Κεφάλαιο 7

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

7.1 Η έννοια του λόγου

7.1.1 Γινόμενο αριθμού με ευθύγραμμο τμήμα

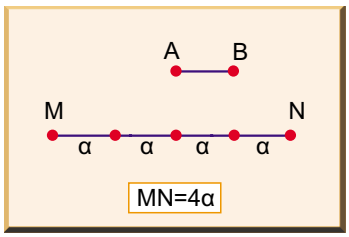
Στην παράγραφο 2.2 μελετήσαμε τις πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων. Ορίσαμε το άθροισμα και τη διαφορά δύο ευθύγραμμων τμημάτων καθώς και το γινομένο θετικού ρητού αριθμού με ευθύγραμμο τμήμα. Συγκεκριμένα ως γινόμενο του φυσικού αριθμού ν με ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, ορίσαμε το άθροισμα ΑΒ+ΑΒ+...+ΑΒ, που αποτελείται από ν όρους. Ως γινόμενο του $\frac{1}{\nu}$ με το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα ορίσαμε το ένα από τα ν ίσα τμήματα στα οποία χωρίζεται το ΑΒ.

Αν μ ένας ακόμη φυσικός αριθμός, ως γινόμενο του ρητού αριθμού $\frac{\mu}{\nu}$ με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ορίσαμε το άθροισμα μ τμημάτων το καθένα ίσο με $\frac{1}{\nu}\cdot$ΑΒ. Επίσης ορίσαμε ως γινόμενο του αριθμού 0 με ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ το μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα.

Πρόβλημα 7.1

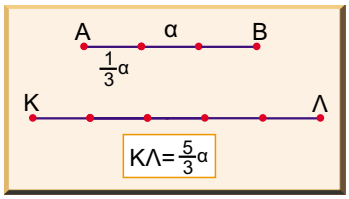
Αν α το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, να κατασκευαστούν ευθύγραμμα τμήματα μήκους 4α και $\frac{5}{3}$α.

- Πάνω σε μία ευθεία τοποθετούμε 4 διαδοχικά τμήματα από τα οποία το καθένα έχει μήκος ίσο με α. Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι το ζητούμενο.



- Χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα από τα οποία το καθένα έχει μήκος ίσο με $\frac{1}{3}$α. Πάνω σε μία ευθεία τοποθετούμε πέντε διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα που το καθένα έχει μήκος ίσο με $\frac{1}{3}$ α. Έχουμε επομένως:

$$ΚΛ = \frac{5}{3}α$$



Αναφέραμε στην παράγραφο 2.2 ότι το γινόμενο ενός θετικού αριθμού με ένα ευθύγραμμο τμήμα ορίζεται ακόμα και στην περίπτωση που ο αριθμός ν είναι άρρητος. Αποδεικνύεται ότι για κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και για κάθε θετικό άρρητο αριθμό λ, υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ τέτοιο, ώστε ΓΔ=λ·ΑΒ. Το ότι υπάρχει το τμήμα ΓΔ δε σημαίνει ότι πάντα κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη. Σε μερικές περιπτώσεις κατασκευάζεται (π.χ. αν λ=$\sqrt{2}$ κεφ. 9), και σε άλλες όχι (π.χ. αν λ=$\sqrt[3]{2}$). Οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{μ}{ν}$ με μ∈Ν και ν∈Ν*, άρα η προηγούμενη διαδικασία (πρόβλημα 7.1) δεν μπορεί να δώσει το γινόμενο τέτοιου αριθμού με ευθύγραμμο τμήμα.

7.1.2 Λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων

Για δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ, όπου το ΓΔ δεν είναι μηδενικό, έχουμε δει πως υπάρχει ένας αριθμός κ, τέτοιος, ώστε ΑΒ=κ·ΓΔ. Τον αριθμό αυτό κ το συμβολίζουμε με $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}$ και τον καλούμε **λόγο** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ.

Το σύμβολο $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}$ δεν παριστάνει το πηλίκο κάποιας διαίρεσης αλλά χρησιμοποιείται δανεισμένο από τους συμβολισμούς των αριθμών, για ομοιομορφία.

Στο κεφάλαιο 2 ορίσαμε το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος. Υπενθυμίζουμε ότι επιλέγουμε ως μονάδα μέτρησης ένα ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ διάφορο του μηδενικού και μ' αυτό συγκρίνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα. Δηλαδή, για κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ο λόγος $\frac{ΑΒ}{ΜΝ}$ = κ καλείται μήκος του ΑΒ και μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Η προηγούμενη σχέση γράφεται ΑΒ=κ·ΜΝ.

Θεώρημα 7.1

Ο λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων ισούται με το λόγο των μηκών τους, όταν η μέτρησή τους γίνεται με την ίδια μονάδα μέτρησης και είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της μονάδας αυτής.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ και ΓΔ δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη κ και λ αντίστοιχα ως προς τη μονάδα μέτρησης ΜΝ. Θα ισχύει ΑΒ=κ·ΜΝ και ΓΔ=λ·ΜΝ. Η σχέση ΑΒ=κ·ΜΝ γράφεται: $AB=\frac{\kappa}{\lambda}(\lambda\cdot MN)$ ή $AB=\frac{\kappa}{\lambda}\Gamma\Delta$ ή $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{\kappa}{\lambda}$. Δηλαδή, ο λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων ισούται με το λόγο των μηκών τους.

Αν ΚΛ μια άλλη μονάδα μέτρησης, τότε θα ισχύει ΜΝ=ν·ΚΛ. Η σχέση ΑΒ=κ·ΜΝ γράφεται ΑΒ=κ(ν·ΚΛ)=(κ·ν)ΚΛ, δηλαδή, ο αριθμός κ·ν είναι το μήκος του ΑΒ ως προς τη μονάδα μέτρησης ΚΛ. Ομοίως ΓΔ=(λν)·ΚΛ. Οπότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{\kappa\cdot\nu}{\lambda\cdot\nu}=\frac{\kappa}{\lambda}$. Δηλαδή, και με αλλαγή της μονάδας μέτρησης, ο λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων παραμένει ο ίδιος. ■

Πόρισμα 7.1

Δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ίσα μήκη και αντιστρόφως.

Όταν ο λόγος δύο τμημάτων είναι ρητός αριθμός, τα ευθύγραμμα τμήματα ονομάζονται σύμμετρα, ενώ αν είναι άρρητος **ασύμμετρα**.

Ένα χαρακτηριστικό των σύμμετρων τμημάτων είναι ότι υπάρχει μονάδα μέτρησης ως προς την οποία τα μέτρα τους είναι φυσικοί αριθμοί (κοινή μονάδα μέτρησης), ενώ για τα ασύμμετρα αυτό είναι αδύνατο.

Αν και οι έννοιες ευθύγραμμο τμήμα και το μήκος του είναι διαφορετικές, το μήκος του τμήματος θα συμβολίζεται όπως και το ευθύγραμμο τμήμα. Όπου όμως, δημιουργείται σύγχυση, θα αναφέρεται ρητά ο όρος "μήκος ευθύγραμμου τμήματος".

Ότι αναφέρθηκε για το λόγο δύο ευθύγραμμων τμημάτων και τα μήκη τους, ισχύει και για άλλα γεωμετρικά μεγέθη και τις μετρήσεις τους, όπως η γωνία, το τόξο, το εμβαδό και ο όγκος.

7.1.3 Αναλογίες και ιδιότητες των αναλογιών

Δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ ονομάζονται **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ και ΗΘ, αν ο λόγος του ΑΒ προς το ΕΖ είναι ίσος με το λόγο του ΓΔ προς το ΗΘ. Δηλαδή όταν ισχύει:

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} \qquad (1)$$

Η ισότητα (1) ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΗΘ ονομάζονται **άκροι όροι** και τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ και ΓΔ **μέσοι όροι**. Όταν η αναλογία είναι της μορφής $\frac{AB}{EZ} = \frac{EZ}{H\Theta}$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ ονομάζεται **μέση ανάλογος** των ΑΒ και ΗΘ. Στην ισότητα (1) το ευθύγραμμο τμήμα ΗΘ ονομάζεται **τέταρτη ανάλογος** των ΑΒ, ΓΔ και ΕΖ.

Εφόσον ο λόγος δύο τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους (που είναι λόγος αριθμών) οι γνωστές ιδιότητες των αναλογιών ισχύουν και στις αναλογίες με ευθύγραμμα τμήματα.

Αν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ έχουν μήκη α, β, γ και δ αντίστοιχα, τότε από τις ισοδυναμίες:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \\ \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\delta}{\beta} \\ \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\beta+\alpha} = \frac{\gamma}{\delta+\gamma} \\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \\ \alpha\cdot\delta = \beta\cdot\gamma \\ \frac{|\alpha-\beta|}{\beta} = \frac{|\gamma-\delta|}{\delta} \\ \frac{\alpha}{|\alpha-\beta|} = \frac{\gamma}{|\gamma-\delta|} \end{cases}$$

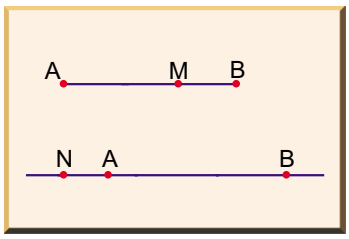
προκύπτουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{EZ}{H\Theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{EZ}=\dfrac{\Gamma\Delta}{H\Theta} \\[2ex] \dfrac{EZ}{AB}=\dfrac{H\Theta}{\Gamma\Delta} \\[2ex] \dfrac{AB+\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}=\dfrac{EZ+H\Theta}{H\Theta} \\[2ex] \dfrac{AB}{\Gamma\Delta+AB}=\dfrac{EZ}{H\Theta+EZ} \\[2ex] \dfrac{AB}{\Gamma\Delta}=\dfrac{EZ}{H\Theta}=\dfrac{AB+EZ}{\Gamma\Delta+H\Theta} \\[2ex] AB\cdot H\Theta=\Gamma\Delta\cdot EZ \\[2ex] \dfrac{|AB-\Gamma\Delta|}{\Gamma\Delta}=\dfrac{|EZ-H\Theta|}{H\Theta} \\[2ex] \dfrac{AB}{|AB-\Gamma\Delta|}=\dfrac{EZ}{|EZ-H\Theta|} \end{cases}$$

Οι τρεις τελευταίες αναλογίες χρησιμοποιούνται καταχρηστικά επειδή δεν ορίστηκαν ο πολλαπλασιασμός ευθύγραμμων τμημάτων και η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο ευθύγραμμων τμημάτων. Στην περίπτωση χρησιμοποίησής τους αναφερόμαστε αποκλειστικά στα μήκη τους.

7.1.4 Διαίρεση τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά ως προς λόγο λ

Έστω Μ ένα σημείο εσωτερικό ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ τέτοιο, ώστε $\frac{MA}{MB}=\lambda$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι "το σημείο Μ χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ εσωτερικά σε λόγο λ".



Αν Ν ένα εξωτερικό σημείο του ΑΒ τέτοιο, ώστε $\frac{NA}{NB}=\lambda$, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι "το σημείο Ν χωρίζει το τμήμα ΑΒ εξωτερικά σε λόγο λ".

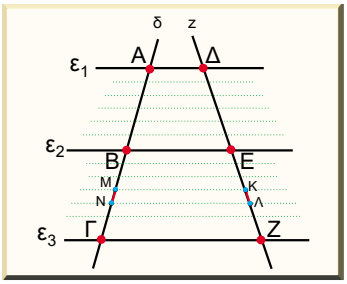
7.2 Θεώρημα του Θαλή

Στο κεφάλαιο 5 αποδείξαμε ότι αν παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία τέμνουσα ίσα τμήματα, τότε θα ορίζουν και σε κάθε άλλη τέμνουσα ίσα τμήματα. Η πρόταση αυτή γενικεύεται με το επόμενο θεώρημα γνωστό ως θεώρημα του Θαλή.

Θεώρημα 7.2

Αν δύο ευθείες δ και z τέμνονται από τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες, τα τμήματα της δ που περιέχονται μεταξύ των παραλλήλων είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα της z που περιέχονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων.

Απόδειξη

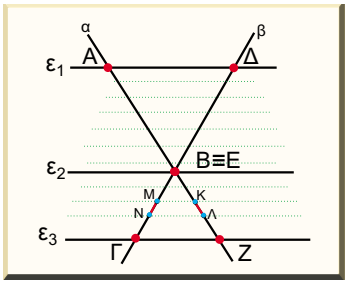


Θα περιοριστούμε στην απόδειξη του θεωρήματος όταν έχουμε τρεις παράλληλες ευθείες. Έστω $\varepsilon_1//\varepsilon_2//\varepsilon_3$, Α, Β, Γ και Δ, Ε, Ζ τα σημεία τομής των τριών παραλλήλων με τις ευθείες δ και z αντίστοιχα. Ζητούμενη αναλογία είναι η

$$\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ}$$

Υποθέτουμε ότι τα ΑΒ και ΒΓ είναι σύμμετρα, οπότε υπάρχει τμήμα ΜΝ τέτοιο, ώστε ΑΒ=κ·ΜΝ και ΒΓ=λ·ΜΝ, όπου κ και λ φυσικοί αριθμοί. Δηλαδή, μπορούμε να χωρίσουμε το ΑΒ σε κ τμήματα και το ΒΓ σε λ τμήματα, το καθένα ίσο με ΜΝ.

Από τα άκρα αυτών των (κ+λ) τμημάτων φέρουμε παράλληλες προς τις ε_1, ε_2 και ε_3 που με τη σειρά τους χωρίζουν το ΔΕ σε κ τμήματα και το ΕΔ σε λ τμήματα. Αυτά τα νέα (κ+λ) τμήματα είναι ίσα σύμφωνα με γνωστό πρόβλημα του 5^{ου} κεφαλαίου αφού το καθένα ίσο με ΚΛ. Έτσι θα έχουμε



$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{κ\cdot ΜΝ}{λ\cdot ΜΝ}=\frac{κ}{λ} \quad \text{και} \quad \frac{ΔΕ}{ΕΖ}=\frac{κ\cdot ΚΛ}{λ\cdot ΚΛ}=\frac{κ}{λ}$$

Τελικά θα πάρουμε

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΔΕ}{ΕΖ} \quad \text{ή} \quad \frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}$$

και σύμφωνα με τις ιδιότητες των αναλογιών

$$\frac{AB}{\Delta E}=\frac{B\Gamma}{EZ}=\frac{AB+B\Gamma}{\Delta E+EZ}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$

Αν οι παράλληλες ευθείες είναι περισσότερες από τρεις η απόδειξη είναι παρόμοια. ■

Σημείωση

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των αναλογιών από την αναλογία $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{B\Gamma}{EZ}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ προκύπτουν οι αναλογίες: $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{EZ}$, $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{\Delta E}{\Delta Z}$.

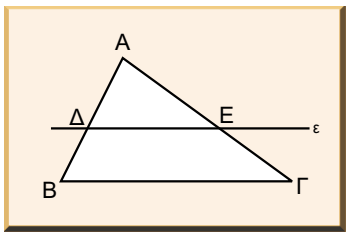
Παρατήρηση

Στην περίπτωση που τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ δεν είναι σύμμετρα, η απόδειξη ξεφεύγει από τα πλαίσια του βιβλίου αυτού, γι' αυτό και παραλείπεται.

Πόρισμα 7.2

(Ειδική περίπτωση του θ. Θαλή)

Αν μια ευθεία είναι παράλληλη προς μία πλευρά τριγώνου, τότε διαιρεί τις δύο άλλες πλευρές εσωτερικά ή εξωτερικά στον ίδιο λόγο.

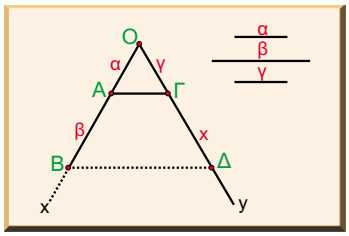


Δηλαδή, αν μία ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ τριγώνου και τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τότε $\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{EA}{E\Gamma}$. Από την αναλογία $\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{EA}{E\Gamma}$, χρησιμοποιώντας ιδιότητες αναλογιών προκύπτει η αναλογία $\frac{\Delta A}{BA}=\frac{EA}{\Gamma A}$. ■

Πρόβλημα 7.2 (κατασκευή 4ης αναλόγου)

Αν είναι γνωστά τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ, να κατασκευαστεί ένα τμήμα x τέτοιο, ώστε να ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{x}$.

Κατασκευή



Παίρνουμε τυχαία γωνία $x\hat{O}y$ και στην πλευρά της Ox δύο διαδοχικά τμήματα τα ΟΑ=α και ΑΒ=β. Στην πλευρά Oy παίρνουμε τμήμα ΟΓ=γ. Από το σημείο Β φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την Oy στο σημείο Δ. Το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα x είναι το ΓΔ.

Απόδειξη

Εφόσον ΑΓ//ΒΔ, σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή θα έχουμε

$$\frac{OA}{AB}=\frac{O\Gamma}{\Gamma\Delta} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\Gamma\Delta}$$

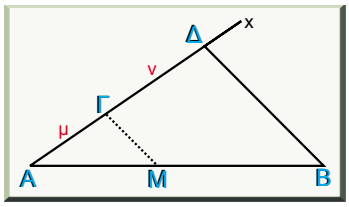
Πρόβλημα 7.3

Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ και ν γνωστά ευθύγραμμα τμήματα και $\mu \in N$, $\nu \in N^*$, $\mu \neq \nu$.

α) Εσωτερική διαίρεση

Κατασκευή

Από το άκρο Α του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρουμε μία ημιευθεία Αx έτσι ώστε να σχηματίζεται τυχαία γωνία $B\hat{A}x$. Στην πλευρά Αx αυτής της γωνίας παίρνουμε δύο διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ=μ και ΓΔ=ν. Στη συνέχεια φέρουμε τη ΔΒ και από το Γ μία ευθεία παράλληλη προς τη ΔΒ, η οποία τέμνει το ΑΒ στο σημείο Μ. Το Μ είναι το ζητούμενο σημείο.



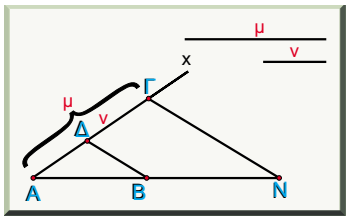
Απόδειξη

Επειδή ΓΜ//ΔΒ σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή, στο τρίγωνο ΑΒΔ θα έχουμε $\frac{MA}{MB} = \frac{ΓA}{ΓΔ}$ ή $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$

β) Εξωτερική διαίρεση

Κατασκευή

Έστω ότι μ>ν. Τότε $\frac{\mu}{\nu} > 1$ και για το ζητούμενο σημείο Ν θα έχουμε $\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu} > 1$, δηλαδή το Ν θα βρίσκεται στην προέκταση του ΑΒ προς το Β.



Από το άκρο Α του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρουμε ημιευθεία Αx και σχηματίζουμε τυχαία γωνία $B\hat{A}x$. Πάνω στην πλευρά της Αx παίρνουμε τα τμήματα ΑΓ=μ και ΑΔ=μ–ν. Άρα ΓΔ=ν. Φέρουμε τη ΔΒ και από το Γ ευθεία παράλληλη προς τη ΔΒ, η οποία τέμνει την προέκταση του ΑΒ στο σημείο Ν. Το σημείο Ν είναι το ζητούμενο.

Αν μ<ν δηλαδή $\frac{\mu}{\nu} < 1$, η κατασκευή γίνεται με παρόμοιο τρόπο.

Απόδειξη

Επειδή ΔΒ//ΓΝ σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή, στο τρίγωνο ΑΓΝ θα έχουμε:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{ΓA}{ΓΔ} = \frac{\mu}{\nu}$$

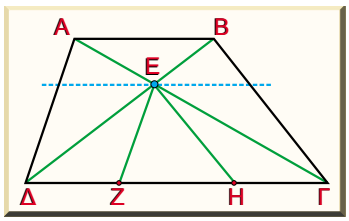
7.1 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή και του πορίσματος 7.2.

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Από το σημείο τομής Ε των διαγωνίων ενός τραπεζίου ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΔ και ΒΓ οι οποίες τέμνουν τη βάση ΓΔ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΖ=ΓΗ.

Απόδειξη



Εφόσον ΑΒ//ΓΔ σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή ισχύει

$$\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{BE}{B\Delta} \qquad (1)$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ, όπου ΕΖ//ΑΔ ισχύει

$$\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{\Delta Z}{\Delta\Gamma} \qquad (2)$$

Ομοίως στο τρίγωνο ΒΔΓ ισχύει

$$\frac{BE}{B\Delta}=\frac{\Gamma H}{\Delta\Gamma} \qquad (3)$$

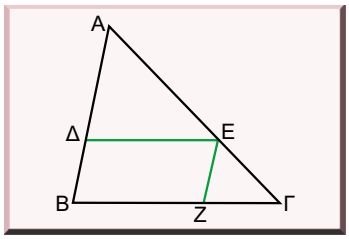
Από τις σχέσεις (2) και (3) λόγω της (1) προκύπτει ότι:

$$\frac{\Delta Z}{\Delta\Gamma}=\frac{\Gamma H}{\Delta\Gamma} \quad \text{οπότε} \quad \Delta Z=\Gamma H.$$

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Από ένα σημείο Δ της πλευράς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν η παράλληλη από το Ε προς την ΑΒ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ, να αποδειχθεί ότι α) $\frac{A\Delta}{B\Delta}=\frac{BZ}{\Gamma Z}$, β) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν ανάλογες πλευρές .

Απόδειξη



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ//ΒΓ, άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή ισχύει

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ} \qquad (1)$$

Ομοίως ΕΖ//ΑΒ, άρα $\frac{ΒΖ}{ΖΓ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΒΖ}{ΖΓ}$.

β) Επειδή ΔΕ//ΒΓ ισχύει

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ} \qquad (3)$$

και επειδή ΕΖ//ΑΒ ισχύει

$$\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΒΖ}{ΒΓ} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΒΖ}{ΒΓ} \qquad (5)$$

Επειδή όμως ΒΖ=ΔΕ (λόγω του παραλληλογράμμου ΔΕΖΒ), η σχέση (5) γίνεται

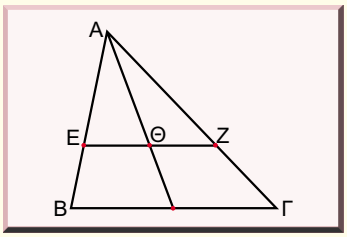
$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ} \qquad (6)$$

Τελικά, από τις σχέσεις (3) και (6) προκύπτει ότι

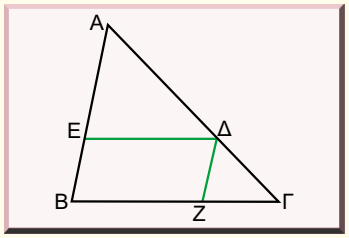
$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Θ είναι το βαρύκεντρο και η ΕΖ//ΒΓ. Αν ΑΕ=8 και ΖΓ=5, ποια είναι τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ;

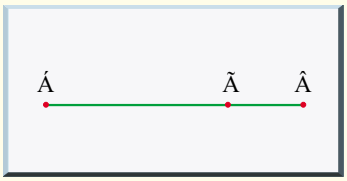


2 Στο σχήμα ΔΕ//ΒΓ και ΔΖ//ΑΒ και ΑΕ=4, ΔΖ=3 και ΓΖ=5. Πόσο το μήκος της ΒΓ;

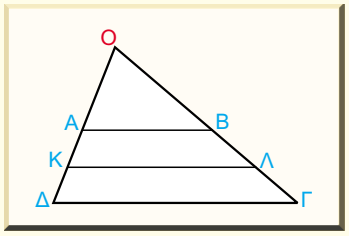


3 Αν τα α, β και γ είναι γνωστά ευθύγραμμα τμήματα, πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τμήμα x τέτοιο, ώστε $x=\frac{α\cdot β}{γ}$;

4 Αν $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}=\frac{3}{5}$, να συμπληρώσετε τις τιμές των λόγων: $\frac{ΑΒ}{ΓΒ}=\ldots$, $\frac{ΑΓ}{ΓΒ}=\ldots$, $\frac{ΑΒ}{ΓΑ}=\ldots$.



5 Στο επόμενο σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και η ΚΛ διάμεσός του. Να συμπληρώσετε τα κλάσματα:
$\frac{ΟΚ}{\ldots}=\frac{\ldots}{ΒΓ}=\frac{ΟΔ}{\ldots}=\frac{ΚΑ}{ΛΓ}$.



6 Ένα τρίγωνο με γωνίες ανάλογες των αριθμών 1, 2, 3, τι είδους τρίγωνο είναι;

7 Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του κέντρου βάρους ενός τριγώνου με μία μόνο διάμεσο;

8 Ο λόγος των διαστάσεων ενός ορθογωνίου είναι $\frac{5}{6}$. Αν αυξήσουμε κατά 1 cm κάθε διάσταση, ο λόγος αυτός θα μεταβληθεί;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=9 cm και ΑΓ=15 cm. Από το κέντρο βάρους του φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τα ΑΔ και ΓΕ.

2 Να διαιρέσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ευθύγραμμα τμήματα ανάλογα προς τους αριθμούς 1, 3 και 5.

3 Από ένα σημείο Ε της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΒ, ΑΓ που τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ΕΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΕΖΗ.

4 Από ένα σημείο Ε της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε παράλληλη προς τη διάμεσο ΑΔ, που τέμνει τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\frac{ΑΗ}{ΑΒ}=\frac{ΑΖ}{ΑΓ}$.

5 Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και δύο σημεία Α και Β της Οx. Φέρουμε από τα Α και Β δυο ευθείες μεταξύ τους παράλληλες, που τέμνουν την Οy στα Γ και Δ αντίστοιχα και από το Δ παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει την Οx στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΟΒ είναι μέση ανάλογος των ΟΑ και ΟΕ.

6 Από το σημείο τομής Ο των διαγωνίων κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΒ και ΑΔ, που τέμνουν τις ΒΓ και ΓΔ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΜΝ//ΔΒ.

7 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ, ΓΕ τα ύψη του. Φέρουμε και τα ύψη ΔΖ και ΕΘ του τριγώνου ΑΔΕ. Να αποδείξετε ότι ΖΘ//ΒΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Αν προεκτείνουμε την ΑΓ κατά τμήμα ΓΕ=ΒΔ και η ΔΕ τέμνει τη ΒΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΜ}{ΜΕ}=\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$.

2 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ζ ένα σημείο της ΑΔ τέτοιο, ώστε $\frac{ΑΖ}{ΖΔ}=3$. Η ΓΖ τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι ΒΕ=4ΕΔ.

3 Από την κορυφή Α ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε μια ευθεία ε, που τέμνει το παραλληλόγραμμο και τέμνει τις ΒΔ, ΒΓ, ΓΔ στα σημεία Ε, Ζ και Θ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{ΑΕ}=\frac{1}{ΑΖ}+\frac{1}{ΑΘ}$.

4 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ζ της ΑΒ τέτοιο, ώστε $\frac{ΑΖ}{ΑΒ}=\frac{1}{3}$. Η ΓΖ τέμνει τη διάμεσο ΑΔ στο σημείο Μ. Να βρείτε το λόγο στον οποίο το Μ διαιρεί τη διάμεσο.

5 Από το βαρύκεντρο G τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Επίσης φέρουμε από το Δ παράλληλη προς την ΑΓ και από το Ε παράλληλη προς την ΑΒ, που τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΑΡ η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $\frac{ΒΔ}{ΒΑ}=\frac{1}{3}$.

β) $\frac{ΒΜ}{ΒΓ}=\frac{1}{3}$ και $\frac{ΓΝ}{ΓΒ}=\frac{1}{3}$.

γ) ΒΜ=ΜΝ=ΝΓ.

6 Αν Ο ένα σημείο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και G_1, G_2 τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΟ, ΑΓΟ αντίστοιχα και Μ, Ν τα μέσα των ΒΟ και ΟΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι G_1G_2//ΜΝ.

7 Αν Ο η τομή των διαγωνίων κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και G_1, G_2, G_3, G_4 τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΟ, ΓΒΟ, ΓΔΟ, ΔΑΟ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $G_1G_2G_3G_4$ είναι παραλληλόγραμμο.

8 Η διάμετρος ΑΕ του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρουμε τις κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ, που τις τέμνουν στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΒΓ.

9 Δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο Α. Αν R>ρ και δύο χορδές ΑΓ και ΑΕ του κύκλου (Κ,R) τέμνουν τον (Λ,ρ) στα σημεία Β και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΑΔ}{ΔΕ}$.

10 Δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) τέμνονται στα σημεία Α και Α΄. Να κατασκευαστεί ευθεία, που να περνάει από το Α και να τέμνει τους κύκλους στα σημεία Β και Γ, ώστε να είναι ΑΒ=ΑΓ.

7.3 Κύκλος του Απολλώνιου

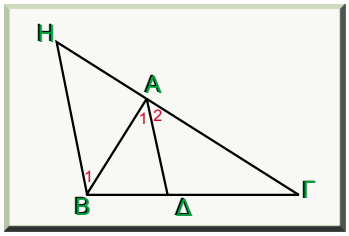
Θεώρημα των διχοτόμων τριγώνου

Θεώρημα 7.3

(Εσωτερικής διχοτόμου)

Η εσωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά εσωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

Απόδειξη



Έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ. Από την κορυφή Β φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΑΔ η οποία τέμνει την προέκταση της πλευράς ΑΓ στο σημείο Η. Επειδή $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (εντός εναλλάξ), $\widehat{A}_2 = \widehat{H}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά), $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (ΑΔ διχοτόμος) συμπεραίνουμε ότι $\widehat{H} = \widehat{B}_1$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΗ (1)

Στο τρίγωνο ΓΗΒ έχουμε ΑΔ//ΗΒ οπότε θα ισχύει

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AH}{A\Gamma} \qquad (2)$$

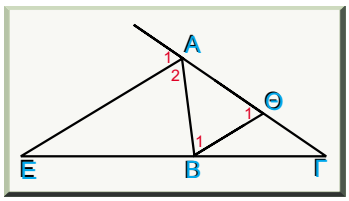
Η σχέση (2) λόγω της (1) γίνεται $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$. ■

Θεώρημα 7.3

(Εξωτερικής διχοτόμου)

Η εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου τέμνει το φορέα της απέναντι πλευράς σε σημείο που χωρίζει την απέναντι πλευρά εξωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

Απόδειξη



Έστω ΑΕ η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ. Από το Β φέρουμε τη ΒΘ//ΑΕ. Σχηματίζεται πάλι ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΘ ($\widehat{B}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_1 = \widehat{\Theta}_1$) με ΑΒ=ΑΘ. Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{A\Theta}{A\Gamma}. \quad \text{Τελικά} \quad \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$ ■

Παρατήρηση

- Το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου ισχύει για κάθε τρίγωνο

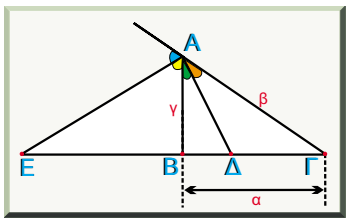
και για κάθε διχοτόμο. Το αντίστοιχο θεώρημα της εξωτερικής διχοτόμου ισχύει, με την προϋπόθεση ότι οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι άνισες. Στην περίπτωση που ΑΒ=ΑΓ η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ.

7.2 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να αποδείξετε ότι ισχύουν τα αντίστροφα των δύο θεωρημάτων των διχοτόμων.

- **Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων, στα οποία χωρίζει η διχοτόμος την απέναντι πλευρά συναρτήσει των μηκών α, β, γ.**

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και την εσωτερική διχοτόμο ΑΔ. Σύμφωνα με το θεώρημα των διχοτόμων και τις ιδιότητες των αναλογιών, διαδοχικά έχουμε



$$\frac{ΒΔ}{ΔΓ}=\frac{γ}{β} \quad ή \quad \frac{ΒΔ}{ΔΓ+ΒΔ}=\frac{γ}{β+γ} \quad ή \quad \frac{ΒΔ}{α}=\frac{γ}{β+γ}$$

δηλαδή $ΒΔ=\dfrac{αγ}{β+γ}$

Επίσης $ΔΓ=ΒΓ-ΒΔ=α-\dfrac{αγ}{β+γ}=\dfrac{αβ+αγ-αγ}{β+γ}$

δηλαδή $ΔΓ=\dfrac{αβ}{β+γ}$

Αν ΑΕ είναι η εξωτερική διχοτόμος και β>γ, τότε διαδοχικά έχουμε $\dfrac{ΒΕ}{ΕΓ}=\dfrac{γ}{β}$ ή $\dfrac{ΒΕ}{ΕΓ-ΒΕ}=\dfrac{γ}{β-γ}$ ή $\dfrac{ΒΕ}{α}=\dfrac{γ}{β-γ}$

δηλαδή $ΒΕ=\dfrac{αγ}{β-γ}$

Επίσης $ΕΓ=ΕΒ+ΒΓ=\dfrac{αγ}{β-γ}+α=\dfrac{αγ+αβ-αγ}{β-γ}$

δηλαδή $ΕΓ=\dfrac{αβ}{β-γ}$

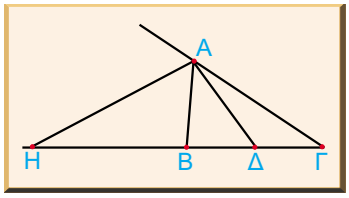
Όταν είναι β<γ, τότε στις προηγούμενες ισότητες αντί για β–γ θα έχουμε γ–β.

Συζυγή αρμονικά σημεία

- Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα ίχνη Δ και Η των διχοτόμων της γωνίας $\widehat{A}$ χωρίζουν την πλευρά ΒΓ εσωτερικά και εξωτερικά στο ίδιο λόγο, δηλαδή

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΗΒ}{ΗΓ}$$

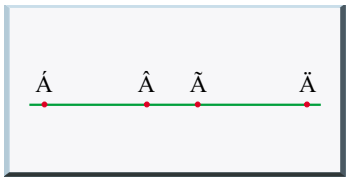
Τότε λέμε ότι τα σημεία Δ και Η είναι **αρμονικά συζυγή** των Β και Γ.



Ορισμός

Τα σημεία Α και Γ είναι αρμονικά συζυγή των σημείων Β και Δ όταν τα Α,Β,Γ,Δ είναι συνευθειακά και ισχύει η αναλογία $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΓΒ}{ΓΔ}$.

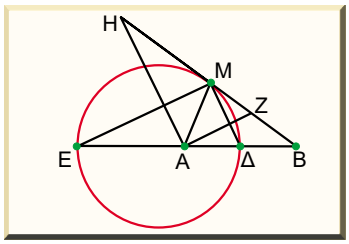
Επίσης λέμε ότι η τετράδα Α, Γ, Β, Δ είναι αρμονική. Είναι προφανές ότι, αν τα Α, Γ είναι αρμονικά συζυγή των Β, Δ, τότε και τα Β, Δ είναι αρμονικά συζυγή των Α, Γ.



Πρόβλημα 7.4

Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των σημείων των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία του επιπέδου, είναι $\frac{μ}{ν} \neq 1$.

Έστω Α και Β τα σταθερά σημεία και Μ ένα σημείο εκτός της ευθείας ΑΒ για το οποίο ισχύει $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{μ}{ν}$. Αν ΜΔ και ΜΕ η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\widehat{M}$ του τριγώνου ΜΑΒ, τότε τα ίχνη τους Δ και Ε είναι επίσης σταθερά, διότι χωρίζουν το ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε σταθερό λόγο $\frac{μ}{ν}$. Επίσης η γωνία $Ε\widehat{Μ}Δ$ είναι ορθή, άρα το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο διαμέτρου ΔΕ.



Αντιστρόφως

Θα αποδείξουμε ότι ένα τυχαίο σημείο Μ του κύκλου αυτού έχει την ιδιότητα $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{μ}{ν}$.

Φέρουμε από το Α τις ΑΖ και ΑΗ παράλληλες προς τις ΜΕ και ΜΔ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνουν την ευθεία ΜΒ στα σημεία Ζ και Η. Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{ΜΖ}{ΜΒ} = \frac{ΕΑ}{ΕΒ} \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \frac{ΜΗ}{ΜΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ} \quad (2)$$

Στις σχέσεις (1) και (2) τα δεύτερη μέλη είναι ίσα (διότι τα Ε και Δ χωρίζουν το τμήμα ΑΒ σε ίσους λόγους), άρα θα είναι ίσα και τα πρώτα. Οπότε $\frac{MZ}{MB} = \frac{MH}{MB}$, απ' όπου προκύπτει MZ=MH δηλαδή ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΗΑΖ. Όμως η γωνία $H\widehat{A}Z$ είναι ορθή, διότι οι πλευρές της είναι παράλληλες με τις πλευρές της ορθής γωνίας $E\widehat{M}\Delta$. Άρα η διάμεσός ΑΜ του ορθογωνίου τριγώνου ΗΑΖ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας ΗΖ, δηλαδή ΜΑ=ΜΗ=ΜΖ.

Έτσι η σχέση (1) γράφεται $\frac{MA}{MB} = \frac{EA}{EB}$ ή $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος διαμέτρου ΕΔ. Ο κύκλος αυτός καλείται Απολλώνιος κύκλος.

Κατασκευή

Η κατασκευή του Απολλώνιου κύκλου, όταν είναι γνωστά τα σημεία Α και Β και ο λόγος $\frac{\mu}{\nu}$, στηρίζεται σε προηγούμενες γνωστές κατασκευές. Χωρίζουμε αρχικά το τμήμα ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$ οπότε προσδιορίζουμε ένα σημείο Δ εσωτερικό του ΑΒ και ένα σημείο Ε εξωτερικό του ΑΒ τέτοια, ώστε $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu}$ και $\frac{EA}{EB} = \frac{\mu}{\nu}$ και στη συνέχεια με διάμετρο το τμήμα ΔΕ γράφουμε κύκλο.

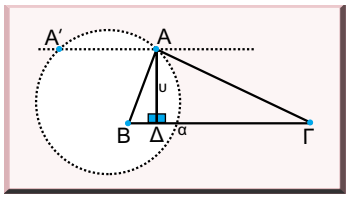
7.3 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε παριστάνει μία σιδηροδρομική γραμμή και τα σημεία Α και Β τις θέσεις δύο χωριών με πληθυσμούς 5.000 και 8.000 κατοίκους αντίστοιχα. Πώς θα προσδιορίσετε τη θέση που πρέπει να κτίσουμε ένα σταθμό Σ για την εξυπηρέτηση των δύο χωριών ώστε οι αποστάσεις του Σ από τα χωριά να είναι αντιστρόφως ανάλογες των πληθυσμών τους;

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ, όταν δίνεται η πλευρά ΒΓ=α, το ύψος ΑΔ=υ και γνωρίζουμε ότι η πλευρά ΑΓ είναι διπλάσια από την ΑΒ.

Ανάλυση



Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάστηκε. Εφόσον ΑΓ=2ΑΒ θα έχουμε $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}=2$, άρα η κορυφή Α θα ανήκει στον Απολλώνιο κύκλο του οποίου τα σημεία έχουν λόγο αποστάσεων από τα Β και Γ ίσο με 2. Αυτός ο κύκλος μπορεί να κατασκευαστεί. Ακόμη η απόσταση του σημείου Α από τη ΒΓ είναι υ, άρα το Α θα ανήκει και σε μία ευθεία ε παράλληλη της ΒΓ σε απόσταση υ. Η τομή των δύο αυτών γεωμετρικών τόπων θα προσδιορίσει τη θέση της κορυφής Α.

Σύνθεση

Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ=α. Γράφουμε τον Απολλώνιο κύκλο των σημείων που έχουν λόγο αποστάσεων από τα σημεία Γ και Β ίσο με 2. Φέρουμε στη συνέχεια μία ευθεία ε παράλληλη προς τη ΒΓ και σε απόσταση υ. Αν Α η τομή της ε και του κύκλου, το ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο.

Απόδειξη

Προφανής.

Διερεύνηση

Η ευθεία ε και ο κύκλος μπορεί να έχουν 2 ή 1 ή και κανένα κοινό σημείο. Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις θα έχουμε και ισάριθμες λύσεις στο πρόβλημα, δηλαδή 2 λύσεις, 1 λύση, καμία λύση.

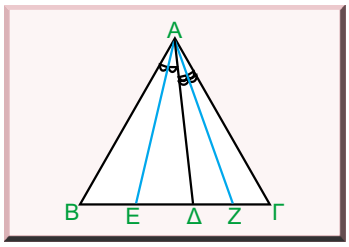
Υπάρχει όμως ακόμη μία ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ και σε απόσταση υ απ' αυτό. Τα κοινά σημεία αυτής της ευθείας με τον κύκλο θα δώσουν όμως τρίγωνα που θα είναι ίσα με τα προηγούμενα και για το λόγο αυτό δε θεωρούνται λύσεις διαφορετικές.

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν Δ σημείο της πλευράς ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και οι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδειχτεί ότι $\frac{\Delta E}{EB}=\frac{\Delta Z}{Z\Gamma}$.

Απόδειξη

Εφόσον το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές έχουμε ΑΒ=ΑΓ (1)



Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΕ είναι εσωτερική διχοτόμος, άρα σύμφωνα με το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου ισχύει

$$\frac{\Delta E}{EB}=\frac{A\Delta}{AB} \qquad (2)$$

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει $\frac{\Delta Z}{Z\Gamma}=\frac{A\Delta}{A\Gamma}$

(3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\frac{\Delta E}{EB}=\frac{\Delta Z}{Z\Gamma}$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

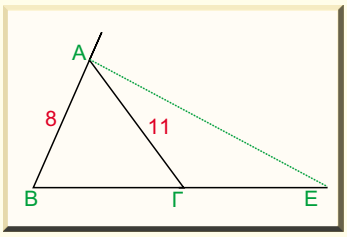
Ο Απολλώνιος, διάσημος μαθηματικός της αρχαιότητας καταγόμενος από την Παμφυλία της Μ. Ασίας, ήκμασε κατά τον 3° αι. π.Χ. και έγραψε πολλά συγγράμματα. Θεωρείται εφάμιλλος του Αρχιμήδη. Το έργο του "Περί επιπέδων γεωμετρικών τόπων" περιλαμβάνει τη μελέτη γνωστή ως "περιφέρεια του Απολλώνιου". Το σπουδαιότερο όμως έργο του που αποτελείται από οκτώ βιβλία με τον τίτλο "Κωνικά" αναφέρεται στις κωνικές τομές. Στο έργο αυτό χρησιμοποίησε τα συζυγή αρμονικά σημεία για την κατασκευή εφαπτομένων στην υπερβολή και την έλλειψη. Από το σύνολο των οκτώ βιβλίων σώθηκαν τα τέσσερα πρώτα στην ελληνική γλώσσα και τρία στην αραβική ενώ το όγδοο χάθηκε.

Χαρακτηριστική είναι η δήλωση του Leibniz: "εκείνος, ο οποίος κατανοεί τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο, θαυμάζει λιγότερο τις επινοήσεις των νεότερων μεγάλων ανδρών".

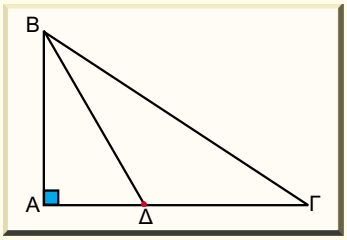
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Πώς μπορούμε με τη βοήθεια του θεωρήματος της εσωτερικής διχοτόμου να αποδείξουμε ότι η διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο είναι και διάμεσος;

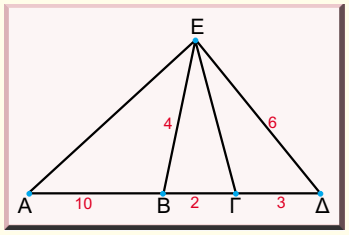
2 Για ποιο λόγο αποκλείεται η ΑΕ να είναι η εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ;



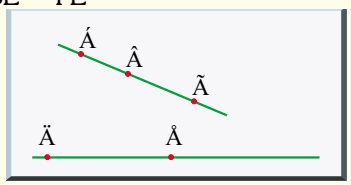
3 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Να αντικαταστήσετε τις τελείες με τα σύμβολα > ή < στις παρακάτω περιπτώσεις: α) ΔΑ....ΑΒ, ΔΑ....ΔΓ, ΒΓ....ΔΓ



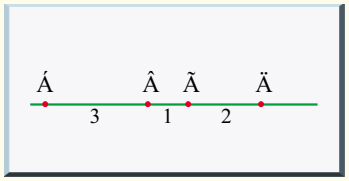
4 Στο σχήμα σημειώνονται τα μήκη ορισμένων τμημάτων. Να εξηγήσετε γιατί η γωνία $\widehat{AEΓ}$ είναι ορθή.



5 Στο σχήμα είναι δυνατό να ισχύει: $\frac{AΔ}{AE}=\frac{BΔ}{BE}=\frac{ΓΔ}{ΓE}$;



6 Τα σημεία Α, Γ, Β, Δ αποτελούν αρμονική τετράδα;



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=10 cm, ΒΓ=9 cm και ΑΓ=6 cm. Αν ΓΔ είναι η εσωτερική και ΓΖ η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Γ}$, να υπολογίστε τη ΖΔ.

2 Αν ΑΔ η διχοτόμος και Ι το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{IΔ}{IA}$ συναρτήσει των α, β, γ.

3 Θεωρούμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τριγώνου ΑΒΓ οι οποίες τέμνονται στο Ι.

α) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{IA}{IΔ}+\frac{IB}{IE}+\frac{IΓ}{IZ}=\frac{β+γ}{α}+\frac{γ+α}{β}+\frac{α+β}{γ}$$

β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α) και την πρόταση "το άθροισμα δυο αντίστροφων αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2", να αποδείξετε ότι

$$\frac{IA}{IΔ}+\frac{IB}{IE}+\frac{IΓ}{IZ}\geq 6$$

4 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ, που τέμνονται στο Ο, να αποδείξετε ότι ΑΟ>ΟΔ, ΒΟ>ΟΕ και ΓΟ>ΟΖ.

5 Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ οι εσωτερικές διχοτόμοι ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι

$$\frac{BΔ}{ΓΔ}\cdot\frac{ΓE}{AE}\cdot\frac{ZA}{BZ}=1$$

6 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ και η διχοτόμος της εξωτερικής της γωνίας $\widehat{Γ}$ τέμνουν την ΑΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ε και Ζ είναι συζυγή αρμονικά των Α και Δ.

7 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6 cm, ΒΓ=10 cm και ΑΓ=9 cm. Αν Δ, Ε και Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα και η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΔME}$ τέμνει τη ΔΕ στο Ζ, να υπολογίσετε τα τμήματα ΖΔ και ΖΕ.

8 Σε ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{A}=90°$ και $\widehat{B}=60°$ φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ και τη διάμεσο ΒΜ του τριγώνου ΒΔΓ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ=ΔΜ=ΜΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τη διάμεσο ΑΜ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{AK}{KM}+\frac{AΛ}{ΛM}>2.$$

2 Τέσσερις ημιευθείες Ox, Oy, Oz, Ot σχηματίζουν διαδοχικές γωνίες ίσες με 45° η καθεμιά. Επί της Ox και Ot παίρνουμε τα σημεία Α και Δ αντίστοιχα έτσι, ώστε ΟΑ=ΟΔ. Αν η ΑΔ τέμνει τις Oy και Oz στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα Β, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Γ.

β) Η ΑΒ είναι μέση ανάλογος των ΑΔ και ΒΓ.

3 Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ. Φέρουμε τις εφαπτόμενες στα άκρα Α και Β της διαμέτρου και από ένα σημείο Μ του ημικυκλίου φέρουμε άλλη εφαπτομένη που τέμνει τις πρώτες στα Γ και Δ, ενώ την προέκταση της ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ και Ε είναι συζυγή αρμονικά των Γ και Δ.

4 Από σημείο Α εξωτερικό του κύκλου (O,R) φ;ερουμε τις εφαπτόμενες ΑΒ και ΑΓ και την ΑΟ η οποία τέμνει τον κύκλο στα Δ και Ε και τη ΒΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ και Ε είναι συζυγή αρμονικά των Α και Ζ.

5 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=8 cm, ΒΓ=10 cm και ΑΓ=12 cm και σημείο Δ της ΒΓ τέτοιο ώστε ΒΔ=4 cm και σημείο Ε της ΑΔ τέτοιο ώστε ΑΕ=2ΕΔ. Αν η ΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ:

α) Να αποδείξετε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\widehat{A}$ και η ΒΕ διχοτόμος της $\widehat{B}$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΖ.

6 Έστω ΑΒ και ΓΔ δύο κάθετες διάμετροι κύκλου (O,R) και Μ το μέσο της ΟΔ. Αν η ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο Ε, να αποδείξετε ότι ΕΓ=3ΕΔ.

7 Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΑΔ που τέμνει την ΑΒ στο Ρ και την ΑΓ στο Κ. Να δειχτεί ότι $ΓK=BP=\frac{1}{2}(β+γ)$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Έστω ΑΒΓ τρίγωνο και ΑΔ η εσωτερική διχοτόμος. Φέρουμε ΔΕ//ΑΒ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{AE}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$

2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν ΔΜ, ΜΕ οι εσωτερικές διχοτόμοι των τριγώνων ΑΜΒ και ΑΜΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.

3 Έστω ΑΒΓ τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Στο μέσο Μ του τόξου ΒΓ φέρουμε εφαπτομένη η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{BE}{\Gamma\Delta}=\frac{ME}{M\Delta}$.

4 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και Κ, Λ, Μ τα μέσα των κυρτών τόξων $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma A}$ και $\overset{\frown}{AB}$ αντίστοιχα. Οι ΚΛ και ΚΜ τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.

5 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β+γ=2α, η διχοτόμος ΑΔ, η διάμεσος ΓΕ, η διάμεσος ΒΖ, το βαρύκεντρό του G και το έγκεντρό του I.

α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AI}{I\Delta}$.

β) Να δείξετε ότι IG//ΒΓ.

γ) Αφού αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ισοσκελή, να εξετάσετε τι τρίγωνο πρέπει να είναι το ΑΒΓ (ισοσκελές, ισόπλευρο ή ορθογώνιο) ώστε να έχουμε ΔΕ=ΔΖ.

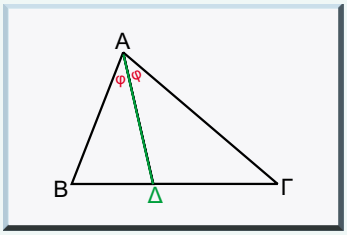
6 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=2\hat{A}$. Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ της γωνίας $\hat{B}$ και τη διχοτόμο ΔΕ της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $\frac{BE}{E\Gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}$.

7 Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνουν τις ΑΓ και ΔΒ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΜΝ//ΓΔ.

8 Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Ζ ανήκουν στην ίδια ευθεία, αν και μόνο αν, ισχύει $\frac{\Delta A}{\Delta B}\cdot\frac{EB}{E\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZA}=1$ (θεώρημα του Μενελάου).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 7ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

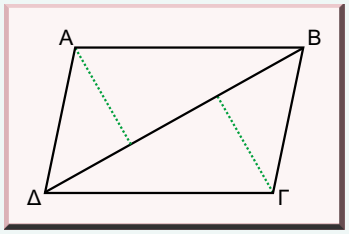
1 Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος και η ΑΓ=2ΑΒ, τότε τι από τα παρακάτω ισχύει;



Α. ❑ $B\Delta=\frac{1}{2}B\Gamma$ Β. ❑ $B\Delta=\frac{1}{3}B\Gamma$

Γ. ❑ $B\Delta<\frac{1}{2}\Gamma\Delta$ Δ. ❑ $B\Delta>\frac{1}{2}\Gamma\Delta$

2 Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ χωρίζει τη ΔΒ σε λόγο ν. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ χωρίζει τη ΔΒ σε λόγο μ. Τότε γιατί μ·ν=1;

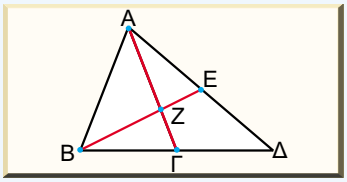


3 Ποια είναι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ;

4 Στο σχήμα αν ισχύουν $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΑΖ}{ΖΓ}$, τότε ο λόγος $\frac{ΑΒ}{ΒΔ}$ είναι ίσος με:

Α. ❑ $\frac{ΑΕ}{ΑΔ}$ Γ. ❑ $\frac{ΑΔ}{ΕΔ}$

Β. ❑ $\frac{ΑΕ}{ΕΔ}$ Δ. ❑ $\frac{ΒΓ}{ΓΔ}$



5 Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν λόγο αποστάσεων από δυο δοσμένα σημεία Α και Β ίσο με 1 είναι:

Α. ❑ Απολλώνιος κύκλος.

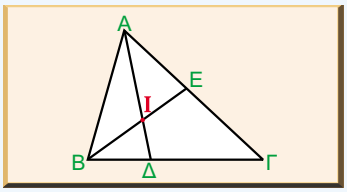
Β. ❑ Ευθεία παράλληλη στην ΑΒ.

Γ. ❑ Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Δ. ❑ Η μεσοκάθετος του ΑΒ.

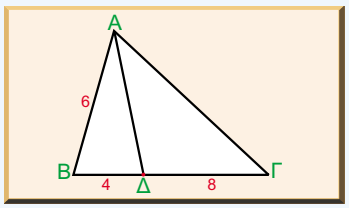
6 Να εξηγήσετε γιατί είναι σωστή ή λανθασμένη καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

α) Αν οι ΑΔ και ΒΕ είναι οι διχοτόμοι του τριγώνου ΑΒΓ, τότε ο λόγος $\frac{ΑΙ}{ΙΔ}$ είναι μεγαλύτερος της μονάδας.



❑ Σωστό ❑ Λάθος

β) Αν η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Α}$, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

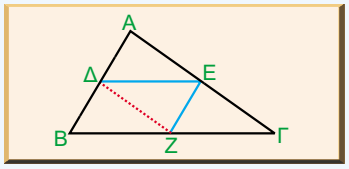


❑ Σωστό ❑ Λάθος

γ) Για κάθε τρίγωνο ΑΒΓ υπάρχει κύκλος για κάθε σημείο Μ του οποίου ισχύει $\frac{ΜΒ}{ΜΓ}=\frac{γ}{β}$.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

δ) Στο σχήμα αν ισχύουν οι σχέσεις ΔΕ//ΒΓ και ΕΖ//ΑΒ, τότε θα ισχύει και ΖΔ//ΑΓ.

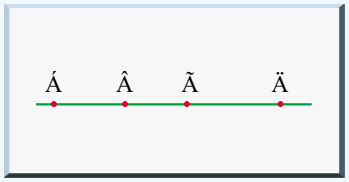


❑ Σωστό ❑ Λάθος

ε) Αν $\frac{α}{β}=\frac{β}{γ}=\frac{γ}{δ}=λ$, τότε $\frac{α}{δ}=λ^3$.

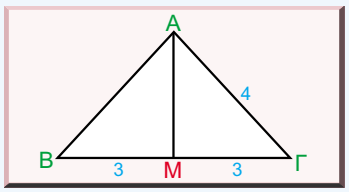
❑ Σωστό ❑ Λάθος

στ) Αν τα σημεία του σχήματος αποτελούν αρμονική τετράδα, τότε ΑΒ>ΒΓ.



❑ Σωστό ❑ Λάθος

ζ) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος η διάμεσος ΑΜ έχει μήκος ΑΜ=2, τότε η ΑΒ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΜΓ.



❑ Σωστό ❑ Λάθος

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

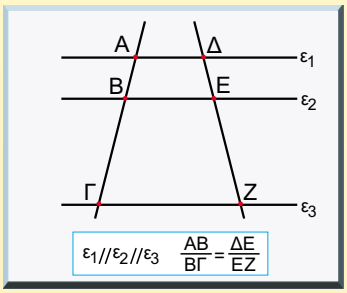
Στην αρχή του κεφαλαίου ορίσαμε το λόγο δύο ευθύγραμμων τμημάτων. Για το λόγο των ευθύγραμμων τμημάτων δανειστήκαμε συμβολισμούς και ορολογία από την Άλγεβρα και είδαμε ότι οι ιδιότητες των αναλογιών της Άλγεβρας ισχύουν και στις αναλογίες των ευθύγραμμων τμημάτων.

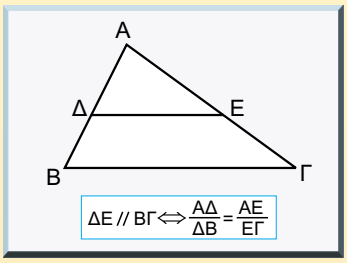
Ο λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων μας καθόρισε τα σύμμετρα και τα ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα.

Με τη βοήθεια του λόγου δύο τμημάτων επίσης ορίσαμε το μήκος ευθύγραμμου τμήματος και αποδείξαμε ότι ο λόγος δύο τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους.

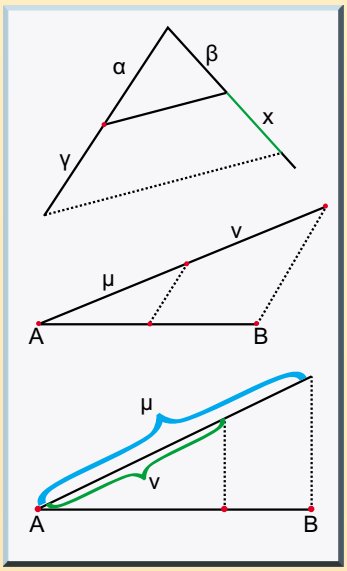
Η εκτενής αναφορά στους λόγους και στις αναλογίες ευθύγραμμων τμημάτων ήταν απαραίτητη, για να μελετήσουμε στη συνέχεια το θεώρημα του Θαλή.

Το θεώρημα του Θαλή το αποδείξαμε στην περίπτωση των τριών παραλλήλων ευθειών και στην ειδική περίπτωση της τέμνουσας τριγώνου.

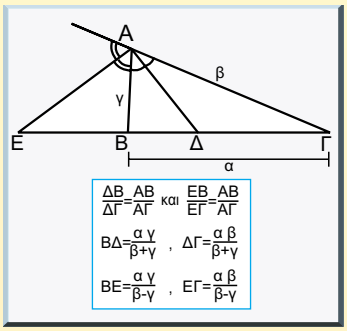




Το θεώρημα του Θαλή το χρησιμοποιήσαμε στην κατασκευή της τέταρτης αναλόγου x τριών ευθύγραμμων τμημάτων α, β και γ και στη διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.



Επίσης εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή αποδείξαμε το θεώρημα της εσωτερικής και της εξωτερικής διχοτόμου. Στη συνέχεια υπολογίσαμε τα τμήματα στα οποία χωρίζει η εσωτερική ή η εξωτερική διχοτόμος την απέναντι πλευρά συναρτήσει των μηκών των πλευρών του τριγώνου.



Με τα θεωρήματα των διχοτόμων ορίσαμε και τα αρμονικά συζυγή σημεία και μας δόθηκε η ευκαιρία να μελετήσουμε τον κύκλο του Απολλώνιου (ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ο λόγος των αποστάσεων από δύο σημεία είναι ίσος με $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$).

Για την κατασκευή του κύκλου αυτού χωρίσαμε εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$ με τη βοήθεια του θεωρήματος του Θαλή, οπότε κατασκευάστηκε μια αρμονική τετράδα σημείων (Ε, Δ συζυγή αρμονικά των Α, Β) και στη συνέχεια με διάμετρο ΕΔ κατασκευάσαμε κύκλο (Απολλώνιο κύκλο).