OZ^2=R^2$.

2 Δίνεται ημικύκλιο (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ. Με διάμετρο ΟΑ γράφουμε κύκλο και σε τυχαίο σημείο Γ της ΟΑ φέρουμε κάθετη στην ΟΑ, που τέμνει το μεγάλο κύκλο στο Ε και τον εσωτερικό στο Δ. Να αποδείξετε ότι $AE=\sqrt{2}\cdot AΔ$.

3 Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ευθεία ε, που δεν τέμνει τον κύκλο. Έστω Α η προβολή του Ο πάνω στην ε και Β σημείο της ΑΟ τέτοιο ώστε

ΑΒ=ΑΔ, όπου ΑΔ η εφαπτομένη του κύκλου. Αν Γ τυχαίο σημείο της ε και ΓΕ εφαπτομένη του κύκλου, να δείξετε ότι ΓΕ=ΓΒ.

4 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=2, ΒΓ $=1+\sqrt{3}$ και ΑΓ$=\sqrt{6}$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{B}=60°$.

5 Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του επιπέδου για τα οποία είναι ΑΒ=6, ΑΓ=8, ΒΓ=10, ΓΔ=7, ΒΔ=17, ΒΕ=4 και ΔΕ=21. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ.

6 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=10, ΒΓ=14 και ΓΑ=12. Να υπολογίσετε την προβολή ΒΕ της διαμέσου ΒΜ πάνω στην πλευρά ΒΓ.

7 Αν ΒΔ και ΓΕ τα ύψη οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $ΒΕ^2+ΓΔ^2<ΒΓ^2$.

8 Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ κέντρου Ο το $\overset{\frown}{AB}$ στο Γ. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου ο οποίος εφάπτεται στο $\overset{\frown}{OΓ}$, στο $\overset{\frown}{AΓ}$ και στην ακτίνα ΟΑ.

9 Αν ΒΔ, ΓΕ τα ύψη οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $α^2=γ\cdot ΒΕ+β\cdot ΓΔ$.

10 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $ΜΒ\cdot β^2+ΜΓ\cdot γ^2=α\cdot ΑΜ^2+α\cdot ΒΜ\cdot ΜΓ$.

11 Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ και Ρ σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $ΡΑ\cdot ΡΓ=ΑΒ^2-ΒΡ^2$.

12 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $α^3=β^3+γ^3$, να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{A}$ είναι οξεία.

13 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{A}=30°$. Να αποδείξετε ότι $α=β\sqrt{2-\sqrt{3}}$ όπου α=ΑΒ και β=ΒΓ.

14 Αν Θ το κέντρο βάρους τριγώνου ΑΒΓ και Κ το μέσο του ΑΘ, να αποδείξετε ότι $ΑΓ^2+ΒΚ^2+ΒΘ^2=ΑΒ^2+ΓΚ^2+ΓΘ^2$.

15 Αν ΑΔ το ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}=90°$), που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, και Ε, Ζ οι προβολές του Δ στην ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\frac{ΒΕ}{ΓΖ}=\frac{ΑΒ^3}{ΑΓ^3}$.

16 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90°$, θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε της ΒΓ τέτοια ώστε ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ^2+ΑΕ^2+ΔΕ^2=\frac{2}{3}α^2$.

17 Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος, που συνδέει τα μέσα των βάσεων τραπεζίου, συναρτήσει των πλευρών του.

18 Δίνονται δύο κύκλοι (ΚR) και (Λ,ρ) με ΚΛ>R+ρ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ ώστε τα εφαπτόμενα στους κύκλους ευθύγραμμα τμήματα ΜΑ και ΜΒ να συνδέονται με τη σχέση $ΜΑ^2-ΜΒ^2=κ^2$, όπου κ δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα.

19 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ=α και ΒΓ=β και ένα ορισμένο τμήμα κ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $ΜΑ^2+ΜΒ^2+ΜΓ^2+ΜΔ^2=κ^2$.

9.2 Μετρικές σχέσεις σε κύκλο

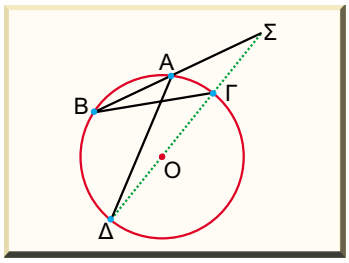
9.2.1 Δύναμη σημείου ως προς κύκλο

Θεώρημα 9.9

Αν από σημείο Σ εξωτερικό ενός κύκλου (Ο,ρ) φέρουμε τυχαία τέμνουσα ΣΑΒ, τότε το γινόμενο ΣΑ·ΣΒ είναι σταθερό, (ανεξάρτητο από την τέμνουσα) και ίσο με $ΣΟ^2-ρ^2$.

Απόδειξη

Φέρουμε τη ΣΟ η οποία τέμνει τον κύκλο στα Γ και Δ. Τα τρίγωνα ΣΑΔ και ΣΓΒ έχουν τη γωνία $\widehat{Σ}$ κοινή και τις γωνίες $\widehat{ΑΒΓ}$ και $\widehat{ΑΔΓ}$ ίσες (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ}$). Άρα τα τρίγωνα ΣΑΔ και ΣΓΒ είναι όμοια και επομένως ισχύει ότι:



$$\frac{ΣΑ}{ΣΓ}=\frac{ΔΣ}{ΣΒ} \quad ή \quad ΣΑ·ΣΒ=ΣΓ·ΣΔ \text{ ή } ΣΑ·ΣΒ=(ΣΟ-ΟΓ)(ΣΟ+ΟΔ)$$

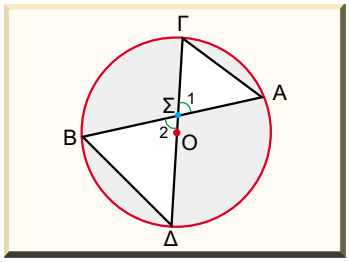
$$ή \quad ΣΑ·ΣΒ=(ΣΟ-ρ)(ΣΟ+ρ) \text{ ή } ΣΑ·ΣΒ=ΣΟ^2-ρ^2$$ ■

Θεώρημα 9.10

Αν από σημείο Σ εσωτερικό ενός κύκλου (Ο,ρ) φέρουμε τυχαία τέμνουσα ΣΑΒ, τότε το γινόμενο ΣΑ·ΣΒ είναι σταθερό (ανεξάρτητο από την τέμνουσα) και ίσο με $ρ^2-ΣΟ^2$.

Απόδειξη

Φέρουμε τη διάμετρο ΓΔ που περνά από το Σ. Τα τρίγωνα ΣΓΑ και ΣΔΒ έχουν τις γωνίες $\widehat{Γ}=\widehat{Β}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΔ}$) και τις γωνίες $\widehat{Σ}_1=\widehat{Σ}_2$ (ως κατακορυφήν). Άρα τα τρίγωνα ΣΓΑ και ΣΔΒ είναι όμοια και ισχύει

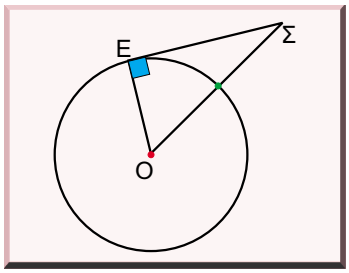


$$\frac{ΣΓ}{ΣΒ}=\frac{ΣΑ}{ΣΔ} \quad ή \quad ΣΑ·ΣΒ=ΣΓ·ΣΔ \text{ ή } ΣΑ·ΣΒ=(ΟΓ-ΣΟ)(ΟΔ+ΣΟ) \text{ ή}$$

$$ΣΑ·ΣΒ=(ρ-ΣΟ)(ρ+ΣΟ) \quad ή \quad ΣΑ·ΣΒ=ρ^2-ΣΟ^2$$ ■

Θεώρημα 9.11

Αν από σημείο Σ εξωτερικό ενός κύκλου (Ο,ρ) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΣΕ, τότε ισχύει $ΣΕ^2=ΣΟ^2-ρ^2$.



Απόδειξη

Φέρουμε την ακτίνα ΟΕ. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΣΕΟ παίρνουμε:

$$ΣΕ^2+ΟΕ^2=ΣΟ^2 \quad ή \quad ΣΕ^2=ΣΟ^2-ρ^2$$ ■

Παρατήρηση

Συνδυάζοντας τις σχέσεις των θεωρημάτων 9.9 και 9.11, προκύπτει η σχέση $ΣΕ^2=ΣΑ\cdot ΣΒ$, όπου ΣΕ το εφαπτόμενο τμήμα και ΣΑΒ μια τέμνουσα του κύκλου. Άρα:

Πόρισμα 9.6

Αν από σημείο Σ εξωτερικό ενός κύκλου (Ο,ρ) φέρουμε το εφαπτόμεντο τμήμα ΣΕ και μια τυχαία τέμνουσα ΣΑΒ, τότε ισχύει $ΣΕ^2=ΣΑ\cdot ΣΒ$.

Αν δοθεί ένα σημείο Σ στο επίπεδο του κύκλου (Ο,ρ), τότε ο σταθερός αριθμός $ΣΟ^2-ρ^2$ ονομάζεται **δύναμη του σημείου** Σ ως προς τον κύκλο (Ο,ρ) και συμβολικά γράφουμε $Δ^{Σ}_{(Ο,ρ)}=ΣΟ^2-ρ^2$.

Τα προηγούμενα θεωρήματα 9.9, 9.10 και 9.11 σχετίζονται με την έννοια της δύναμης σημείου και μας δίνουν τη δυνατότητα να βγάλουμε συμπεράσματα για τη θέση του σημείου.

Το πρόσημο του αριθμού $ΣΟ^2-ρ^2$ καθορίζει τη θέση του σημείου Σ ως προς τον κύκλο. Έτσι

- αν $ΣΟ^2-ρ^2>0$, τότε το Σ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου,
- αν $ΣΟ^2-ρ^2=0$, τότε το Σ είναι σημείο του κύκλου,
- αν $ΣΟ^2-ρ^2<0$, τότε το Σ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

9.2.2 Γεωμετρική κατασκευή των θετικών ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Ορισμένοι τύποι εξισώσεων δευτέρου βαθμού επιδέχονται και γεωμετρική λύση, αν δεχτούμε ότι οι συντελεστές και η άγνωστη μεταβλητή παριστάνουν μήκη ευθυγράμμων τμημάτων.

Κατασκευάζουμε, λοιπόν, γεωμετρικά τις θετικές ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, δηλαδή κατασκευάζουμε ευθύγραμμα τμήματα με μήκη ίσα προς τις θετικές ρίζες της εξίσωσης.

Αναφέρουμε στην παράγραφο αυτή τη γεωμετρική λύση τριών τύπων εξισώσεων δευτέρου βαθμού και μια κατασκευή γνωστή από την αρχαιότητα ως πρόβλημα της χρυσής τομής.

Πρόβλημα 9.7

Αν α, β γνωστά ευθύγραμμα τμήματα, να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα x τέτοιο, ώστε $x^2+2αx-β^2=0$.

Ανάλυση

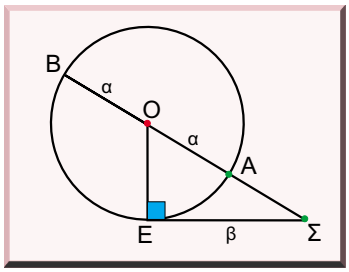
Η εξίσωση $x^2+2\alpha x-\beta^2=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x(x+2\alpha)=\beta^2 \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) μας οδηγεί στη σχέση του πορίσματος 9.6, δηλαδή, στη σχέση $\Sigma A\cdot\Sigma B=\Sigma E^2$, όπου Σ σημείο εξωτερικό ενός κύκλου, ΣΕ το εφαπτόμενο τμήμα και ΣΑΒ τέμνουσα.

Σύνθεση

Γράφουμε κύκλο (Ο,α) και σε σημείο Ε αυτού φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα ΕΣ=β. Η ευθεία ΣΟ τέμνει τον κύκλο (Ο,ρ) στα σημεία Α και Β. Το ευθύγραμμο τμήμα ΣΑ είναι το ζητούμενο, δηλαδή η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2+2\alpha x-\beta^2=0$.



Απόδειξη

Η δύναμη του Σ ως προς τον κύκλο (Ο,ρ) ισούται με $\Sigma E^2=\Sigma A\cdot\Sigma B$ ή $\beta^2=\Sigma A(\Sigma A+2\alpha)$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $x=\Sigma A$, άρα πράγματι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΣΑ είναι ρίζα της εξίσωσης $x(x+2\alpha)=\beta^2$.

Διερεύνηση

Όλα τα βήματα της κατασκευής είναι εφικτά και μας οδηγούν σε μοναδικό ευθύγραμμο τμήμα. Η γεωμετρική αυτή κατασκευή επιβεβαιώνει το γεγονός που μας είναι γνωστό από την Άλγεβρα, ότι η εξίσωση $x^2+2\alpha x-\beta^2=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, από τις οποίες μόνο η μία είναι θετική και μάλιστα αυτή που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.

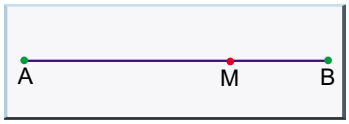
Μια ειδική περίπτωση του προηγούμενου προβλήματος 9.7 είναι το ιστορικό πρόβλημα της χρυσής τομής.

Πρόβλημα 9.8 (πρόβλημα χρυσής τομής)

Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α σε δύο άνισα τμήματα έτσι, ώστε το μεγαλύτερο να είναι η μέση ανάλογος του μικρότερου και ολόκληρου του τμήματος ΑΒ.

Ανάλυση

Αν ΑΒ=α το γνωστό τμήμα και Μ το ζητούμενο σημείο με ΜΑ>ΜΒ, τότε



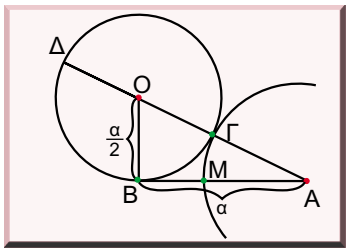
$$\frac{AB}{MA}=\frac{MA}{MB} \quad \text{ή} \quad MA^2=MB\cdot AB \quad \text{ή} \quad MA^2=(AB-MA)AB \qquad (1)$$

και αν θέσουμε ΜΑ=x, η σχέση (1) γίνεται

$$x^2=(\alpha-x)\alpha \quad \text{ή} \quad x^2+\alpha x-\alpha^2=0$$

Αναγόμαστε, λοιπόν, στο πρόβλημα 9.7.

Σύνθεση



Κατασκευάζουμε, λοιπόν, κύκλο $(O,\frac{\alpha}{2})$ και σε σημείο Β αυτού φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ=α. Η ευθεία ΑΟ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ και το τμήμα ΑΓ είναι το ζητούμενο.

Άρα με κέντρο Α και ακτίνα ΑΓ γράφουμε κύκλο (Α,ΑΓ), που τέμνει το τμήμα ΒΑ στο σημείο Μ.

Πρόβλημα 9.9

Αν α, β γνωστά ευθύγραμμα τμήματα, να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα x τέτοιο, ώστε $x^2-2\alpha x-\beta^2=0$.

Ανάλυση

Η εξίσωση $x^2-2\alpha x-\beta^2=0$ είναι ισοδύναμη με τη $x(x-2\alpha)=\beta^2$.

Σύνθεση

Η κατασκευή είναι ίδια με την κατασκευή του προβλήματος 9.7, αλλά εδώ το τμήμα x είναι το ΣΒ.

Απόδειξη

Πράγματι είναι $\Sigma A\cdot\Sigma B=\Sigma E^2$ ή $(x-2\alpha)x=\beta^2$.

Διερεύνηση

Υπάρχει πάντα λύση και επιβεβαιώνεται αυτό που μας είναι γνωστό από την Άλγεβρα ότι η εξίσωση $x^2-2\alpha x-\beta^2=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές, από τις οποίες μια είναι θετική και μάλιστα αυτή που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Πρόβλημα 9.10

Αν α, β γνωστά ευθύγραμμα τμήματα, να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα x τέτοιο, ώστε $x^2-2\alpha x+\beta^2=0$.

Ανάλυση

Αν x_1, x_2 οι ρίζες της $x^2-2\alpha x+\beta^2=0$, τότε

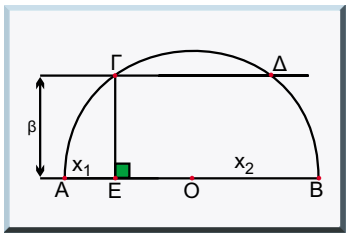
$$x_1+x_2=2\alpha \quad \text{και} \quad x_1x_2=\beta^2 \qquad (1)$$

Η σχέση (1) μας θυμίζει το θεώρημα που ισχύει στο ορθογώνιο τρίγωνο: το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα

ισούται με το γινόμενο των προβολών των δύο καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα.

Σύνθεση

Κατασκευάζουμε ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ=2α και φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάμετρο σε απόσταση β, η οποία τέμνει το ημικύκλιο στα Γ και Δ. Από το Γ φέρουμε την ΓΕ⊥ΑΒ και τότε πάνω στην ΑΒ ορίζονται δύο τμήματα ΑΕ=x_1 και ΕΒ=x_2, τα οποία είναι οι ρίζες της $x^2-2\alpha x+\beta^2=0$.



Απόδειξη

Πράγματι $x_1+x_2=$ΑΕ+ΕΒ ή $x_1+x_2=$ΑΒ ή $x_1+x_2=2\alpha$

και $x_1x_2=$ΑΕ·ΕΒ ή $x_1x_2=$ΓΕ^2 ή $x_1x_2=\beta^2$.

Διερεύνηση

Για να υπάρχει λύση, πρέπει προφανώς να είναι $\beta\leq\alpha$.

Παρατήρηση

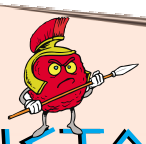
Λύνοντας την εξίσωση $x^2-\alpha x-\alpha^2=0$ του προβλήματος της χρυσής τομής βρίσκουμε θετική ρίζα την

$$x=\frac{\alpha(\sqrt{5}+1)}{2} \text{ οπότε } \frac{MA}{MB}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1{,}618 \text{ ή } \frac{MB}{MA}\approx 0{,}618$$

Ο λόγος $\frac{MB}{MA}\approx 0{,}618$ ονομάζεται χρυσός λόγος.

9.6 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ο κάθε μαθητής να σχεδιάσει στο πρόχειρό του ένα ορθογώνιο, να μετρήσει τις διαστάσεις του και να βρει το λόγο τους. Να μελετηθεί στατιστικά πόσοι μαθητές πλησίασαν το λόγο της χρυσής τομής.



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το πρόβλημα της χρυσής τομής ενός ευθύγραμμου τμήματος, όρος που αποδόθηκε κατά τον 19ο αιώνα, είναι η πρόταση 11 του 2ου βιβλίου των "Στοιχείων" του Ευκλείδη. Το πρόβλημα όμως αυτό ήταν γνωστό πολύ πριν τον Ευκλείδη στους Πυθυγόρειους οι οποίοι το διατύπωσαν ως εξής:

Να κατασκευαστεί ορθογώνιο ισοδύναμο με τετράγωνο πλευρά α, που να έχει για βάση την πλευρά α κατάλληλα προεκτεινόμενη και ύψος ίσο με την προέκταση αυτή. [Με σύγχρονο συμβολισμό $x(x+a)=a^2$.]

Στις αρχές του αιώνα μας υιοθετείται για το συμβολισμό του χρυσού λόγου το ελληνικό γράμμα φ προς τιμή του γλύπτη Φειδία. Ο κορυφαίος αυτός εκπρόσωπος της αρμονίας της τέχνης καλλιτέχνησε τον Παρθενώνα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της χρυσής τομής. Ακόμη και η κατασκευή του θεάτρου της Επιδαύρου (4ος π.Χ. αιώνας) έχει γίνει σύμφωνα με το λόγο φ.

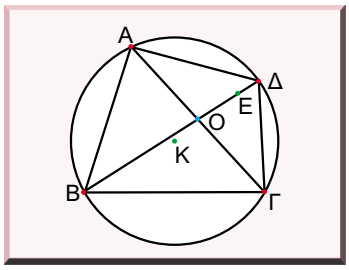
Ο μοναχός Luca Paccioli δημοσιεύει το 1509 το βιβλίο "η θεϊκή αναλογία" με όλες τις γεωμετρικές και αριθμητικές ιδιότητες του λόγου φ, το οποίο εικονογράφησε ο Leonardo da Vinci.

Είναι αλήθεια ότι ο λόγος φ εμφανίζεται σε πολλούς και απρόσμενους χώρους π.χ. στο ανθρώπινο σώμα. Κατά την άποψη του Th. Cook η μέση (ομφαλός) ενός σώματος αρμονικού, διαιρεί το σώμα αυτό σε μέσο και άκρο λόγο. Το θέατρο της Επιδαύρου αποτελείται από δύο διαζώματα. Το πρώτο έχει 34 κερκίδες και το δεύτερο 21. Ο λόγος των κερκίδων είναι: $\frac{34}{21} \approx 1{,}618 = \varphi$

Αντιλαμβανόμαστε, λοιπόν, την αισθητική αξία των μαθηματικών και κατανοούμε ότι το καλύτερο και διαχρονικότερο μέσο για τη διδασκαλία τους είναι το αισθητικό στοιχείο.

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τότε το τετράπλευρο αυτό είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν και μόνο αν ισχύει ΟΑ·ΟΓ=ΟΒ·ΟΔ.



Απόδειξη

Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ,R), τότε $ΟΑ·ΟΓ=ρ^2-ΟΚ^2$ (1) σύμφωνα με το θεώρημα 9.10.

Ομοίως $ΟΒ·ΟΔ=ρ^2-ΟΚ^2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΟΑ·ΟΓ=ΟΒ·ΟΔ.

Αντιστρόφως

Έστω ότι ισχύει ΟΑ·ΟΓ=ΟΒ·ΟΔ (1)

Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο (Κ,R) του τριγώνου ΑΒΓ και έστω ότι τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ε. Έτσι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ,R), οπότε ΟΑ·ΟΓ=ΟΒ·ΟΕ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΟΔ=ΟΕ, άρα Δ≡Ε και επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ,R).

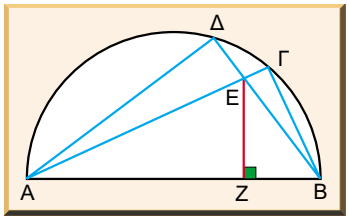
9.7 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν Ο το σημείο τομής των προεκτάσεων των απέναντι πλευρών ΑΒ και ΓΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τότε το τετράπλευρο αυτό είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν και μόνο αν ισχύει ΟΑ·ΟΒ=ΟΓ·ΟΔ.

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ θεωρούμε δύο χορδές ΑΓ και ΒΔ, που τέμνονται σε εσωτερικό σημείο Ε του ημικυκλίου. Να αποδείξετε ότι ΑΓ·ΑΕ+ΒΔ·ΒΕ=ΑΒ^2.

Απόδειξη



Έστω Ζ η προβολή του Ε στη διάμετρο ΑΒ. Το τετράπλευρο ΑΔΕΖ έχει $A\hat{\Delta}E = 90°$ (εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο) και $A\hat{Z}E = 90°$. Άρα το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι εγγράψιμο και επομένως ΒΔ·ΒΕ=ΒΑ·ΒΖ (1)

Ομοίως το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι εγγράψιμο, οπότε

ΑΓ·ΑΕ=ΑΒ·ΑΖ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

ΑΓ·ΑΕ+ΒΔ·ΒΕ=ΑΒ·ΑΖ+ΑΒ·ΒΖ

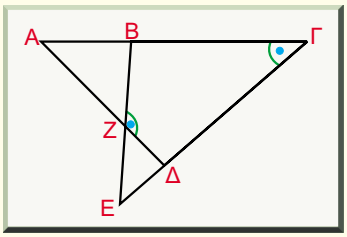
ή ΑΓ·ΑΕ+ΒΔ·ΒΕ=ΑΒ(ΑΖ+ΒΖ) ή ΑΓ·ΑΕ+ΒΔ·ΒΕ=ΑΒ^2

9.8 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

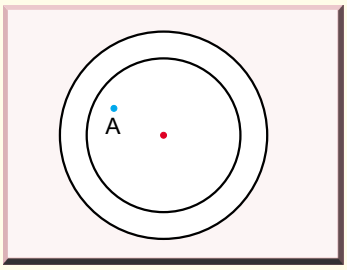
Να βρείτε έναν νέο τρόπο κατασκευής της τέταρτης αναλόγου τριών τμημάτων, που να στηρίζεται στο θεώρημα 9.9 ή στην εφαρμογή 1.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

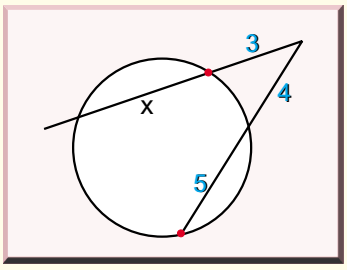
1 Αν από τα σημεία Α, Β, Δ και Ε περνά ένας κύκλος και οι γωνίες $\widehat{Z}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές, ποιες σχέσεις μπορούμε να πάρουμε από το σχήμα;



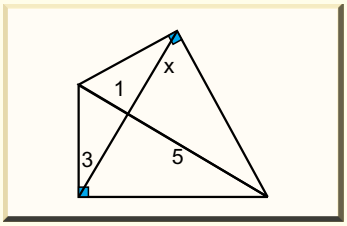
2 Οι δύο κύκλοι είναι ομόκεντροι. Ως προς ποιον κύκλο το Α έχει μεγαλύτερη δύναμη;

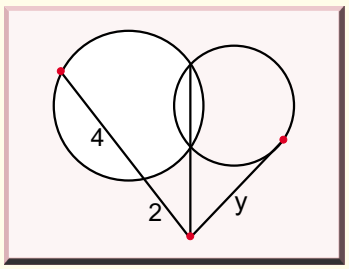


3 Πόσο είναι το μήκος x;



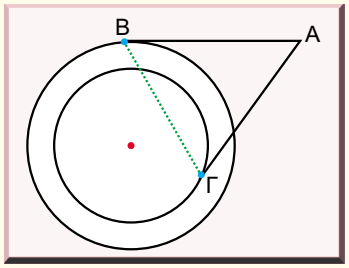
4 Ποιες είναι οι τιμές των x και y στα σχήματα;





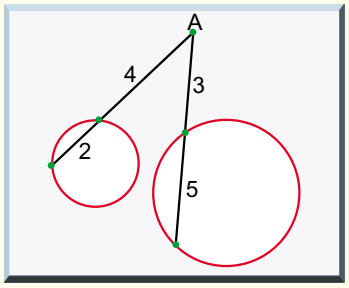
5 Μια χορδή κύκλου έχει μήκος 5. Κατά πόσο πρέπει να την προεκτείνουμε ώστε από το άκρο της προέκτασης να άγεται εφαπτόμενο τμήμα μήκους 6;

6 Στο σχήμα οι κύκλοι είναι ομόκεντροι και τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ εφαπτόμενα. Το τρίγωνο ΑΒΓ μπορεί να είναι ισόπλευρο;

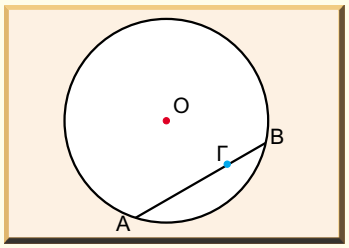


7 Στο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α, να αποδείξετε ότι το κέντρο βάρους του έχει δύναμη ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο ίση με $-\frac{1}{3}\alpha^2$.

8 Να εξηγήσετε το λόγο για τον οποίο οι εφαπτομένες που θα φέρουμε από το Α προς τους δύο κύκλους, θα έχουν ίσα μήκη.



9 Στον κύκλο η ακτίνα έχει μήκος 5 cm και η χορδή ΑΒ 6 cm. Ποια θέση πάνω στη χορδή ΑΒ πρέπει να πάρει το σημείο Γ ώστε η δύναμή του ως προς τον κύκλο να πάρει τη μικρότερη δυνατή τιμή; Πόση είναι στην περίπτωση αυτή η δύναμη;



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν οι ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ρ και ΡΑ=9, ΡΒ=10, ΡΓ=15, να υπολογίσετε την πλευρά ΓΔ και την εφαπτομένη ΡΣ του κύκλου.

2 Σε κύκλο ακτίνας R=15 παίρνουμε σημείο Γ, που απέχει από το κέντρο απόσταση ΟΓ=10. Μια χορδή ΑΒ διέρχεται από το Γ και ισχύει ΑΓ=3ΓΒ. Να βρεθεί το μήκος της χορδής ΑΒ.

3 Με πλευρά τη χορδή ΑΒ=α κύκλου (Ο,R) κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ, που η πλευρά του δεν έχει εσωτερικό σημείο στον κύκλο. Αν το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ του κύκλου είναι ΓΕ=2α, να βρείτε την ακτίνα R.

4 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α=4 εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και το μέσο Ε της ΒΓ. Αν η ΑΕ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ, να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΕΜ και να αποδείξετε ότι ΑΕ=3ΕΜ.

5 Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε μια χορδή ΑΒ=10. Ένα σημείο Γ κινείται πάνω σ' αυτή τη χορδή. Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η δύναμη του σημείο Γ ως προς τον κύκλο.

6 Να λυθούν γεωμετρικά οι εξισώσεις και το σύστημα που ακολουθούν.

α) $x^2-3x+2=0$

β) $x^2+2x-9=0$

γ) $x+y=10,\ \ x\cdot y=16$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑ

1 Σε κύκλο θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και στην προέκταση αυτής προς το Β σημείο Γ. Φέρουμε ακόμη ευθεία Γx⊥ΑΓ και το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ. Αν η ΑΔ τέμνει τη Γx στο σημείο Ε, να αποδειχτεί ότι ισχύει $ΓΔ^2=ΓΑ^2-ΑΔ\cdot ΑΕ$.

2 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ. Αν αυτοί τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΓΖ.

3 Σε σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΔΜ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, τότε ισχύει ΒΕ=ΓΖ.

4 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α=4, β=8 και γ=6. Θεωρούμε σημείο Δ της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε ΓΔ=5 και τον κύκλο που περνά από τα

σημεία Β, Γ και Δ. Αν ο κύκλος αυτός τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε, τότε η ΓΕ θα είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma}$.

5 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να κατασκευαστεί κύκλος που να εφάπτεται σε μια πλευρά του τριγώνου και οι κορυφές του ΑΒΓ να έχουν ίσες δυνάμεις ως προς αυτόν.

6 Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα των δυνάμεων των κορυφών Α, Β και Γ ως προς τον εγγεγραμμένο κύκλο (Ι,ρ) είναι ίσο με $α^2+β^2+γ^2-τ^2$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Θεωρούμε χορδή ΒΓ ενός κύκλου και το μέσον Α του τόξου αυτής. Δύο άλλες χορδές ΑΔ και ΑΕ τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Αν η ΔΕ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Θ, να αποδείξετε ότι ΘΒ·ΘΓ=ΘΖ·ΘΗ.

2 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Κ. Αν οι γωνίες $\widehat{Α}$ και $\widehat{ΒΚΓ}$ είναι παραπληρωματικές, τότε θα ισχύει $β^2+γ^2=2α^2$.

3 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η εσωτερική του διχοτόμος. Να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση $ΑΒ·ΑΓ=ΔΒ·ΔΓ+ΑΔ^2$.

4 Αν η ευθεία της διαμέσου ΑΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Δ, τότε ισχύει $ΑΒ^2+ΑΓ^2=2·ΑΔ·ΑΜ$.

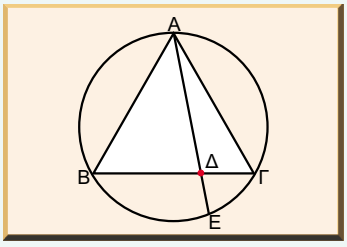
5 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν άθροισμα δυνάμεων ως προς δύο κύκλους (Κ,R) και (Λ,ρ) ίσο με c^2, όπου c δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα.

6 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, που έχουν ίσες δυνάμεις ως προς δύο κύκλους.

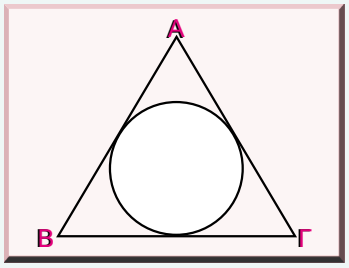
7 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ, που έχουν μηδενικό άθροισμα δυνάμεων ως προς δύο ομόκεντρους κύκλους (Ο,R) και (Ο,ρ).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 9ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α=8 cm. Αν ΓΔ=2 cm, ποια είναι τα μήκη των ΑΔ και ΔΕ;

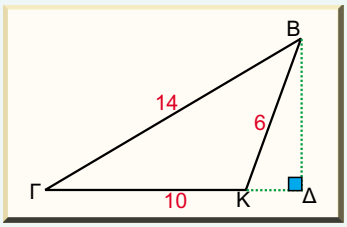


2 Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 2α. Πόση είναι η δύναμη του Α ως προς τον εγγεγραμμένο κύκλο;



3 Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε α=14, β=10, γ=6. Να εξετάσετε το είδος της γωνίας $\widehat{Α}$. Αφού διαπιστώσετε ότι είναι αμβλεία, να υπολογίσετε το μέτρο της. Πόσο

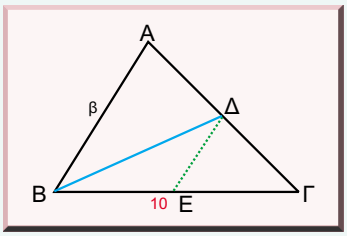
μήκος πρέπει να έχει η προέκταση ΚΔ ώστε το τρίγωνο ΒΓΔ να είναι ορθογώνιο στο Δ;



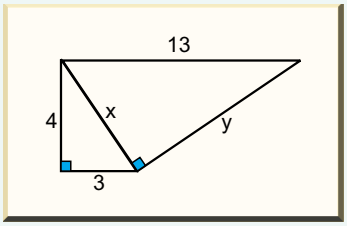
4 Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΑΒ=6, ΑΓ=8 και ΒΓ=10. Με τη βοήθεια του 1ου θεωρήματος των διαμέσων:

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΒΔ.

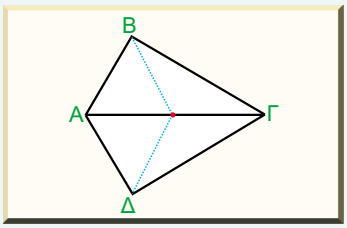
β) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΔΕ που ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ έχει μήκος το μισό της ΑΒ.



5 Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y στο παρακάτω σχήμα.



6 Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ το μέσο Μ της διαγωνίου ΑΓ ισαπέχει από τις κορυφές Β και Δ. Να εξηγήσετε γιατί οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}$ θα είναι και οι δύο οξείες ή ορθές ή αμβλείες.



7 Σε τρίγωνο ΑΒΓ αν ισχύει $α^2-β^2>γ^2$, τότε θα είναι:

α) ❑ Η γωνία $\widehat{A}$ οξεία.

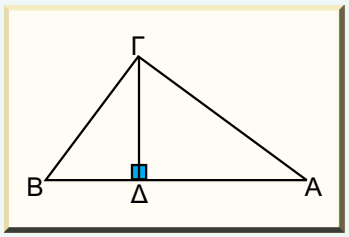
β) ❑ Η γωνία $\widehat{B}$ αμβλεία.

γ) ❑ Η γωνία $\widehat{B}$ ορθή.

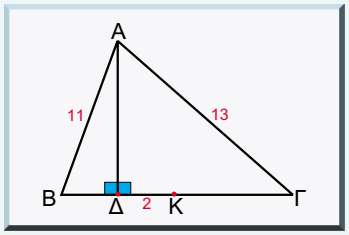
δ) ❑ Η γωνία $\widehat{Γ}$ οξεία.

ε) ❑ Η γωνία $\widehat{Γ}$ ορθή.

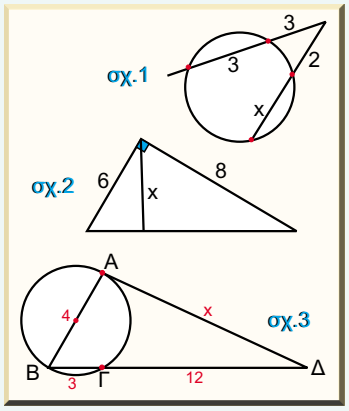
8 Στο τρίγωνο ΑΒΓ αν υ=12, α=13 και γ=14, θα είναι και β=15.



9 Στο τρίγωνο ΑΒΓ η απόσταση του μέσου Κ της πλευράς ΒΓ από το ίχνος Δ του ύψους ΑΔ, είναι ίση με 2, ΑΒ=11 και ΑΓ=13. Να υπολογίσετε το μήκος της ΒΓ.



10 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις που ακολουθούν.

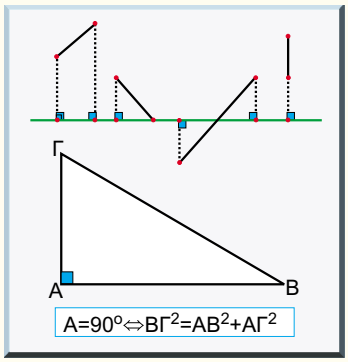


ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

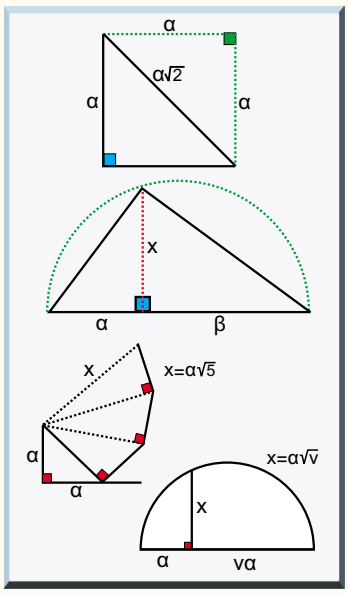
Στο 9ο κεφάλαιο, μελετήσαμε τις μετρικές σχέσεις αρχικά στα τρίγωνα και στη συνέχεια στον κύκλο.

Στην αρχή επεκτείναμε την έννοια της προβολής τμήματος σε ευθεία, και στη συνέχεια αποδείξαμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του.

Ταυτόχρονα είδαμε και τις άλλες σχέσεις που συνδέουν τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με άλλα στοιχεία του (ύψος, προβολές κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα).

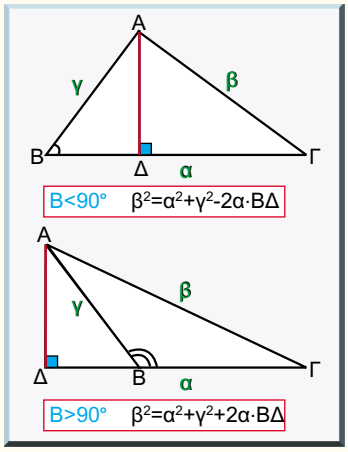


Όλα αυτά μας έδωσαν τη δυνατότητα να αποδείξουμε ότι υπάρχουν τμήματα με λόγο $\sqrt{2}$, άρα άρρητα και να κατασκευάσουμε τη μέση ανάλογο x δύο τμημάτων α και β όπως επίσης και την κατασκευή τμήματος με μήκος $\sqrt{\nu}$ α.



Στη συνέχεια επεκτείναμε το Πυθαγόρειο θεώρημα για πλευρά τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από οξεία ή αμβλεία γωνία, διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας ανάλογες προτάσεις. Άμεση εφαρμογή των προτάσεων αυτών ήταν η δυνατότητα προσδιορισμού του είδους μιας γωνίας ενός τριγώνου συγκρίνοντας τα τετράγωνα των πλευρών τους.

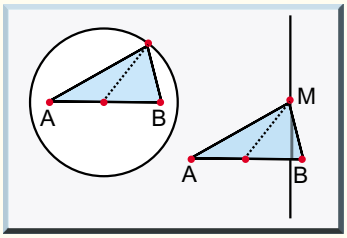
Με τη βοήθεια των ίδιων προτάσεων υπολογίσαμε τα ύψη ενός τριγώνου από τις πλευρές του.



Μελετήσαμε επίσης τα δύο θεωρήματα των διαμέσων στα τρίγωνα, τους τύπους των διαμέσων που προέκυψαν από το πρώτο θεώρημα των διαμέσων και εντοπίσαμε δύο γεωμετρικούς τόπους:

α) Των σημείων Μ που έχουν την ιδιότητα $MA^2+MB^2=\kappa^2$ όπου Α, Β σταθερά σημεία και κ σταθερό τμήμα.

β) Των σημείων Μ που έχουν την ιδιότητα $MA^2-MB^2=\kappa^2$ όπου Α, Β σταθερά σημεία και κ σταθερό τμήμα.



Επιπλέον ασχοληθήκαμε με τις μετρικές σχέσεις στον κύκλο. Διατυπώσαμε και αποδείξαμε τα θεωρήματα τα σχετικά με τα τμήματα μιας τέμνουσας κύκλου (έχουν σταθερό γινόμενο), τη σχέση του γινομένου αυτού με το τετράγωνο του εφαπτόμενου τμήματος (για εξωτερικό σημείο είναι ίσα) και δώσαμε τον ορισμό της δύναμης σημείου ως προς κύκλο, κάνοντας και τις απαραίτητες παρατηρήσεις σχετικά με το πρόσημο.

Τα θεωρήματα αυτά τα χρησιμοποιήσαμε για να πετύχουμε γεωμετρική λύση δευτεροβάθμιας εξίσωσης όπως επίσης και για να διαιρέσουμε ευθύγραμμο τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο (Χρυσή τομή).