Κεφάλαιο 5

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

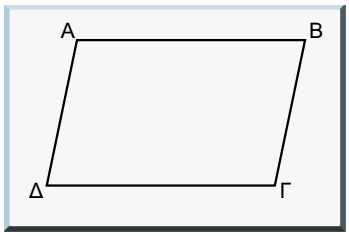
5.1 Ορισμός και ιδιότητες παραλληλογράμμων

5.1.1 Ορισμός

Ορισμός

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

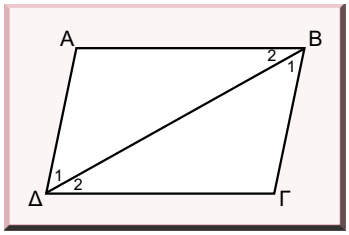
Ο ορισμός του παραλληλογράμμου συμβάλλει στην απόδειξη των επόμενων τριών θεωρημάτων που εκφράζουν χαρακτηριστικές ιδιότητές του.



5.1.2 Ιδιότητες παραλληλογράμμων

Θεώρημα 5.1

Κάθε παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

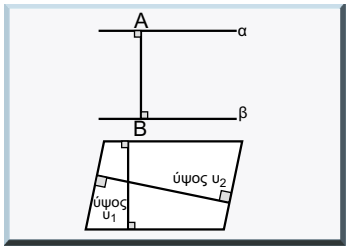


Απόδειξη

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τη διαγώνιό του ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΔΒ έχουν τη ΒΔ κοινή και $\widehat{B}_2 = \widehat{\Delta}_2$ και $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_1$ (εντός εναλλάξ). Άρα σύμφωνα με το 2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ-Π-Γ), τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε ΑΒ=ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ. ■

Πόρισμα 5.1

Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε παράλληλες ευθείες είναι ίσα.



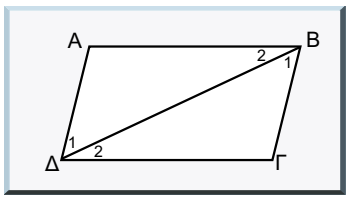
Ειδικότερα κάθε ευθεία που είναι κάθετη σε μια πλευρά παραλληλογράμμου είναι κάθετη και στην απέναντι πλευρά του. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σ' αυτές, ονομάζεται

ύψος του παραλληλογράμμου. Το μήκος του ύψους του παραλληλογράμμου είναι δηλαδή η απόσταση των απέναντι παράλληλων ευθειών.

Θεώρημα 5.2

Κάθε παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες.

Απόδειξη



Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και φέρουμε τη διαγώνιό του ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΔΒ είναι ίσα, άρα σύμφωνα με το 3° κριτήριο ισότητας (Π-Π-Π), $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$. Ακόμα $\widehat{B}_2 = \widehat{\Delta}_2$ και $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$. Επομένως $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = \widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2$ και τελικά $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$. ■

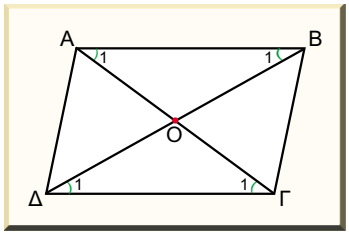
Πόρισμα 5.2

Οι γειτονικές γωνίες κάθε παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές.

Θεώρημα 5.3

Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες διχοτομούνται.

Απόδειξη



Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ που τέμνονται στο Ο. Τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΓΔΟ έχουν τις πλευρές ΑΒ=ΓΔ (απέναντι πλευρές παραλληλόγραμμου), $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$ (εντός εναλλάξ) και $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (εντός εναλλάξ). Σύμφωνα με το 2° κριτήριο ισότητας (Γ-Π-Γ) τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, άρα ΟΑ=ΟΓ και ΟΒ=ΟΔ. ■

Προκύπτει τώρα το ερώτημα αν τις ιδιότητες αυτές τις έχουν μόνο τα παραλληλόγραμμα ή και άλλα τετράπλευρα. Αρκεί δηλαδή ένα τετράπλευρο να έχει κάποια ή κάποιες ιδιότητες απ' αυτές, ώστε να χαρακτηριστεί παραλληλόγραμμο;

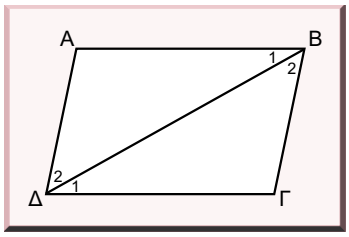
Τα θεωρήματα που ακολουθούν απαντούν στο ερώτημα αυτό. Αποτελούν τα **κριτήρια** για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο και ουσιαστικά καθορίζουν τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Θεώρημα 5.4

1ο κριτήριο

Αν ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη



Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ=ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ κα1ο κριτήριοι φέρουμε τη διαγώνιό του ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ έχουν ΒΔ=ΒΔ, ΑΒ=ΓΔ και ΑΔ=ΓΒ, οπότε σύμφωνα με το 3ο

κριτήριο ισότητας (Π-Π-Π) είναι ίσα. Άρα $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{B}_2$.

Οι $\widehat{B}_1$ και $\widehat{\Delta}_1$ είναι εντός εναλλάξ των ΑΒ και ΓΔ με τέμνουσα τη ΒΔ, οπότε ΑΒ//ΓΔ. Ομοίως, η ισότητα $\widehat{B}_2 = \widehat{\Delta}_2$ μας εξασφαλίζει ότι ΒΓ//ΑΔ.

Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. ■

Θεώρημα 5.5

2ο κριτήριο

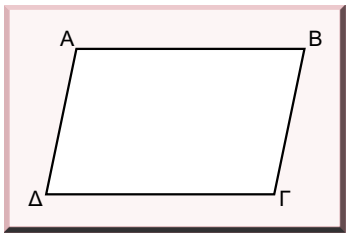
Αν ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι γωνίες ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη

Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$. Έχουμε $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360°$ οπότε $2\widehat{A} + 2\widehat{\Delta} = 360°$ ή $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 180°$. Οι $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}$ όμως είναι εντός και επί τα αυτά γωνίες, άρα ΑΒ//ΓΔ.

Με όμοιο τρόπο προκύπτει και ότι ΑΔ//ΒΓ.

Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. ■



Πόρισμα 5.3

Αν οι γειτονικές γωνίες σ' ένα τετράπλευρο είναι παραπληρωματικές, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

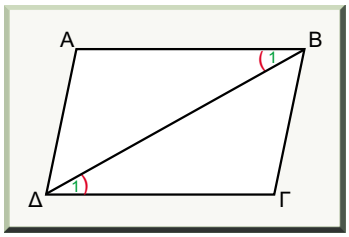
Θεώρημα 5.6

3ο κριτήριο

Αν δύο πλευρές ενός τετράπλευρου είναι ίσες και παράλληλες μεταξύ τους, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη

Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο οποίο ισχύει ΑΒ=ΓΔ και ΑΒ//ΓΔ και φέρουμε τη διαγώνιό του ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ έχουν τη ΒΔ κοινή, ΑΒ=ΔΓ και $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (εντός εναλλάξ). Σύμφωνα με το 1° κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π), τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, άρα ΑΔ=ΒΓ. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει επομένως τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο. ■



Πόρισμα 5.4

Το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο απέναντι πλευρών παραλληλόγραμμου είναι ίσο και παράλληλο με κάθε μία από τις άλλες δυο πλευρές.

Θεώρημα 5.7

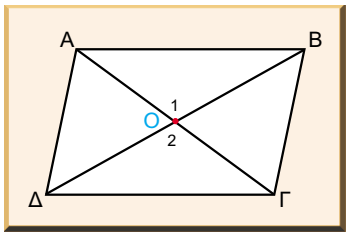
4ο κριτήριο

Αν σ' ένα τετράπλευρο οι διαγώνιες διχοτομούνται, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη

Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και φέρουμε τις διαγώνιές του ΑΓ και ΒΔ που τέμνονται στο Ο. Τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΓΔΟ έχουν

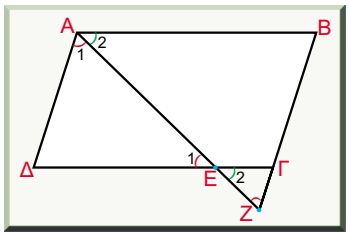
ΟΑ=ΟΓ, ΟΒ=ΟΔ και $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (κατακορυφήν). Σύμφωνα με το 1ο κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π) θα είναι ίσα, άρα ΑΒ=ΓΔ. Ομοίως από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΟ και ΒΓΟ εξασφαλίζουμε ότι και ΑΔ=ΒΓ. Άρα τελικά το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, διότι έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες. ■



1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχτεί ότι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, αν δεν διέρχεται από το Γ, σχηματίζει με τους φορείς των πλευρών του τρία ισοσκελή τρίγωνα.

Απόδειξη



- Η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

  Άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (1)

  Αλλά $\widehat{A}_2 = \widehat{E}_1$ (2) (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ)

  Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$

  Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

- Ομοίως έχουμε $\widehat{E}_2 = \widehat{A}_2$ (3)

  και $\widehat{Z} = \widehat{A}_1$ (4)

  Από τις σχέσεις (1), (3), (4) προκύπτει ότι $\widehat{Z} = \widehat{E}_2$ και $\widehat{Z} = \widehat{A}_2$.

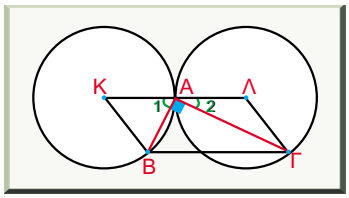
  Άρα τα τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΖ είναι ισοσκελή.

  Επομένως η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ του ΑΒΓΔ σχηματίζει με τους φορείς των πλευρών του τρία ισοσκελή τρίγωνα, τα ΑΔΕ, ΕΓΖ και ΑΒΖ.

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Θεωρούμε ένα σημείο Β του ενός κύκλου και ένα σημείο Γ του άλλου έτσι, ώστε η γωνία $\widehat{BAΓ}$ να είναι ορθή. Να αποδειχτεί ότι το τετράπλευρο ΒΚΛΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη



Στα ισοσκελή τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ ισχύουν:

$\widehat{K} = 180° - 2\widehat{A}_1$ και $\widehat{\Lambda} = 180° - 2\widehat{A}_2$

Επομένως $\widehat{K} + \widehat{\Lambda} = 360° - 2(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2)$ ή $\widehat{K} + \widehat{\Lambda} = 360° - 2 \cdot 90°$

ή $\widehat{K} + \widehat{\Lambda} = 180°$

Άρα ισχύει ΚΒ//ΛΓ και επειδή ΚΒ=ΛΓ=R το τετράπλευρο ΚΒΓΛ είναι παραλληλόγραμμο σύμφωνα με το 3ο κριτήριο παραλληλογράμμων.

5.1 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στηριζόμενοι στις ιδιότητες των παραλληλογράμμων να εξετάσετε αν ένα παραλληλόγραμμο έχει κέντρο συμμετρίας.

5.2 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Τοποθετούμε σε κατακόρυφη θέση ένα κοντάρι ύψους 6 m μπροστά από έναν τοίχο σε απόσταση α. Τ:ο τμήμα της σκιάς του που πέφτει στον τοίχο είναι 3 m. Πόσο θα ήταν το ύψος αυτής της σκιάς, αν το κοντάρι είχε ύψος 4 m;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Αν προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ κατά ΜΔ=ΑΜ, τότε το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο;

2 Τι ονομάζουμε ύψος παραλληλογράμμου;

3 Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ έχουν λόγο 1:3. Ποιο το μέτρο της γωνίας $\widehat{A}$;

4 Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι δύο του πλευρές είναι παράλληλες και οι άλλες δύο είναι ίσες;

5 Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ αν $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$ και ΑΔ=ΒΓ, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

6 Τα παράλληλα τμήματα μεταξύ παράλληλων ευθειών είναι πάντοτε και ίσα. Ισχύει το αντίστροφο;

7 Η ευθεία που ενώνει τα μέσα των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι παράλληλη προς τις άλλες πλευρές του;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις διαμέσους ΒΚ, ΓΛ κατά τμήματα ΚΔ, ΛΕ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΒΚ=ΚΔ και ΓΛ=ΛΕ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ=ΑΕ και ότι Α, Δ, Ε συνευθειακά.

2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, Δ τυχαίο σημείο της ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΔ και παίρνουμε τμήμα ΜΖ=ΒΔ. Να δείξετε ότι το ΜΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμο.

3 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ. Αν Μ το μέσο της ΓΔ, να δείξετε ότι $\widehat{AMB}=90°$.

4 Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε τις κάθετες από τις κορυφές Α και Γ στη ΒΔ. Να δείξετε ότι το ΑΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

5 Στις πλευρές ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ και στις πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τα σημεία Η, Θ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΗ=ΓΘ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΗΕΘΖ είναι παραλληλόγραμμο.

6 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Θ, Ζ, Η των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, ώστε το τετράπλευρο ΕΘΖΗ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΓΖ και ΑΗ=ΓΘ.

7 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από το κέντρο του Κ φέρουμε τυχαία ευθεία που τέμνει τις απέναντι πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΚΗ=ΚΘ.

8 Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών παραλληλογράμμου είναι παράλληλες, ενώ οι διχοτόμοι των διαδοχικών γωνιών είναι κάθετες.

9 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Μια ευθεία ε παράλληλη προς τη ΒΔ τέμνει τις ευθείες ΑΒ, ΓΔ, ΒΓ και ΑΔ στα σημεία Κ, Μ, Λ και Ν αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΚΜ=ΛΝ και ΚΛ=ΜΝ.

10 Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήματα ΒΕ και ΑΖ τέτοια ώστε ΒΕ=ΑΖ=ΒΓ. Αν οι ΕΓ και ΖΔ τέμνονται στο Η, να αποδείξετε ότι $\widehat{H}=90°$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=α και ΒΓ=β. Στην προέκταση της ΑΒ προς το Β θεωρούμε σημείο Ε και χαράσουμε την ΕΓ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΔ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι αν ΒΕ=α, τότε ΔΖ=β και αν ΒΕ=β, τότε ΔΖ=α.

2 Δίνεται εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ του οποίου οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες. Να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΕΔ και ΒΓ//ΕΖ.

3 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και τυχαίο σημείο Κ της ΒΓ. Από το Κ φέρουμε τις παράλληλες προς τις ΑΒ και ΑΓ, που τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα στα σημεία Η και Ζ. Να αποδείξετε ότι ΑΒ<ΚΖ+ΚΗ<ΑΓ.

4 Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΑΒ. Φέρουμε στα σημεία Α και Β εκατέρωθεν της ΑΒ τις εφαπτόμενες Αx και Βy και παίρνουμε σ' αυτές τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΑΕ=ΒΖ=ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο και $Z\hat{A}E = 135°$.

5 Από σημείο Μ εξωτερικό κύκλου (Ο,R) φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ και ΜΒ αυτού. Η διάμετρος του κύκλου που είναι κάθετη στην ΟΜ, τέμνει τις ευθείες ΜΑ και ΜΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν η ευθεία ΑΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

6 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Δ τυχαίο σημείο της ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΓΔ και η ΕΔ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το Ζ είναι μέσο της ΕΔ.

7 Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ε το μέσο της ΑΔ. Στο Ε φέρουμε μια ευθεία κάθετη στη ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΒΖ=ΔΖ+ΔΓ.

8 Αν δύο διχοτόμοι τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

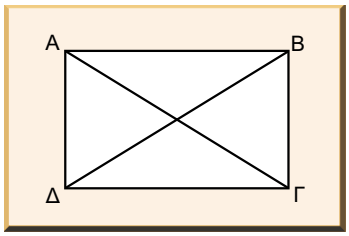
5.2 Είδη παραλληλογράμμων

Η διάκριση των παραλληλογράμμων σε είδη στηρίζεται στις σχέσεις των πλευρών και των γωνιών μεταξύ τους.

Ορθογώνιο

Ορισμός

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.



Στη συνέχεια θα δούμε τις βασικές ιδιότητες του ορθογωνίου.

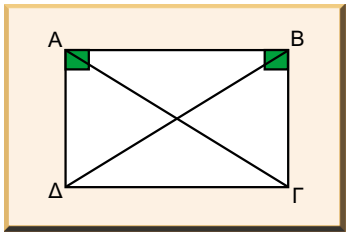
Πόρισμα 5.5

Το ορθογώνιο έχει όλες τις γωνίες ορθές.

Θεώρημα 5.8

Στο ορθογώνιο οι διαγώνιες είναι ίσες.

Απόδειξη



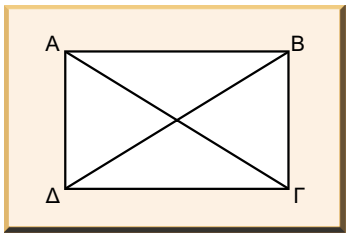
Έστω το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Αν φέρουμε τις διαγώνιές του ΑΓ και ΒΔ, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΒ έχουν τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ ίσες (ως ορθές), την πλευρά ΑΒ κοινή και ΑΔ=ΒΓ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου). Σύμφωνα με το 1° κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π), τα τρίγωνα είναι ίσα και επομένως ΑΓ=ΒΔ. ■

Θεώρημα 5.9

Αντίστροφο του θεωρήματος 5.8

Ένα παραλληλόγραμμο που έχει ίσες τις διαγώνιές του, είναι ορθογώνιο.

Απόδειξη



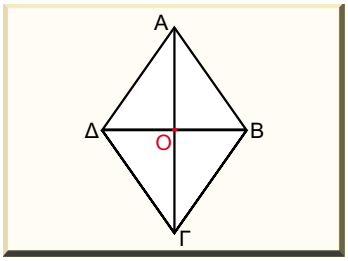
Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ίσες τις διαγώνιές του ΑΓ και ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ έχουν την ΑΒ κοινή, ΑΓ=ΒΔ και ΒΓ=ΑΔ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου). Άρα σύμφωνα με το 3° κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Π-Π), τα τρίγωνα είναι ίσα

οπότε οι γωνίες $\widehat{ΑΒΓ}$ και $\widehat{ΔΑΒ}$ είναι ίσες. Αυτές όμως οι γωνίες είναι και παραπληρωματικές, άρα είναι ορθές, οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. ■

Ρόμβος

Ορισμός

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες μεταξύ τους.



Άμεσες συνέπειες του ορισμού αυτού και των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων είναι τα παρακάτω πορίσματα:

Πόρισμα 5.6

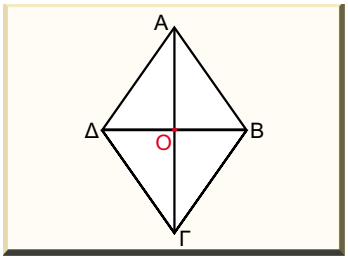
Ο ρόμβος έχει όλες οι πλευρές του ίσες μεταξύ τους.

Πόρισμα 5.7

Αν ένα τετράπλευρο έχει όλες τις πλευρές του ίσες, τότε είναι ρόμβος.

Θεώρημα 5.10

Οι διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα.



Απόδειξη

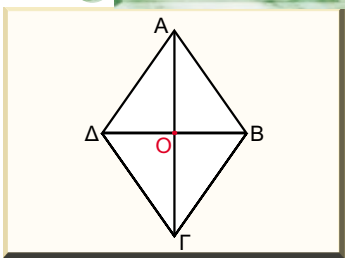
Στο ρόμβο ΑΒΓΔ φέρουμε τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ, που τέμνονται στο Ο. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΟ ως διάμεσος είναι και ύψος του. Άρα οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα. ■

Πόρισμα 5.8

Οι διαγώνιες του ρόμβου είναι άξονες συμμετρίας του.

Θεώρημα 5.11

Οι διαγώνιες του ρόμβου είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.



Απόδειξη

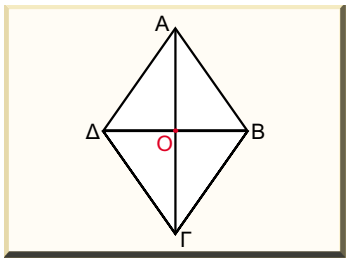
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ η διάμεσος ΑΟ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Α}$. Ομοίως οι διάμεσοι ΔΟ, ΓΟ και ΒΟ είναι και διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{Δ}$, $\widehat{Γ}$ και $\widehat{Β}$ αντίστοιχα. ■

Θεώρημα 5.12

Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει κάθετες διαγώνιες, τότε είναι ρόμβος.

Απόδειξη

Στο τρίγωνο ΑΔΒ το ΑΟ είναι ύψος (ΑΓ⊥ΒΔ) και διάμεσος (ΟΔ=ΟΒ). Άρα το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές με ΑΔ=ΑΒ. Δηλαδή, το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. ■

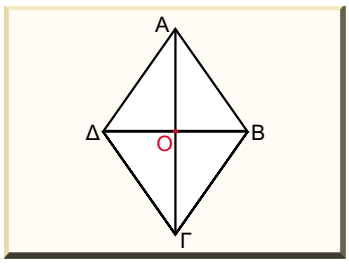


Θεώρημα 5.13

Αν σ' ένα παραλληλόγραμμο μια διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

Απόδειξη

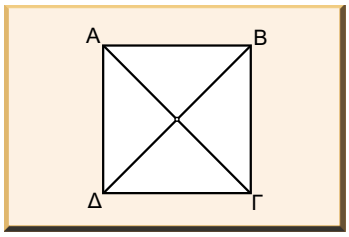
Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη διαγώνιο ΑΓ που διχοτομεί τη γωνία Α. Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΟ είναι διχοτόμος και διάμεσος (ΟΔ=ΟΒ). Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΑΔ=ΑΒ. Οπότε, το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. ■



Τετράγωνο

Ορισμός

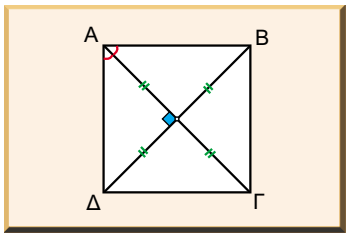
Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι και ορθογώνιο και ρόμβος.



Το τετράγωνο λοιπόν έχει συγκεντρωτικά όλες τις χαρακτηριστικές ιδιότητες του παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου και του ρόμβου. Συνεπώς:

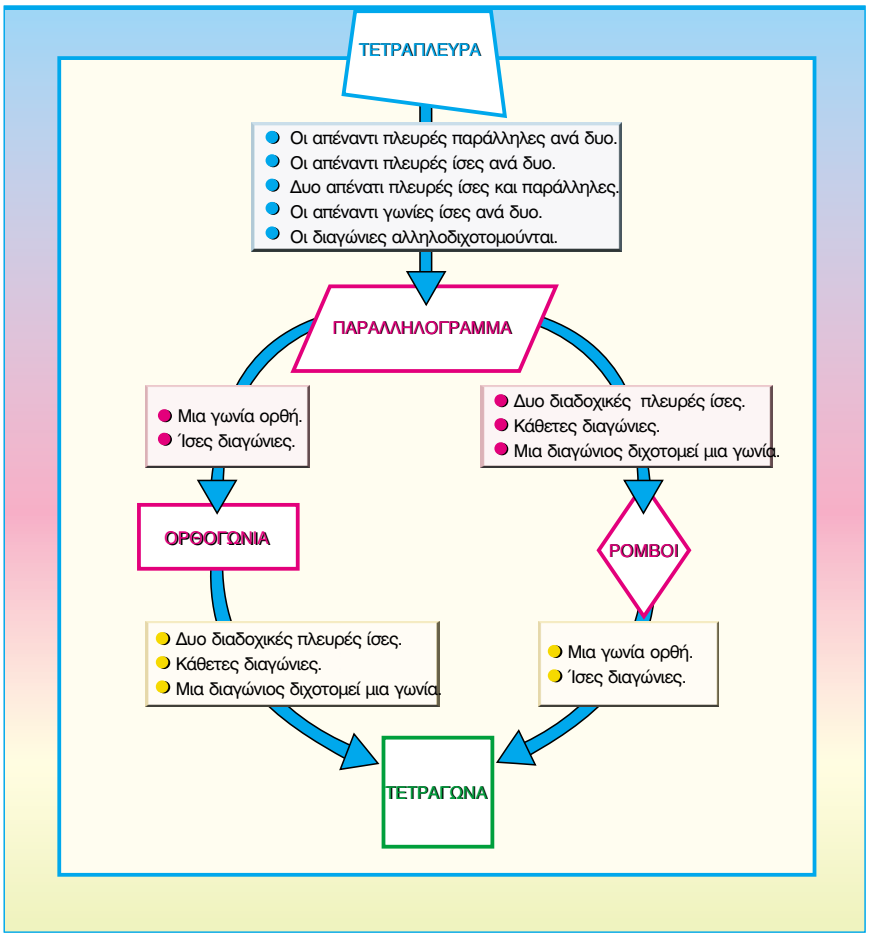
Πόρισμα 5.9

Οι διαγώνιες τετραγώνου είναι ίσες μεταξύ τους, τέμνονται κάθετα, είναι διχοτόμοι των γωνιών του και άρα είναι άξονες συμμετρίας του.



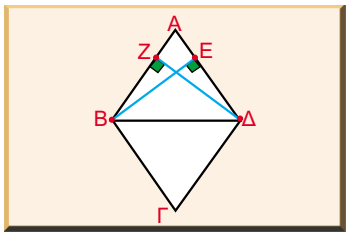
Ταξινόμηση των παραλληλογράμμων

Από όλα τα τετράπλευρα επιλέξαμε να μελετήσουμε εκείνα που έχουν τις απέναντι πλευρές τους ανά δύο παράλληλες. Περιοριστήκαμε δηλαδή σε ένα γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των τετραπλεύρων, το σύνολο των παραλληλογράμμων. Στη συνέχεια από όλα τα παραλληλόγραμμα περιοριστήκαμε σ' εκείνα που έχουν μία τουλάχιστον ορθή γωνία (ορθογώνια) και σ' εκείνα που έχουν δύο διαδοχικές πλευρές ίσες (ρόμβοι). Το σύνολο των ορθογωνίων και το σύνολο των ρόμβων αποτελούν γνήσια υποσύνολα του συνόλου των παραλληλογράμμων. Η τομή των δύο αυτών υποσυνόλων είναι το σύνολο των τετραγώνων. Το διάγραμμα που ακολουθεί μας δείχνει παραστατικά αυτή την ταξινόμηση.



1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες και αντιστρόφως.



Απόδειξη

Έστω ΒΕ και ΔΖ οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Αν ΒΕ=ΔΖ, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΑ και ΑΖΔ είναι ίσα, γιατί έχουν $\widehat{A}$ κοινή και ΒΕ=ΔΖ.

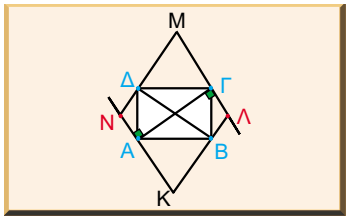
Επομένως ΑΒ=ΑΔ, που σημαίνει ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

Αντιστρόφως, αν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΑ και ΑΖΔ είναι ίσα, γιατί έχουν ΑΒ=ΑΔ και $\widehat{A}$ κοινή.

Επομένως ΒΕ=ΔΖ.

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι οι κάθετες στις διαγώνιους ορθογωνίου, που διέρχονται από τα άκρα τους σχηματίζουν ρόμβο.



Απόδειξη

Το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, άρα οι διαγώνιές του είναι ίσες, οπότε ΑΓ=ΒΔ. Εξάλλου ΚΛ//ΜΝ (ως κάθετες στη ΔΒ) και ΚΝ//ΛΜ (ως κάθετες στην ΑΓ). Το ΚΛΜΝ είναι λοιπόν παραλληλόγραμμο και οι αποστάσεις ΑΓ, ΒΔ των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Άρα σύμφωνα με την προηγούμενη εφαρμογή (εφαρμογή 1), το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

5.3 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Έχουμε τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Να τα τοποθετήσετε κατάλληλα το ένα δίπλα στο άλλο. Τι είδους τετράπλευρο μπορείτε να κατασκευάσετε;

5.4 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ο αγρότης της εικόνας θέλει να ελέγξει αν το χωράφι του ΑΒΓΔ είναι σχήματος ορθογωνίου. Το μόνο όργανο μέτρησης που διαθέτει είναι μία ταινία μέτρησης μήκους. Με τις γνώσεις σας, να του υποδείξετε τι μετρήσεις πρέπει να κάνει. Ποια αποτελέσματα θα τον οδηγήσουν στο συμπέρασμα ότι πράγματι το χωράφι είναι ορθογώνιο;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Να εξηγήσετε γιατί ένα κυρτό τετράπλευρο με 3 ορθές γωνίες είναι ορθογώνιο;

2 Ένας ρόμβος έχει δύο απέναντι γωνίες παραπληρωματικές. Να δικαιολογήσετε γιατί είναι τετράγωνο.

3 Αν η περίμετρος ενός ρόμβου είναι τετραπλάσια μιας διαγωνίου του, τότε να εξηγήσετε γιατί μία γωνία του ρόμβου είναι 60°.

4 Ποια από τις ιδιότητες έχει το τετράγωνο και δεν είναι βέβαιο ότι έχει ο ρόμβος;

5 Αν σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=270°$, τότε αυτό είναι ορθογώνιο;

6 Ποια από τα παρακάτω σχήματα έχουν ίσες διαγώνιες;
α) παραλληλόγραμμο,
β) ορθογώνιο,
γ) ρόμβος,
δ) τετράγωνο.

7 Ποια παραλληλόγραμμα έχουν κέντρο συμμετρίας και ποια άξονες συμμετρίας;

8 Υπάρχει τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες, που να μην είναι ρόμβος;

9 Αν σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΑΓ σχηματίζει με κάθε πλευρά γωνία 45°, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι αυτό;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, προεκτείνουμε τη ΒΔ εκατέρωθεν και παίρνουμε τμήματα $ΒΖ=ΔΘ=\frac{1}{2}ΑΓ$, προεκτείνουμε και την ΑΓ εκατέρωθεν και παίρνουμε τμήματα $ΑΕ=ΓΗ=\frac{1}{2}ΒΔ$. Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο.

2 Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τυχαίο τμήμα ΓΕ. Προεκτείνουμε επίσης τη ΒΓ κατά τμήμα ΒΗ=ΔΕ και κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΕΖΗ. Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο ΑΕΖΗ είναι τετράγωνο.

3 Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με ΒΔ<ΑΓ και στην ΑΓ παίρνουμε τμήματα ΑΚ=ΓΜ. Αν στις προεκτάσεις της ΒΔ πάρουμε τμήματα ΒΛ=ΔΝ, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

4 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΑΓ=2ΒΔ. Αν Μ, Ν τα μέσα των ΟΑ, ΟΓ, να αποδείξετε ότι το ΒΜΔΝ είναι ορθογώνιο.

5 Αν μια γωνία ρόμβου είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι η περίμετρός του είναι τετραπλάσια της μικρής διαγωνίου του.

6 Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΒ τετραγώνου κατά ΑΕ, ΒΖ αντίστοιχα ώστε ΑΕ=ΒΖ. Να αποδείξετε ότι ΑΖ=ΔΕ και ΑΖ⊥ΔΕ.

7 Με πλευρές τις πλευρές ΒΓ, ΓΔ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΕ, ΔΓΖ εκτός αυτού. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.

8 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΖ, από τα οποία το ΑΒΕ είναι εσωτερικό και το ΒΓΖ εξωτερικό. Να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

9 Έστω ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έξω απ' αυτό κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ και ΔΑΘ. Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο.

10 Αν Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ και η ΑΜ τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο Κ, να αποδείξετε ότι $K\widehat{B}A = 135°$.

11 Αν ΑΒ, ΓΔ δύο κάθετες διάμετροι ενός κύκλου (Ο,R), να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α, Β, Γ, Δ σχηματίζουν τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΔ>ΑΓ. Στη ΒΔ έχουμε δύο σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $ΔΕ = ΒΖ = \frac{ΑΓ}{2}$ και στην ΑΓ δύο σημεία Η και Θ τέτοια ώστε $ΑΘ = ΓΗ = \frac{ΒΔ}{2}$. Να αποδείξετε ότι το ΕΗΖΘ είναι ορθογώνιο.

2 Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και Ε σημείο του τμήματος ΔΟ. Από το Β φέρουμε κάθετη στην ΑΕ που τέμνει την ΑΟ το Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ=ΑΕ. β) ΓΖ=ΒΕ.

3 Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο είναι $A\widehat{O}B = 130°$. Αν ΔΗ⊥ΑΓ, να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της $H\widehat{Δ}O$ σχηματίζει με τις ΑΔ, ΑΒ ισοσκελές τρίγωνο.

4 Αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, να αποδείξετε ότι είναι ίσα.

5 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό.

6 Αν Δ σημείο της προέκτασης της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι η διαφορά των αποστάσεων του Δ από τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ είναι σταθερή.

7 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων κάθε εσωτερικού σημείου ισοπλεύρου τριγώνου από τις πλευρές του είναι σταθερό.

8 α) Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών παραλληλογράμμου σχηματίζουν ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ορθογωνίου σχηματίζουν τετράγωνο.

9 α) Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών παραλληλογράμμου σχηματίζουν ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών ορθογωνίου σχηματίζουν τετράγωνο.

10 Από ένα σημείο Α μιας ευθείας x΄x φέρουμε μια ημιευθεία Ay. Και από ένα σημείο Β της Ay φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΒΓ και ΒΔ προς τις διχοτόμους της γωνίας $x'\widehat{A}y$ και $y\widehat{A}x$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α) Το ΒΔΑΓ είναι ορθογώνιο.

β) Η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και είναι παράλληλη προς τη x΄x.

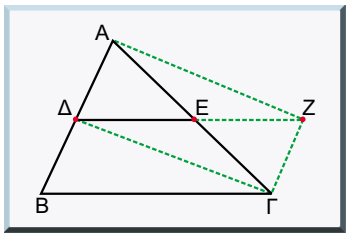
5.3 Εφαρμογές ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων

Θεώρημα 5.14

Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΕ κατά ΕΖ=ΕΔ. Το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιές του διχοτομούνται, άρα ΓΖ//ΑΔ και ΓΖ=ΑΔ. Όμως ΑΔ=ΔΒ, οπότε ΓΖ//ΔΒ και ΓΖ=ΒΔ. Επομένως και το τετράπλευρο ΒΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι πλευρές του ΔΒ και ΓΖ είναι ίσες και παράλληλες. Άρα ΔΖ//ΒΓ και ΔΖ=ΒΓ.



Τελικά ισχύει ΔΕ//ΒΓ και $ΔΕ = \frac{1}{2}ΔΖ = \frac{1}{2}ΒΓ$. ■

Πόρισμα 5.10

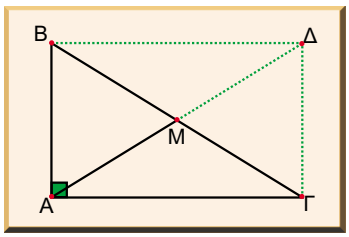
Κάθε ευθεία, που άγεται από το μέσο μιας πλευράς τριγώνου και είναι παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, θα διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.

Θεώρημα 5.15

Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα τη ΒΓ και ΑΜ η διάμεσος του. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά ΜΔ=ΜΑ. Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο διότι διχοτομούνται οι διαγώνιές του. Έχει όμως και μια ορθή γωνία την $\widehat{A}$. Συνεπώς το ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο.

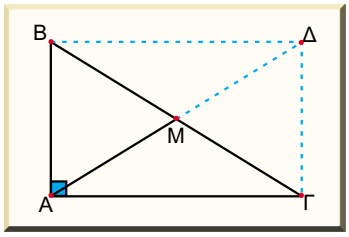


Άρα ΑΔ=ΒΓ ή 2ΑΜ=ΒΓ ή $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ ■

Θεώρημα 5.16

Αν μία διάμεσος τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Απόδειξη



Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος ΑΜ αυτού για την οποία ισχύει $ΑΜ = \frac{1}{2}ΒΓ$. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά ΜΔ=ΜΑ. Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο διχοτομούνται οι διαγώνιοί του και ΑΔ=2ΑΜ=ΒΓ. Έχει, λοιπόν, ίσες διαγώνιες, άρα είναι ορθογώνιο. Συνεπώς $\widehat{ΒΑΓ} = 90°$. ■

Πόρισμα 5.11

Αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει μία γωνία 30°, τότε η απέναντι πλευρά της θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

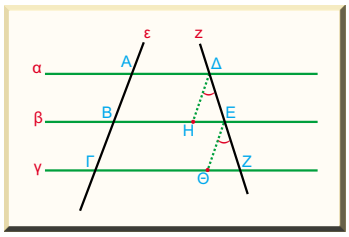
Πόρισμα 5.12

Αν σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο μία πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, τότε η απέναντι γωνία της είναι 30°.

Θεώρημα 5.17

Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μια ευθεία ίσα τμήματα, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Απόδειξη



Έστω οι τρεις παράλληλες ευθείες α, β, γ, που τέμνονται από τις ευθείες ε και z. Έστω ακόμη ότι ΑΒ=ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι ΔΕ=ΕΖ.

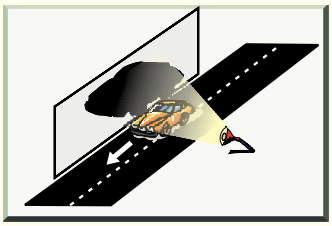
Από τα σημεία Δ και Ε φέρουμε παράλληλες προς την ευθεία ε, οπότε και σχηματίζονται τα παραλληλόγραμμα ΑΔΗΒ και ΒΕΘΓ. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες, άρα ΔΗ=ΑΒ και ΕΘ=ΒΓ. Επομένως ΔΗ=ΕΘ. Τα τρίγωνα ΔΗΕ και ΕΘΖ έχουν ΔΗ=ΕΘ, $\widehat{Δ} = \widehat{Ε}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά) και $\widehat{ΔΕΗ} = \widehat{ΕΖΘ}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε ΔΕ=ΕΖ. ■

5.5 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Τέμνουμε ένα τρίγωνο με μια ευθεία. Πώς πρέπει να γίνει η τομή, ώστε τα δύο σχήματα που θα προκύψουν τοποθετούμενα το ένα δίπλα στο άλλο κατάλληλα, να δίνουν ένα παραλληλόγραμμο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

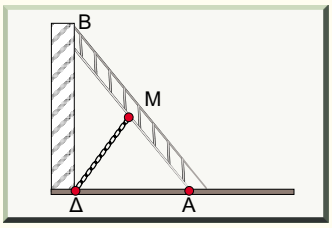
5.6 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στη μία πλευρά ενός δρόμου υψώνεται ένας τοίχος και στην άλλη πλευρά βρίσκεται ένας προβολέας ο οποίος στοχεύει τον τοίχο. Πάνω στο δρόμο και στο μέσο της απόστασης προβολέα-τοίχου κινείται ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα 68 km/h. Με ποια ταχύτητα κινείται η σκιά του πάνω στον τοίχο;



5.7 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

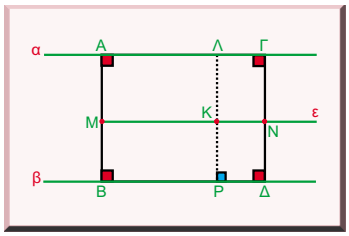
Ένας τεχνίτης ακούμπησε μια σκάλα ΑΒ σε κατακόρυφο τοίχο ΔΒ όπως στο σχήμα. Για καλύτερη στήριξη έδεσε μια αλυσίδα από το μέσο της Μ στη βάση Δ του τοίχου. Να ερευνήσετε και να εξηγήσετε αν η αλυσίδα προσφέρει πρόσθετη βοήθεια στη σκάλα για να μη γλιστρήσει.



Πρόβλημα 5.1

Να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων που ισαπέχουν από δύο ευθείες.

α) Έστω α και β δύο παράλληλες ευθείες. Για να ισαπέχει ένα σημείο από τις α και β θα πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των παράλληλων αυτών. Αν το τμήμα ΑΒ είναι κάθετο στις ευθείες, ένα από τα ζητούμενα σημεία είναι το μέσο Μ του ΑΒ. Αν ΓΔ ένα άλλο τμήμα κάθετο στις α και β, τότε και το μέσο του Ν ισαπέχει από τις ευθείες αυτές. Ακόμη το ΑΓΝΜ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί ΜΑ//ΝΓ (κάθετα στην α) και ΜΑ=ΝΓ (μισά των ίσων αποστάσεων ΑΒ και ΓΔ). Άρα κάθε σημείο που ισαπέχει από τις α και β ανήκει σε μία ευθεία ε που άγεται από το Μ παράλληλη προς τις ευθείες αυτές.



Αντιστρόφως:

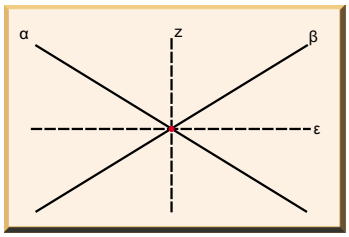
Έστω Κ τυχαίο σημείο της ευθείας ε και ΚΛ, ΚΡ οι αποστάσεις του από τις α και β. Λόγω των παραλληλογράμμων ΑΜΚΛ και ΜΒΡΚ, έχουμε ΚΛ=ΜΑ=ΜΒ=ΚΡ. Άρα κάθε σημείο της ε έχει την ιδιότητα να ισαπέχει από τις ευθείες α και β.

Επομένως, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία ε.

Παρατήρηση

Η ευθεία αυτή ονομάζεται **μεσοπαράλληλη** των ευθειών α και β.

β) Έστω α και β δύο τεμνόμενες ευθείες. Για κάθε μία από τις τέσσερις σχηματιζόμενες γωνίες γνωρίζουμε ότι τα σημεία της διχοτόμου της και μόνο αυτά ισαπέχουν από τις πλευρές της. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι τα μόνα σημεία που το καθένα ισαπέχει από τις α και β είναι ο "σταυρός" των διχοτόμων, δηλαδή οι ευθείες ε και z. Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι οι ευθείες ε και z.

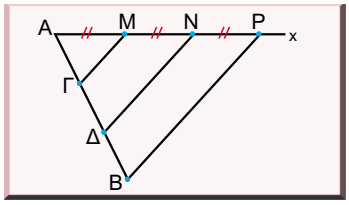


Πρόβλημα 5.2

Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα.

Κατασκευή

Από το σημείο Α φέρουμε μια ημιευθεία Αx και σ' αυτήν παίρνουμε τα τμήματα ΑΜ=ΜΝ=ΝΡ. Από τα σημεία Μ και Ν φέρουμε παράλληλες προς τη ΡΒ που τέμνουν το ΑΒ στα Γ και Δ αντίστοιχα. Προφανώς ΑΓ=ΓΔ=ΔΒ, άρα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ διαιρέθηκε σε τρία ίσα τμήματα, τα ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ.



Σημείωση:

Με την ίδια διαδικασία είναι δυνατό να χωρίσουμε σε ν ίσα τμήματα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

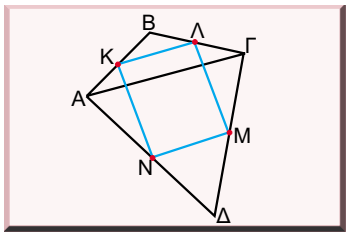
Να αποδειχτεί ότι τα μέσα των πλευρών κάθε κυρτού τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου

Απόδειξη

Έστω Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ του κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ οπότε: Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ, άρα ΚΛ//ΑΓ και $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$.

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι ΜΝ//ΑΓ και $ΜΝ = \frac{ΑΓ}{2}$.

Επομένως ισχύει ΚΛ//ΜΝ και ΛΜ=ΜΝ, άρα το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν από μια οξεία γωνία ίση και ίσες τις διαμέσους προς την υποτείνουσα. Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα.

2 Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία είναι τριπλάσια από τη μικρότερη. Να εξηγήσετε γιατί η μεγαλύτερη πλευρά είναι διπλάσια από τη μικρότερη.

3 Η ευθεία που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι μεσοκάθετη του ύψους που αντιστοιχεί στην τρίτη πλευρά.

4 Τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου και μία κορυφή του, τι είδους τετράπλευρο ορίζουν;

5 Αν με διάμετρο την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου γράψουμε κύκλο, η τρίτη κορυφή θα είναι σημείο του κύκλου;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Αν Κ, Λ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι οι ΑΚ και ΓΛ τριχοτομούν τη ΒΔ.

2 Να αποδείξετε ότι σε κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα τμήματα, που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του, έχουν κοινό μέσο.

3 Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα $ΒΔ = \frac{ΑΒ}{2}$. Αν Ε είναι το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι η ΒΓ διχοτομεί τη ΔΕ.

4 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ, ΓΕ τα ύψη του. Αν Μ το μέσο της ΒΓ και Κ το μέσο της ΔΕ, να δείξετε ότι $ΜΚ \perp ΕΔ$.

5 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με την περίμετρο του ορθογωνίου ΚΛΜΑ αυξημένη κατά το άθροισμα των διαγωνίων ΑΛ και ΚΜ.

6 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τη ΒΓ.

7 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ η διάμεσός του και Δ το μέσο της ΑΜ. Αν η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ε, τότε να αποδείξετε ότι ΓΑ=3ΑΕ.

8 Σε τρίγωνο ΑΒΓ, Μ, Ε, Δ και Ζ είναι τα μέσα των ΒΓ, ΒΜ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΕΖ//ΑΒ και ΑΒ=4ΖΕ.

9 Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που έχει κορυφές τα μέσα δύο απέναντι πλευρών κυρτού τετραπλεύρου και τα μέσα των διαγωνίων του είναι παραλληλόγραμμο.

10 Αν Ε, Ζ οι προβολές των κορυφών Α, Γ ορθογωνίου ΑΒΓΔ στη διαγώνιο ΒΔ αυτού αντίστοιχα, και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΕΜ \perp ΖΝ$.

11 Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ρόμβου είναι κορυφές ορθογωνίου, ενώ τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και στις πλευρές του ΑΔ και ΔΓ παίρνουμε τμήματα ΑΚ=ΔΛ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΚΛ και ΒΛ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΜΝ⊥ΑΛ.

2 Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και θεωρούμε τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΚ=ΜΓ και ΛΓ=ΑΝ. Να δείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο και ότι:
ΚΛ+ΛΜ+ΜΝ+ΝΚ≥2ΒΔ

3 Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με διαγώνιες κάθετες και ίσες. Να αποδείξετε ότι τα συμμετρικά ενός σημείου Κ ως προς τα μέσα των πλευρών του είναι κορυφές τετραγώνου.

4 Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και ορθή γωνία $x\hat{\Delta}y$, που οι πλευρές της τέμνουν τους φορείς των ΑΒ, ΒΓ στα σημεία Ε, Ζ. Να δείξετε ότι η ΑΓ διχοτομεί το τμήμα ΕΖ.

5 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ>ΑΒ και Μ το μέσο της ΒΓ. Αν Δ είναι η ορθή προβολή του Β στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, να αποδείξετε ότι ΔΜ//ΑΓ και $\Delta M = \frac{A\Gamma - AB}{2}$.

6 Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αντίστοιχα με ΒΔ>ΑΓ, να δείξετε ότι ΕΖ<ΒΔ.

7 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Α. Αν Δ, Ε μεταβλητά σημεία των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΔ=ΓΕ, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου του ΔΕ.

8 Να κατασκευάσετε τρίγωνο, του οποίου τα μέσα των πλευρών να είναι τρία δοθέντα μη συνευθειακά σημεία.

9 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 60°$ και $AB = \frac{B\Gamma}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.

10 Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ και Κ, Λ τα κέντρα των δύο τετραγώνων, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

5.4 Τραπέζια

Τραπέζιο ονομάζουμε το τετράπλευρο που έχει δύο μόνο απέναντι πλευρές παράλληλες.

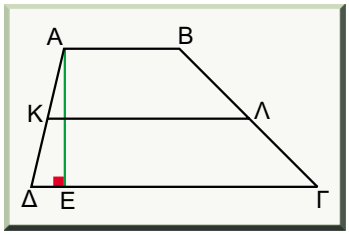
Ορισμός

Στοιχεία τραπεζίου:

Βάσεις ενός τραπεζίου ονομάζονται οι δύο παράλληλες πλευρές. Στο σχήμα βάσεις είναι οι ΑΒ και ΓΔ.

Ύψος ενός τραπεζίου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις βάσεις και είναι κάθετο σ' αυτές. Στο σχήμα ύψος είναι το ΑΕ.

Διάμεσος ενός τραπεζίου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών. Στο σχήμα διάμεσος είναι η ΚΛ.

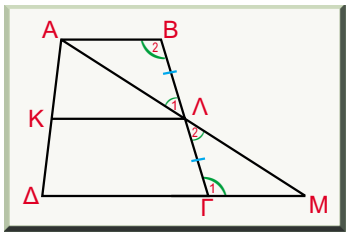


Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Θεώρημα 5.18

Απόδειξη

Έστω το τραπέζιο ΑΒΓΔ και η διάμεσος ΚΛ αυτού. Προεκτείνουμε την ΑΛ η προέκταση της οποίας τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Μ. Τα τρίγωνα ΑΒΛ και ΜΓΛ έχουν ΒΛ=ΛΓ, $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (ως εντός εναλλάξ) και $\widehat{\Lambda}_1 = \widehat{\Lambda}_2$ (ως κατακορυφήν). Σύμφωνα με το 2^{ο} κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ-Π-Γ), είναι ίσα άρα ΑΛ=ΛΜ και ΑΒ=ΓΜ. Συνεπώς το Λ είναι μέσο του ΑΜ.



Στο τρίγωνο ΑΔΜ το ΚΛ ενώνει τα μέσα των ΑΔ και ΑΜ, άρα σύμφωνα με το θεώρημα 5.14 είναι ΚΛ//ΔΜ και ακόμη

$$\text{ΚΛ} = \frac{1}{2}\text{ΔΜ} = \frac{1}{2}(\text{ΔΓ} + \text{ΓΜ}) = \frac{1}{2}(\text{ΔΓ} + \text{ΑΒ})$$ ■

Η διάμεσος ενός τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα των διαγωνίων του.

Πόρισμα 5.13

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα τραπέζια στα οποία οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

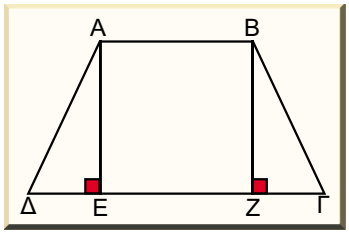
Ορισμός

Ισοσκελές τραπέζιο ονομάζεται το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.

Θεώρημα 5.19

Οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες και αντιστρόφως.

Απόδειξη



Έστω το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις τις ΑΒ και ΓΔ. Φέρουμε τις ΑΕ και ΒΖ κάθετες στη ΓΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ορθογώνια έχουν ίσες υποτείνουσες ΑΔ=ΒΓ και από μία κάθετη πλευρά ίση ΑΕ=ΒΖ (σαν κάθετα τμήματα μεταξύ παραλλήλων), οπότε είναι ίσα, άρα $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$.

Αντιστρόφως, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ έχουν ΑΕ=ΒΖ και $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$, οπότε είναι ίσα άρα ΑΔ=ΒΓ. ■

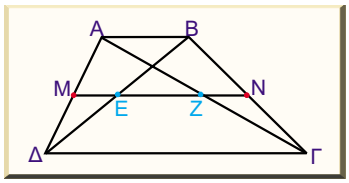
5.8 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Τέμνουμε ένα τρίγωνο με μια ευθεία έτσι, ώστε να προκύψουν ένα τετράπλευρο και ένα τρίγωνο. Να γράψετε τις προϋποθέσεις, που αφορούν το είδος του αρχικού τριγώνου και τη σχετική θέση της ευθείας, ώστε το τετράπλευρο να είναι: α) τραπέζιο και β) ισοσκελές τραπέζιο.

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχτεί ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου είναι παράλληλο προς τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά τους.

Απόδειξη



Η διάμεσος ΜΝ του τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνει τις διαγώνιές του ΑΓ και ΒΔ στα σημεία Ζ και Ε αντίστοιχα και γνωρίζουμε ότι τα Ζ, Ε είναι μέσα των διαγωνίων. Επίσης ΜΝ//ΑΒ//ΔΓ οπότε και ΕΖ//ΑΒ//ΔΓ.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ΜΕ//ΑΒ και $ΜΕ = \frac{ΑΒ}{2}$ (1)

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε ΜΖ//ΔΓ και $ΜΖ = \frac{ΔΓ}{2}$ (2)

Από τις προηγούμενες σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$ΕΖ = ΜΖ - ΜΕ = \frac{ΔΓ}{2} - \frac{ΑΒ}{2} \quad ή \quad ΕΖ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Να εξηγήσετε γιατί αποκλείεται δύο απέναντι γωνίες ενός τραπεζίου να είναι ίσες.

2 Να εξηγήσετε γιατί δεν μπορούν να υπάρχουν τρεις ίσες γωνίες σ' ένα τραπέζιο.

3 Να εξηγήσετε για ποιο λόγο η τομή των διαγωνίων ενός τραπεζίου δεν ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του.

4 Γράψτε μια ιδιότητα, που είναι κοινή στο ισοσκελές τραπέζιο και στο ορθογώνιο.

5 Να αποδείξετε ότι η διαφορά της μικρής βάσης ενός τραπεζίου από τη διάμεσο ισούται με τη διαφορά της διαμέσου απ' τη μεγάλη βάση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Αν η μεγαλύτερη βάση ΑΒ ενός τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίση με το άθροισμα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ, ΒΓ, να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Γ}$ και $\hat{Δ}$ τέμνονται σε σημείο της ΑΒ.

2 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ=2ΑΒ και Κ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β είναι τα μέσα των πλευρών ΚΔ, ΚΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΚΔΓ.

3 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διχοτόμους ΒΔ και ΓΕ των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$. Αν ΕΔ//ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

4 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ευθεία ε που διέρχεται από το Α εκτός του παραλληλογράμμου. Αν Ε, Ζ και Η οι προβολές των κορυφών Β, Γ και Δ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
ΒΕ+ΔΗ=ΓΖ.

5 Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΔ=ΑΒ=ΒΓ. Αν η διαγώνιος ΒΔ ισούται με τη μεγάλη βάση ΔΓ, να βρεθούν οι γωνίες του τραπεζίου.

6 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90°$) και ΑΜ η διάμεσός του. Μια ευθεία ε διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ΑΜ. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των Β και Γ από την ε έχουν άθροισμα ίσο με τη ΒΓ.

7 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ευθεία ε αφήνει όλες τις κορυφές του ΑΒΓΔ προς το ίδιο μέρος της. Αν Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Κ΄ οι προβολές των κορυφών και του κέντρου Κ του ΑΒΓΔ στην ε, να αποδείξετε ότι

ΑΑ΄+ΒΒ΄+ΓΓ΄+ΔΔ΄=4ΚΚ΄.

8 Να αποδείξετε ότι αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε έχει ίσες διαγώνιες και αντιστρόφως.

9 Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με μεγάλη βάση ΑΒ. Θεωρούμε τα ύψη ΓΓ΄, ΔΔ΄. Να δείξετε ότι $ΑΔ' = ΒΓ' = \frac{ΑΒ - ΓΔ}{2}$.

10 Αν σε τραπέζιο η μια βάση είναι διπλάσια της άλλης, να δείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{Α}$ και $\widehat{Δ}$ τέμνονται στο Λ και οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$ τέμνονται στο Κ, να αποδείξετε ότι ΚΛ//ΓΔ.

2 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ, ΒΓ είναι κάθετες. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
2ΜΝ=ΔΓ–ΑΒ.

3 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{Β} > \widehat{Γ}$, $\widehat{Β} \neq 90°$, ΑΔ το ύψος του και Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ, Μ, Δ είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.

4 Η βάση ΑΒ ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι τριπλάσια της ΓΔ. Αν Κ, Λ τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΓΔ είναι ορθογώνιο.

5 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ και ΑΔ=ΑΒ+ΓΔ και $\widehat{Β} = \widehat{Γ} = 90°$. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος διαμέτρου ΑΔ εφάπτεται της πλευράς ΒΓ.

6 Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ ισχύει ΑΔ=ΑΒ+ΓΔ. Αν Μ μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι η γωνία $\widehat{ΑΜΔ}$ είναι ορθή.

5.5 Αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου

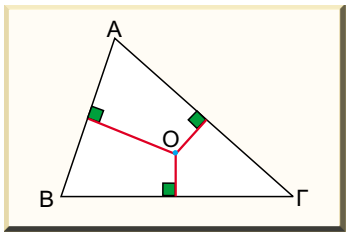
Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε κάποια χαρακτηριστικά σημεία του τριγώνου που έχουν αξιοσημείωτες ιδιότητες.

Θεώρημα 5.20

Σε κάθε τρίγωνο οι μεσοκάθετες των τριών πλευρών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

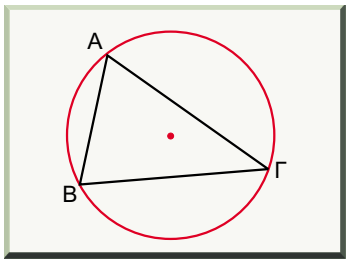
Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις μεσοκάθετες $\mu_{ΒΓ}$ και $\mu_{ΑΓ}$ των πλευρών του ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Αυτές τέμνονται εφόσον είναι κάθετες στις τεμνόμενες ευθείες ΑΓ και ΒΓ και έστω Ο το σημείο τομής τους. Συνεπώς ΟΓ=ΟΒ (διότι το Ο ανήκει στη μεσοκάθετη $\mu_{ΒΓ}$ του ΒΓ) και ΟΓ=ΟΑ (διότι το Ο ανήκει στη μεσοκάθετη $\mu_{ΑΓ}$ του ΑΓ).



Άρα ΟΑ=ΟΒ, που σημαίνει και η μεσοκάθετος του ΑΒ περνά από το Ο. ■

Όπως προκύπτει από την προηγούμενη απόδειξη το σημείο τομής των μεσοκαθέτων ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου. Δηλαδή, οι κορυφές του τριγώνου ανήκουν σ' ένα κύκλο που έχει κέντρο αυτό το σημείο. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου και το κέντρο του ονομάζεται **περίκεντρο** του τριγώνου.

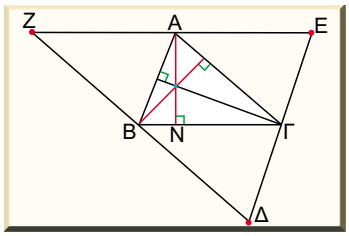


Θεώρημα 5.21

Σε κάθε τρίγωνο οι φορείς των υψών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΝ το ύψος του. Από κάθε κορυφή του φέρουμε μία ευθεία παράλληλη προς την απέναντι πλευρά. Αυτές τέμνονται και σχηματίζουν ένα τρίγωνο το ΔΕΖ. Τα τετράπλευρα ΑΒΓΕ και ΑΖΒΓ που σχηματίστηκε είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΒΓ=ΑΕ και ΒΓ=ΖΑ. Επομένως ΖΑ=ΑΕ, δηλαδή το Α είναι ο μέσο του ΖΕ. Επειδή ΖΕ//ΒΓ και ΑΝ⊥ΒΓ, θα είναι και ΑΝ⊥ΖΕ. Άρα η ΑΝ είναι ο φορέας της μεσοκάθετεw του ΖΕ.



Ομοίως αποδεικνύεται ότι και οι φορείς των άλλων δύο υψών του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεσοκάθετοι των πλευρών ΖΔ και ΔΕ του ΔΕΖ.

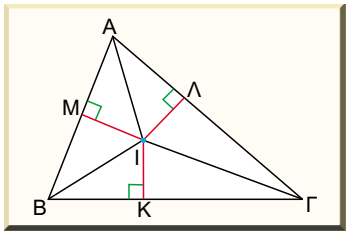
Συνεπώς και τα τρία ύψη του ΑΒΓ, εφόσον είναι μεσοκάθετες των πλευρών του ΔΕΖ, θα διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο ονομάζεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου ΑΒΓ.

Θεώρημα 5.22

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ που τέμνονται, επειδή $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}<180^\circ$ ή $\frac{\widehat{B}}{2}+\frac{\widehat{\Gamma}}{2}<180^\circ$.



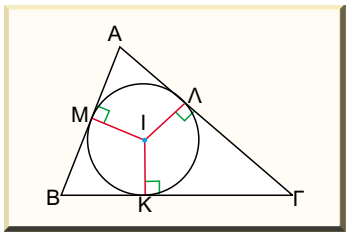
Αν Ι το σημείο τομής τους και ΙΚ, ΙΛ και ΙΜ οι αποστάσεις του Ι από τις πλευρές α, β και γ του τριγώνου τότε

ΙΚ=ΙΜ (διότι το Ι ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{B}$)

ΙΚ=ΙΛ (διότι το Ι ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{\Gamma}$)

Άρα και ΙΜ=ΙΛ, οπότε το Ι ανήκει και στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$ ή αλλιώς η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ διέρχεται από το Ι. ■

Όπως προέκυψε και από την απόδειξη, τα σημεία Κ, Λ, Μ ισαπέχουν από το Ι, άρα είναι σημεία ενός κύκλου κέντρου Ι. Οι ΙΚ, ΙΛ και ΙΜ είναι ακτίνες αυτού του κύκλου και οι ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ εφαπτόμενες (διότι είναι κάθετες στο άκρο ακτίνων).



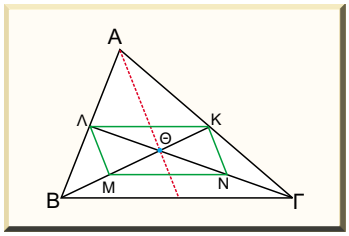
Ο κύκλος αυτός ονομάζεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου ΑΒΓ, υπάρχει πάντοτε και είναι μοναδικός. Το κέντρο του κύκλου αυτού ονομάζεται **έγκεντρο** του τριγώνου.

Θεώρημα 5.23

Σε κάθε τρίγωνο οι διάμεσοι διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και οι δύο διάμεσοί του ΒΚ και ΓΛ. Αυτές τέμνονται, διότι $\widehat{KB\Gamma}+\widehat{\Lambda\Gamma B}<\widehat{B}+\widehat{\Gamma}<180^\circ$ στο σημείο Θ. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΘΒ και ΘΓ αντίστοιχα. Στο τρίγωνο ΘΒΓ έχουμε $MN=\frac{1}{2}B\Gamma$ και MN//ΒΓ.

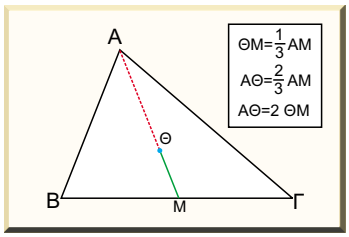


Ακόμη στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $K\Lambda=\frac{1}{2}B\Gamma$ και ΚΛ//ΒΓ.

Άρα ΚΛ=ΜΝ και ΚΛ//ΜΝ και επομένως το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο, που σημαίνει ότι ΚΘ=ΘΜ και ΝΘ=ΘΛ. Συνεπώς $ΘΒ = 2ΘΚ = \frac{2}{3}ΒΚ$ και $ΘΓ = 2ΘΛ = \frac{2}{3}ΓΛ$.

Επομένως, η διάμεσος από την κορυφή Β τέμνει τη διάμεσο από την κορυφή Γ σε σημείο Θ έτσι ώστε $ΓΘ = \frac{2}{3}ΓΛ$. Αυτό το σημείο είναι μοναδικό.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η διάμεσος από το Α τέμνει τη ΓΛ σε σημείο με την ιδιότητα αυτή, επομένως στο ίδιο σημείο Θ. ■



Από την προηγούμενη απόδειξη προέκυψε και μία ιδιότητα του κοινού σημείου των διαμέσων: ότι δηλαδή το σημείο αυτό απέχει από κάθε κορυφή του τριγώνου διπλάσια απόσταση απ' ότι από το μέσο της απέναντι πλευράς. Το κοινό σημείο των τριών διαμέσων ενός τριγώνου ονομάζεται **κέντρο βάρους** ή **βαρύκεντρο**.

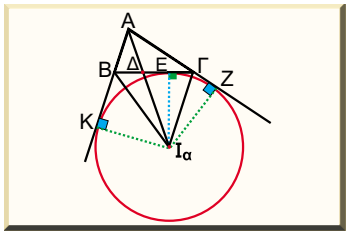
1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδείξετε ότι σ' ένα τρίγωνο η ευθεία της διχοτόμου της γωνίας του $\hat{A}$ και οι ευθείες των διχοτόμων των εξωτερικών γωνιών των $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ διέρχονται απο το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Έστω ότι οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών των $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ τέμνονται σ' ένα σημείο $I_α$(τέμνονται γιατί

$$I_α\hat{B}Γ + I_α\hat{Γ}B = \frac{\hat{A}+\hat{Γ}}{2} + \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{Γ}}{2} < 180^\circ)$$



Το σημείο $I_α$ είναι σημείο της διχοτόμου $ΓI_α$ άρα $I_αZ=I_αE$.

Ομοίως $I_αE=I_αK$.

Άρα $I_αZ=I_αK$ που σημαίνει πως το $I_α$ είναι σημείο και της διχοτόμου ΑΔ μια και ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\hat{A}$. Άρα η εσωτερική διχοτόμος ΑΔ και οι δύο εξωτερικές των απέναντι γωνιών διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Παρατήρηση

Το σημείο $I_α$ λέγεται **παράκεντρο** του τριγώνου ΑΒΓ. Επειδή το παράκεντρο ισαπέχει από τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ο κύκλος που

γράφεται με κέντρο το $I_α$ και ακτίνα την απόσταση του $I_α$ από τη ΒΓ εφάπτεται στην πλευρά ΒΓ και στις προεκτάσεις των ΑΒ και ΑΓ. Ο κύκλος αυτός λέγεται **παρεγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ.

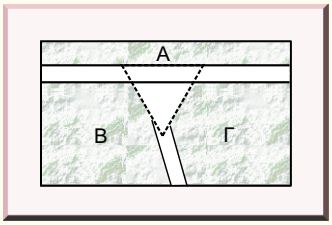
Είναι φανερό ότι έχουμε τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους στο τρίγωνο ΑΒΓ, που καθένας τους εφάπτεται σε μια πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δυο άλλων. Τα κέντρα τους σημειώνονται με $I_α$, $I_β$, $I_γ$ αντίστοιχα.

5.9 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρετε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{Γ}$ καθώς και τις διχοτόμους των εξωτερικών γωνιών του τριγώνου.

5.10 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο σχεδιάγραμμα με πράσινο σημειώνονται τα χωράφια Α, Β, Γ τριών αγροτών και με λευκό χρώμα δύο δρόμοι και μια δημόσια περιοχή στην οποία θα γίνει γεώτρηση για την προμήθεια νερού των χωραφιών. Να σχεδιάσετε ακριβώς τη θέση στην οποία πρέπει να γίνει η γεώτρηση, ώστε να μην αδικηθεί κανένας από τους αγρούς Α, Β και Γ όσον αφορά το κόστος τοποθέτησης σωλήνα από τη γεώτρηση μέχρι το χωράφι.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Να εξηγήσετε γιατί στο ισοσκελές τρίγωνο βαρύκεντρο, έγκεντρο, περίκεντρο και ορθόκεντρο βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

2 Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ορθόκεντρό του να απέχει από κάθε κορυφή απόσταση ίση με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους του αντίστοιχου ύψους;

3 Αν το ορθόκεντρο ενός τριγώνου δε βρίσκεται στο εσωτερικό του, τότε να εξηγήσετε γιατί δε θα βρίσκεται στο εσωτερικό του ούτε το περίκεντρο.

4 Υπάρχει σημείο που να ισαπέχει από τις κορυφές ενός τριγώνου; Αν ναι, ποιο είναι αυτό;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ενώνουμε το Α με τα μέσα Μ, Ν των πλευρών ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Αν οι ΑΜ, ΑΝ τέμνουν τη διαγώνιο ΒΔ στα Ε, Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΕΖ = \frac{ΒΔ}{3}$.

2 Ευθεία ε αφήνει τις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ προς το ίδιο μέρος της. Αν Α΄, Β΄, Γ΄, Θ΄ οι προβολές των κορυφών Α, Β, Γ και του κέντρου βάρους Θ αντίστοιχα στην ε, να αποδείξετε ότι ΑΑ΄+ΒΒ΄+ΓΓ΄=3ΘΘ΄.

3 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90°$). Σε τυχαίο σημείο Δ της ΒΓ φέρουμε σε αυτή, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την προέκταση της ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΒΖ είναι κάθετη στη ΓΕ.

4 Αν Ο το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΑΒΓ και φέρουμε από το Ο τις ΟΔ⊥ΒΓ, ΟΕ⊥ΑΓ και ΟΖ⊥ΑΒ, να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεσοκάθετες των πλευρών του τριγώνου ΔΕΙ.

5 Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις διαμέσους του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ που τέμνονται στο Θ. Αν Λ, Μ τα μέσα των ΒΘ, ΓΘ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το ΖΕΜΛ είναι παραλληλόγραμμο.

6 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, όπου Ο είναι το σημείο τομής των διαμέσων ΑΜ, ΒΝ και ΓΖ. Αν Η είναι το μέσο της ΟΓ και φέρουμε τη ΒΗ, να αποδείξετε ότι τέμνει την ΑΜ στο Ε έτσι ώστε $ΟΕ = \frac{2}{9}ΑΜ$.

7 Προεκτείνουμε το ύψος ΒΔ τριγώνου ΑΒΓ κατά ΒΕ=ΒΔ. Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΓΔ, να αποδείξετε ότι η κάθετη από το Μ στην ΑΒ και η κάθετη από το Α στην ΕΓ τέμνονται σε σημείο της ΒΔ.

8 Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι γωνίες $\widehat{Β}$, $\widehat{Δ}$ είναι ορθές. Αν $Α_1$, $Α_2$ τα συμμετρικά του Α ως προς Β, Δ αντίστοιχα και Μ το μέσο του $Α_1Α_2$, να αποδείξετε ότι ΜΓ⊥ΔΒ.

9 Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε το μέσο Ε της πλευράς ΑΒ και έστω Ζ το σημείο τομής της ΔΕ με τη διαγώνιο ΑΓ. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του Ζ από το μέσο της ΑΓ είναι ίση με $\frac{1}{6}ΑΓ$.

10 α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία, που περνά από τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ, διχοτομεί τη διάμεσο ΑΔ του τριγώνου.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ έχει το ίδιο βαρύκεντρο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

11 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $μ_β = μ_γ$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

12 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων βάρους ενός τριγώνου το οποίο διατηρεί σταθερή την πλευρά ΒΓ κατά θέση και μέγεθος και τη διάμεσο $μ_α$ σταθερή ως προς το μέγεθος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) και το ύψος του ΑΔ. Από σημείο Ε της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, η οποία τέμνει το ύψος ΑΔ στο Η. Αν η κάθετη προς τη ΓΗ στο Η τέμνει τη ΒΑ στο Ζ, να δείξετε ότι ΑΖ=ΒΕ.

2 Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, το βαρύκεντρο Κ του τριγώνου ΑΒΓ και τα μέσα Ε, Ζ, Η των ΑΒ, ΓΔ και ΚΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΕΗ=ΚΖ και ΕΗ//ΚΖ.

3 Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, το σημείο τομής Ο των πλευρών ΑΔ και ΒΓ, το σημείο τομής Ι των διχοτόμων των γωνιών $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ και το σημείο τομής Ε των διχοτόμων των γωνιών $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\Delta}$ αυτού. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ι και Ε βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{\Delta O \Gamma}$.

4 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο, Η το ορθόκεντρό του και Δ το αντιδιαμετρικό της κορυφής Α. Να αποδείξετε ότι η ΗΔ περνάει από το μέσο της ΒΓ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, αν δίνονται δυο διαδοχικές πλευρές του ΑΒ=α, ΑΔ=γ και η διαγώνιός του ΔΒ=δ, όπου α, δ γνωστά ευθύγραμμα τμήματα.

2 Να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, αν δίνονται η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΜ=μ και η κάθετη πλευρά του ΑΒ=γ, όπου μ και γ γνωστά ευθύγραμμα τμήματα.

3 Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν δίνονται η κορυφή του Α, το βαρύκεντρο Θ και το περίκεντρό του Ο.

4 Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν δίνονται η πλευρά ΒΓ=α και οι διάμεσοι ΒΜ=λ και ΜΓ=κ, όπου α, λ, κ γνωστά ευθύγραμμα τμήματα.

5 Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις
α) αν δίνεται το άθροισμα μιας πλευράς και της διαγωνίου.
β) αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση του μέσου μιας πλευράς από μια διαγώνιο ότι είναι ίση με λ, όπου λ γνωστό ευθύγραμμο τμήμα.

6 Να κατασκευάσετε τραπέζιο στο οποίο δίνονται οι βάσεις και οι γωνίες που πρόσκειντα σε μια βάση.

7 Να κατασκευάσετε τραπέζιο στο οποίο δίνονται η μια βάση, το ύψος και οι γωνίες των διαγωνίων με τη γνωστή βάση.

8 Να κατασκευάσετε ισοσκελές τραπέζιο, που να έχει τις βάσεις του πάνω σε δύο δεδομένες παράλληλες ευθείες και ίσες με κ, λ αντίστοιχα, όπου κ<λ.

9 Να κατασκευάσετε τραπέζιο αν δίνονται οι τέσσερις πλευρές του.

10 Να κατασκευάσετε τραπέζιο, αν δίνονται οι βάσεις και οι διαγώνιοί του.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ συνδέονται με τη σχέση $\widehat{B}=3\widehat{A}$. Το μέτρο της γωνίες $\widehat{A}$ είναι:

Α. ❑ 75°
Β. ❑ 50°
Γ. ❑ 45°
Δ. ❑ 35°
Ε. ❑ 47°

2 Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ μια ευθεία από το Β κάθετη στην ΑΔ την τέμνει στο Μ. Αν η γωνία $\widehat{\Delta}=119°$, τότε η $\widehat{ABM}$ είναι:

Α. ❑ 35°
Β. ❑ 21°
Γ. ❑ 19°
Δ. ❑ 29°
Ε. ❑ 30°

3 Σε ρόμβο ΑΒΓΔ η γωνία $\widehat{A}=60°$ και ΒΔ=12. Τότε η περίμετρος του ρόμβου είναι:

Α. ❑ 16
Β. ❑ 32
Γ. ❑ 48
Δ. ❑ 64
Ε. ❑ 24

4 Σε ισοσκελές τραπέζιο δύο γωνίες του διαφέρουν κατά 60°. Η μικρότερη γωνία που έχει το ισοσκελές τραπέζιο είναι:

Α. ❑ 30°
Β. ❑ 60°
Γ. ❑ 45°
Δ. ❑ 90°
Ε. ❑ 24°

5 Ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο αν:

Α. ❑ Έχει ίσες διαγώνιες.
Β. ❑ Έχει κάθετες διαγώνιες.
Γ. ❑ Έχει διαγώνιες που διχοτομούν τις γωνίες του.
Δ. ❑ Έχει κάθετες διαγώνιες που διχοτομούνται.

6 Στο ρόμβο:

Α. ❑ Οι διαγώνιες είναι ίσες και κάθετες.
Β. ❑ Οι πλευρές είναι ίσες και ανά δύο κάθετες.
Γ. ❑ Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.
Δ. ❑ Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

7 Στο τετράγωνο οι διαγώνιες:

Α. ❑ Τέμνονται υπό γωνία 45°.
Β. ❑ Είναι ίσες.
Γ. ❑ Χωρίζουν το τετράγωνο σε ισόπλευρα τρίγωνα.
Δ. ❑ Έχουν άθροισμα ίσο με την περίμετρο του τετραγώνου.

8 Ένα τετράπλευρο, που έχει τις δύο του πλευρές παράλληλες και τις άλλες δύο ίσες, τότε:

Α. ❑ Είναι αναγκαστικά παραλληλόγραμμο.
Β. ❑ Είναι ορθογώνιο.
Γ. ❑ Είναι ή τραπέζιο ή παραλληλόγραμμο.
Δ. ❑ Είναι αναγκαστικά τραπέζιο.

9 Αν ΑΒΓ τρίγωνο και Α το ορθόκεντρό του, τότε:

Α. ❑ Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
Β. ❑ Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.
Γ. ❑ Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
Δ. ❑ Δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.

10 Να εξετάσετε αν είναι σωστή ή λανθασμένη καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

α) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι δύο πλευρές του είναι παράλληλες και οι άλλες δύο είναι ίσες.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

β) Σε κυρτό τετράπλευρο αν $\widehat{A}+\widehat{B}=180°$ και ΑΔ=ΒΓ, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

γ) Αν τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΓΔΕΖ έχουν κοινή πλευρά τη ΓΔ, τότε το ΑΒΖΕ είναι παραλληλόγραμμο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

δ) Σ' ένα τετράπλευρο είναι δυνατόν οι διαγώνιές του να διχοτομούνται και αυτό να μην είναι παραλληλόγραμμο

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ε) Τα τμήματα που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών τετραπλεύρου διχοτομούνται.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

στ) Αν σ' ένα παραλληλόγραμμο ισχύει ΑΓ=ΒΔ, τότε το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ζ) Αν σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=270°$, τότε αυτό είναι ορθογώνιο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

η) Αν ένας ρόμβος έχει τρεις ίσες γωνίες, τότε είναι τετράγωνο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

θ) Σ' ένα τραπέζιο οι διαγώνιες αποκλείεται να είναι κάθετες.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ι) Αν σ' ένα τετράπλευρο δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές, το τετράπλευρο είναι τραπέζιο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ια) Αν το ορθόκεντρο ενός τριγώνου ισαπέχει από τις κορυφές του, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ιβ) Το περίκεντρο ενός τριγώνου ισαπέχει από τις κορυφές του.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ιγ) Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου ισαπέχει από τις πλευρές του.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ιδ) Σ' ένα τρίγωνο υπάρχει περίπτωση το ορθόκεντρό του να συμπίπτει με μια κορυφή του.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ιε) Σ' ένα τρίγωνο υπάρχει περίπτωση το περίκεντρό του να βρίσκεται πάνω σε μια πλευρά του.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ιστ) Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου μπορεί να βρίσκεται έξω από το τρίγωνο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ιζ) Αν το ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι και βαρύκεντρο αυτού, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

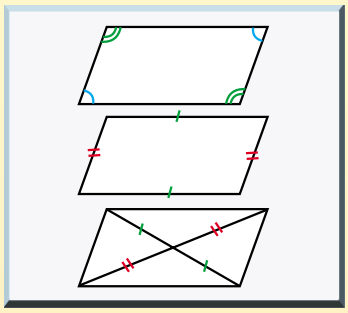
ιη) Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ, το $υ_α$ και η $μ_β$ τέμνονται στο βαρύκεντρο του τριγώνου.

❑ Σωστό ❑ Λάθος

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

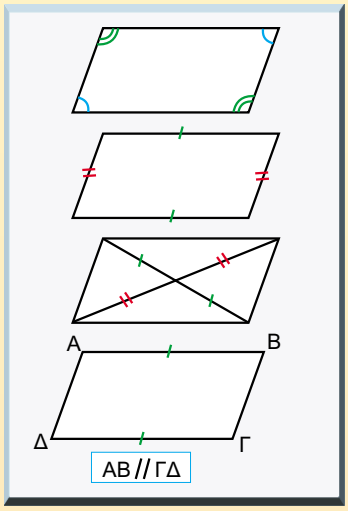
Στην αρχή του 5ου κεφαλαίου δώσαμε τον ορισμό του παραλληλογράμμου (τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες) και αποδείξαμε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι **ιδιότητες**:

- Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.
- Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
- Οι διαγώνιες διχοτομούνται.
- Το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας.

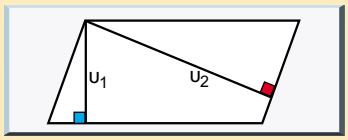


Παράλληλα με τις ιδιότητες εξετάσαμε τα **κριτήρια** για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο. Ένα τετράπλευρο, λοιπόν, είναι παραλληλόγραμμο όταν ισχύει μια από τις παρακάτω ιδιότητες:

- Οι απέναντι γωνίες του είναι ανά δύο ίσες.
- Οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες.
- Οι διαγώνιές του διχοτομούνται.
- Δύο πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.



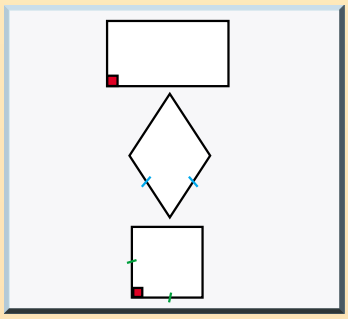
Ορίσαμε επίσης το ύψος του παραλληλογράμμου (κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σ' αυτές).



Στη συνέχεια μελετήσαμε ορισμένα είδη παραλληλογράμμων όπως το ορθογώνιο (παραλληλόγραμμο με μια τουλάχιστον γωνία ορθή), το ρόμβο (παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες) και το τετράγωνο (παραλληλόγραμμο που είναι συγχρόνως και ορθογώνιο και ρόμβος).

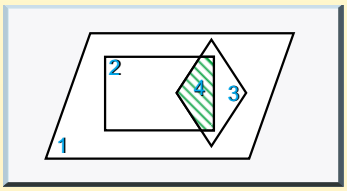
Αποδείξαμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητες του ορθογωνίου (ίσες διαγώνιες), του ρόμβου (διαγώνιες: κάθετες, είναι διχοτόμοι των γωνιών του, είναι άξονες συμμετρίας του) και διαπιστώσαμε ότι το τετράγωνο συγκεντρώνει όλα τα χαρακτηριστικά (ιδιότητες) των προηγουμένων.

Ακομη κάναμε μια αναφορά για το πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο ανήκει σε μια από τις προηγούμενες κατηγορίες.



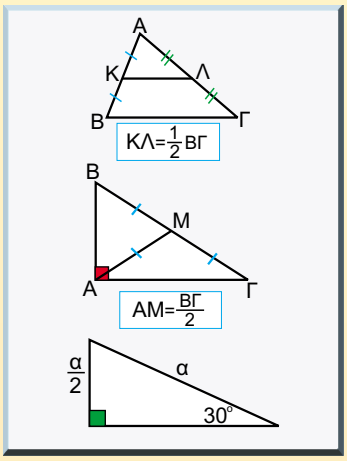
Μια ταξινόμηση των παραλληλογράμμων μας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι το σύνολο των τετραγώνων είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των ρόμβων και του συνόλου των ορθογωνίων. Τα σύνολα των ορθογωνίων και των ρόμβων είναι γνήσια υποσύνολα των συνόλων των παραλληλογράμμων.

Στο διπλανό σχήμα με διαγράμματα του Venn παρουσιάζονται οι παραπάνω σχέσεις. Προφανώς η περιοχή 4 είναι το σύνολο των τετραγώνων.



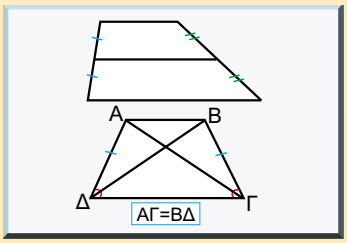
Με τη χρήση των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων αποδείξαμε σπουδαίες προτάσεις σχετικές με τα τρίγωνα:

- Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των πλευρών τριγώνου, είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά και ισούται με το μισό της και αντιστρόφως.
- Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως.
- Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μια οξεία γωνία είναι 30°, τότε η απέναντι πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως.



Στη συνέχεια μελετήσαμε το τραπέζιο (τετράπλευρο με δύο μόνο πλευρές παράλληλες). Σημαντικότερο στοιχείο του είναι η διάμεσός του με σημαντικές ιδιότητες (παράλληλη προς τις βάσεις και ίση με το ημιάθροισμα αυτών).

Ειδική αναφορά κάναμε στο ισοσκελές τραπέζιο (τραπέζιο με τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες) και στις ιδιότητές του (ίσες διαγώνιες, ίσες οι παρά την ίδια βάση γωνίες).



Στο τέλος του κεφαλαίου ασχοληθήκαμε με ορισμένες αξιοσημείωτες ευθείες σ' ένα τρίγωνο και στα σημεία τομής τους.

α) Έγκεντρο (σημείο τομής διχοτόμων, ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου).

β) Περίκεντρο (σημείο τομής των μεσοκαθέτων, ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου).

γ) Βαρύκεντρο (σημείο τομής των διαμέσων, απέχει από κάθε κορυφή τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου).

δ) Ορθόκεντρο (σημείο τομής των φορέων των υψών).