Κεφάλαιο 3

ΤΡΙΓΩΝΑ

3.1 Σύγκριση Τριγώνων

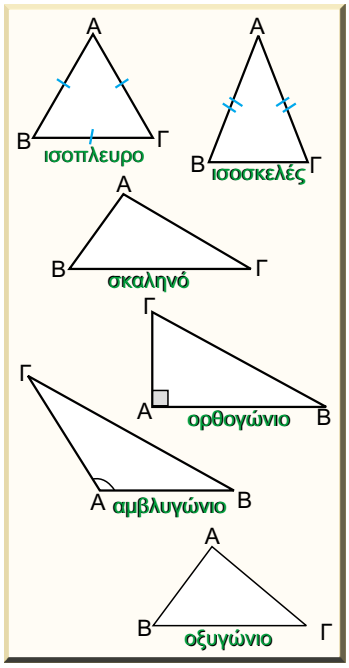
3.1.1 Είδη τριγώνων

Ένα τρίγωνο εξετασμένο ως προς τις σχέσεις που ικανοποιούν τις πλευρές του, λέγεται:

- **ισόπλευρο**, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες,
- **ισοσκελές**, όταν έχει δύο πλευρές ίσες,
- **σκαληνό**, όταν έχει τρεις άνισες πλευρές.

Ένα τρίγωνο εξετασμένο ως προς το είδος των γωνιών του, λέγεται:

- **ορθογώνιο**, όταν έχει μια γωνία ορθή,
- **αμβλυγώνιο**, όταν έχει μια γωνία αμβλεία,
- **οξυγώνιο**, όταν έχει και τις τρεις γωνίες οξείες.



Σημείωση

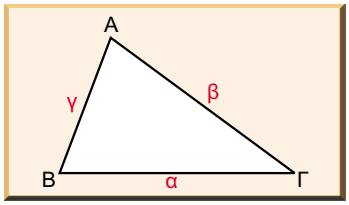
Η ασυμμετρία, που φαινομενικά υπάρχει στους ορισμούς των ειδών των τριγώνων ως προς τις γωνίες, οφείλεται στο ότι κάθε τρίγωνο έχει τουλάχιστον δύο οξείες γωνίες, ενώ η τρίτη μπορεί να είναι οποιουδήποτε είδους.

Στο ισοσκελές τρίγωνο οι δύο πλευρές είναι ίσες. Δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει με την τρίτη. Δηλαδή, το ισόπλευρο τρίγωνο είναι ειδική περίπτωση ισοσκελούς τριγώνου.

3.1.2 Στοιχεία τριγώνου (κύρια και δευτερεύοντα)

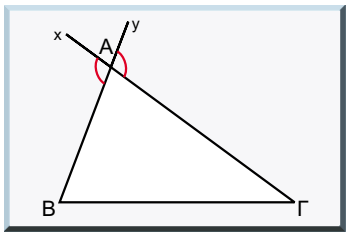
Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι οι τρεις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και οι τρεις γωνίες του $B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$, $A\hat{\Gamma}B$. Για συντομία συμβολίζουμε τις πλευρές ΑΒ=γ, ΒΓ=α, ΓΑ=β και τις γωνίες $B\hat{A}\Gamma = \hat{A}$, $A\hat{B}\Gamma = \hat{B}$, $A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}$.

Οι γωνίες ενός τριγώνου, που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς του, λέγονται **προσκείμενες** γωνίες στην πλευρά αυτή, ενώ η γωνία που δεν είναι προσκείμενη στην πλευρά λέμε ότι είναι **απέναντί** της ή ότι είναι **περιεχόμενη** στις δύο άλλες πλευρές.



Έτσι στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι προσκείμενες στην πλευρά ΒΓ, ενώ η γωνία $\hat{A}$ είναι περιεχόμενη στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και απέναντι στη ΒΓ.

Η περίμετρος ενός τριγώνου ΑΒΓ συμβολίζεται με 2τ, δηλαδή α+β+γ=2τ.

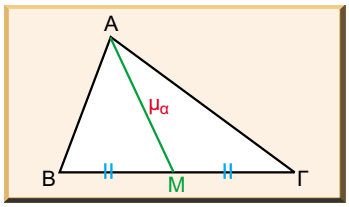


Αν προεκτείνουμε τις πλευρές της γωνίας $\hat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ προς το Α, τότε καθεμιά από τις γωνίες που σχηματίζονται εξωτερικά του τριγώνου, δηλαδή η $x\hat{A}B$ και η $y\hat{A}\Gamma$, λέγεται **εξωτερική** γωνία του τριγώνου που αντιστοιχεί στη γωνία $\hat{A}$. Η ταυτόσημη ονομασία οφείλεται στο ότι $x\hat{A}B = y\hat{A}\Gamma$, ως κατακορυφήν. Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ ονομάζονται **απέναντι** εσωτερικές της εξωτερικής γωνίας $x\hat{A}B$ ή $y\hat{A}\Gamma$.

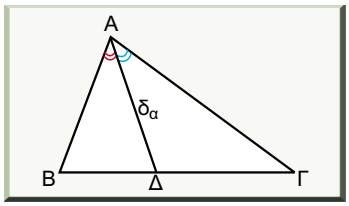
Στα ορθογώνια τρίγωνα, οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία λέγονται **κάθετες**, ενώ η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα**.

Στο ισοσκελές τρίγωνο, η πλευρά, για την οποία δε δίνεται κανένα στοιχείο λέγεται **βάση**.

Σε κάθε τρίγωνο, εκτός από τις πλευρές υπάρχουν ορισμένα ευθύγραμμα τμήματα όπως οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη, με αξιόλογες ιδιότητες.



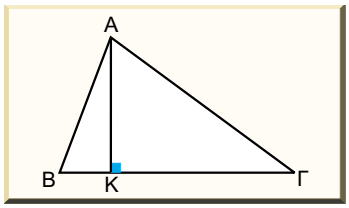
- **Διάμεσος** που αντιστοιχεί στην πλευρά α ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα την κορυφή Α και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ και συμβολίζεται με μ_α. Ομοίως ορίζονται οι διάμεσοι μ_β, μ_γ.



- **Διχοτόμος** της γωνίας $\hat{A}$ ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα την κορυφή Α και το σημείο τομής της διχοτόμου της

$\widehat{A}$ με την απέναντι πλευρά ΒΓ και συμβολίζεται με $δ_α$. Ομοίως ορίζονται οι διχοτόμοι $δ_β$, $δ_γ$.

- **Ύψος** που αντιστοιχεί στην πλευρά α ονομάζεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από την κορυφή Α προς την απέναντι πλευρά ΒΓ και συμβολίζεται με $υ_α$. Ομοίως ορίζονται τα ύψη $υ_β$, $υ_γ$.



3.1.3 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν είναι δυνατόν με κατάλληλη μετατόπιση, να εφαρμόσει το ένα επί του άλλου. Κατά συνέπεια **για να είναι δύο τρίγωνα ίσα πρέπει να έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις πλευρές, που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες, και αυτές ίσες**. Η ισότητα των τριγώνων, όπως ορίστηκε με τη δυνατότητα ταύτισης, δημιούργησε την πεποίθηση ότι οι γωνίες και οι πλευρές δύο τριγώνων πρέπει να είναι ίσες μία προς μία, και κατά συνέπεια για να φτάσουμε στο συμπέρασμα ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα θα πρέπει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τις έξι αυτές ισότητες.

Με τα επόμενα θεωρήματα θα διαπιστώσουμε ότι στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν γνωρίζουμε τρεις μόνο απ' αυτές τις ισότητες, όχι βέβαια τρεις οποιεσδήποτε, αλλά τρεις συγκεκριμένες.

Τα θεωρήματα αυτά, που θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε, αποτελούν **τα κριτήρια ισότητας τριγώνων**.

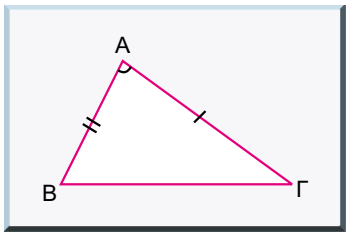
Θεώρημα 3.1

1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Απόδειξη

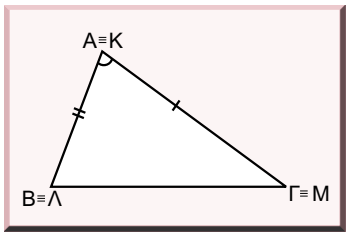
Έχουμε δύο τρίγωνα τα ΑΒΓ και ΚΛΜ τα οποία έχουν τις πλευρές ΑΒ και ΚΛ ίσες, τις πλευρές ΑΓ και ΚΜ ίσες και τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{K}$ ίσες. Θα διαπιστώσουμε τώρα ότι τα τρίγωνα μπορούν να ταυτιστούν με κατάλληλη μετατόπιση, δηλαδή ότι είναι ίσα.



Γι' αυτό το λόγο τοποθετούμε το τρίγωνο ΑΒΓ έτσι, ώστε το σημείο Α να συμπέσει με το Κ, η ημιευθεία ΑΒ με την ΚΛ και η ημιευθεία ΑΓ με την ημιευθεία ΚΜ. (Αυτό είναι δυνατό διότι η γωνία $B\widehat{A}Γ$ είναι ίση με τη γωνία $Λ\widehat{K}M$). Στη νέα θέση εφόσον ΑΒ=ΚΛ θα

συμπίπτει και το σημείο Β με το Λ και το Γ με το Μ. Τελικά η πλευρά ΒΓ θα συμπίπτει με την ΛΜ, και οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ με τις $\widehat{\Lambda}$ και $\widehat{M}$ αντίστοιχα.

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ συμπίπτουν, άρα είναι ίσα. ■

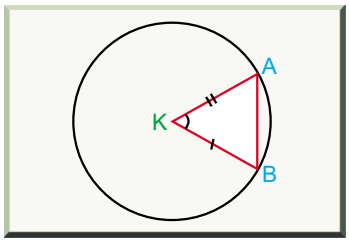


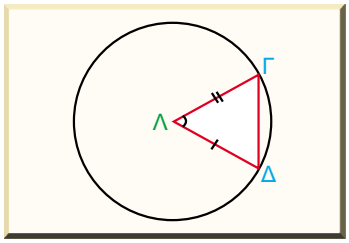
Σημείωση

Από το προηγούμενο κριτήριο, που αποδίδεται συντομογραφικά Π-Γ-Π, συμπεραίνουμε ότι οι ισότητες των πλευρών και των γωνιών στα δύο ίσα τρίγωνα δεν είναι τυχαίες. Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{K}$ είναι ίσες, αλλά και οι απέναντί τους πλευρές ΒΓ και ΛΜ είναι ίσες. Δηλαδή, σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές και αντίστροφα. Η πρόταση αυτή έχει μεγάλη αξία διότι προκύπτουν νέες ισότητες μετά τη σύγκριση δύο τριγώνων. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, αυτή είναι μια από τις βασικές μεθόδους για απόδειξη ισότητας γωνιών ή ευθύγραμμων τμημάτων.

Πόρισμα 3.1

Σε ίσα τόξα δύο ίσων κύκλων ή ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσες χορδές.





Απόδειξη

Στους δύο ίσους κύκλους (Κ,ρ) και (Λ,ρ) του σχήματος, θεωρούμε τα δύο ίσα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Φέρουμε τις χορδές των τόξων και τις ακτίνες που καταλήγουν στα άκρα τους. Τα τρίγωνα ΚΑΒ και ΛΓΔ έχουν $\widehat{K} = \widehat{\Lambda}$ (ως επίκεντρες γωνίες με ίσα αντίστοιχα τόξα), ΚΑ=ΛΓ (ως ακτίνες ίσων κύκλων) και ΚΒ=ΛΔ (ως ακτίνες ίσων κύκλων). Δηλαδή, τα τρίγωνα ΚΑΒ και ΛΓΔ έχουν δύο πλευρές και την περιεχόμενή τους γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν ίσες και τις πλευρές ΑΒ=ΓΔ (διότι αυτές ανήκουν σε ίσα τρίγωνα και βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες). Οι χορδές ΑΒ και ΓΔ, λοιπόν, είναι ίσες.

Η απόδειξη για την περίπτωση ίσων τόξων ενός κύκλου είναι ίδια. ■

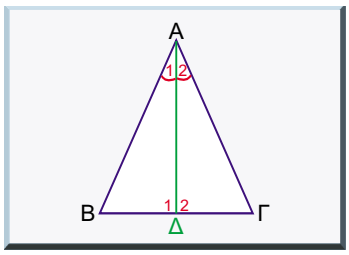
Πόρισμα 3.2

Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσος και ύψος του τριγώνου.

Απόδειξη

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\widehat{A}$. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν την ΑΒ=ΑΓ, την

ΑΔ=ΑΔ (κοινή πλευρά) και τις περιεχόμενές τους γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{A}_2$ ίσες ως μισά της ίδιας γωνίας $\widehat{A}$. Δηλαδή, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν δύο πλευρές και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε, και οι πλευρές ΔΒ και ΔΓ θα είναι ίσες, διότι ανήκουν σε ίσα τρίγωνα και βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{A}_2$. Άρα η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.



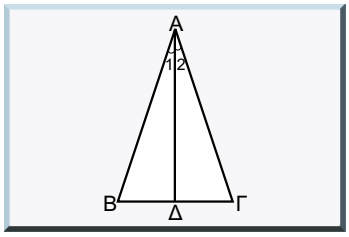
Ακόμη $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$, διότι ανήκουν σε ίσα τρίγωνα και βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές, τις ΑΒ και ΑΓ. Όμως $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 180°$, οπότε τελικά $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 90°$. Άρα, το ΑΔ είναι και ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. ■

Θεώρημα 3.2

Αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες.

Απόδειξη

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΒΓ) θεωρούμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\widehat{A}$. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα, διότι ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ=ΑΔ (κοινή πλευρά) και $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$. Άρα είναι και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. ■



Πόρισμα 3.3

Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

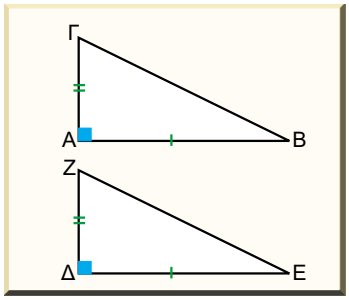
Θεώρημα 3.3

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ΑΓ=ΔΖ, ΑΒ=ΔΕ και $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90°$.

Άρα, σύμφωνα με το πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π) είναι ίσα. ■



Πόρισμα 3.4

Κάθε σημείο της μεσοκάθετης ενός τμήματος απέχει εξίσου από τα άκρα του.

Πόρισμα 3.5

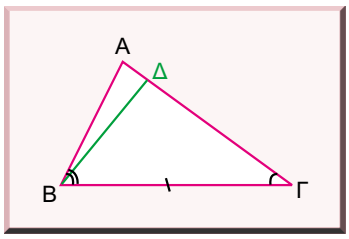
Αν το ύψος τριγώνου είναι και διάμεσός του, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

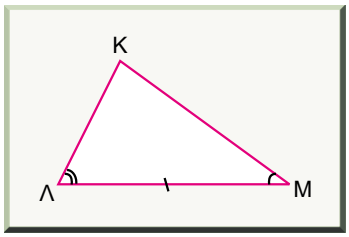
Θεώρημα 3.4

2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ-Π-Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν από μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες γωνίες στην πλευρά αυτή ίσες μία προς μία, τότε θα είναι ίσα.

Απόδειξη





Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν ΒΓ=ΛΜ, $\widehat{ΑΓΒ} = \widehat{ΚΜΛ}$ και $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΚΛΜ}$.

Για τις πλευρές ΓΑ και ΜΚ ισχύει ή ΓΑ≠ΜΚ ή ΓΑ=ΜΚ.

Αν ΓΑ>ΜΚ θεωρούμε πάνω στην πλευρά ΓΑ σημείο Δ έτσι ώστε ΓΔ=ΜΚ. Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΛΚΜ έχουν ΓΒ=ΜΛ, ΓΔ=ΜΚ και $\widehat{Μ} = \widehat{Γ}$ οπότε σύμφωνα με το Π-Γ-Π είναι ίσα και επομένως και $\widehat{ΔΒΓ} = \widehat{ΚΛΜ}$. Αλλά $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΚΛΜ}$, οπότε θα έπρεπε $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΔΒΓ}$, πράγμα άτοπο, εφόσον το Δ δε συμπίπτει με το Α. Αποκλείεται λοιπόν ΓΑ>ΜΚ. Ομοίως αποκλείεται και ΓΑ<ΜΚ. Υποχρεωτικά λοιπόν έχουμε ΓΑ=ΜΚ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία (ΓΑ=ΜΚ και ΓΒ=ΜΛ) και τις περιεχόμενές τους γωνίες ίσες ($\widehat{Γ} = \widehat{Μ}$), άρα είναι ίσα. ■

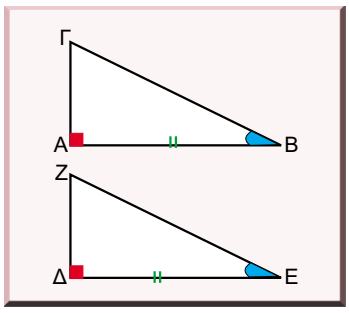
Σημείωση

Το προηγούμενο κριτήριο ισότητας αποδίδεται συντομογραφικά Γ-Π-Γ. Και σ' αυτό το κριτήριο βλέπουμε πως με τρεις μόνο κατάλληλες ισότητες κύριων στοιχείων των δύο τριγώνων συμπεραίνουμε την ισότητά τους.

Θεώρημα 3.5

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σ' αυτήν οξεία γωνία ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ΑΒ=ΔΕ, $\widehat{Β} = \widehat{Ε}$ και $\widehat{Α} = \widehat{Δ} = 90°$.

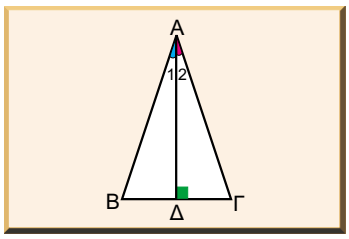
Άρα, σύμφωνα με το 2° κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ-Π-Γ), είναι ίσα. ■

Πόρισμα 3.6

Αν το ύψος τριγώνου είναι και διχοτόμος του, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του που είναι και διχοτόμος. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ έχουν ΑΔ=ΑΔ (κοινή πλευρά) και $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα 3.5, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, οπότε ΑΒ=ΑΓ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. ■



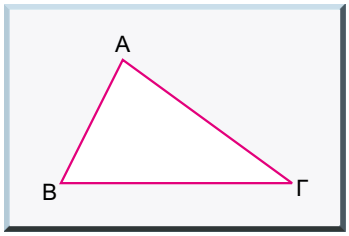
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Θεώρημα 3.6

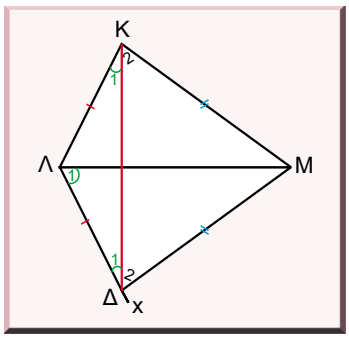
3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Π-Π)

Απόδειξη

Θα κάνουμε την απόδειξη μόνο για την περίπτωση που τα δύο τρίγωνα είναι οξυγώνια. Στις περιπτώσεις που τα τρίγωνα είναι αμβλυγώνια ή ορθογώνια, οι αποδείξεις είναι παρόμοιες.



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν ΑΒ=ΚΛ, ΒΓ=ΛΜ και ΓΑ=ΜΚ. Σχηματίζουμε μία γωνία $M\widehat{\Lambda}x$ εφεξής με τη $M\widehat{\Lambda}K$ και ίση με τη $\Gamma\widehat{B}A$, και πάνω στη Λx παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε ΛΔ=ΒΑ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΛΜ έχουν ΒΓ=ΛΜ, $\widehat{B} = \widehat{\Lambda}_1$ και ΒΑ=ΛΔ. Είναι λοιπόν, ίσα σύμφωνα με το κριτήριο (Π-Γ-Π) οπότε ΑΓ=ΔΜ. Όμως ΑΓ=ΜΚ, άρα ΜΔ=ΜΚ και στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΚΔ $\widehat{K}_2 = \widehat{\Delta}_2$ (1). Ακόμη ΒΑ=ΛΔ και ΒΑ=ΛΚ, άρα και ΛΔ=ΛΚ και $\widehat{K}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Lambda\widehat{K}M = \Lambda\widehat{\Delta}M$ (3). Όμως $B\widehat{A}\Gamma = \Lambda\widehat{\Delta}M$ (ανήκουν στα ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΛΜΔ και βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ και ΛΜ), άρα και $B\widehat{A}\Gamma = \Lambda\widehat{K}M$. Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ τελικά έχουμε $\widehat{A} = \widehat{K}$, ΑΒ=ΚΛ και ΑΓ=ΚΜ. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι ίσα. ■



Εξασφαλίσαμε επομένως, και τρίτο κριτήριο ισότητας τριγώνων που αποδίδεται συντομογραφικά Π-Π-Π.

3.1 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να κάνετε την απόδειξη του θεωρήματος 3.6 (Π-Π-Π), όταν τα τρίγωνα είναι

α) αμβλυγώνια

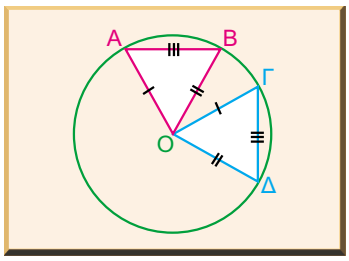
β) ορθογώνια.

Πόρισμα 3.7

Σε ίσες χορδές ενός κύκλου ή ίσων κύκλων αντιστοιχούν ίσα τόξα.

Απόδειξη

Στον κύκλο (Ο,ρ) έστω οι δύο ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι ίσα διότι έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΟΑ=ΟΓ=ρ, ΟΒ=ΟΔ=ρ και ΑΒ=ΓΔ). Άρα οι γωνίες τους $\widehat{AOB}$ και $\widehat{ΓOΔ}$ θα είναι ίσες. Συνεπώς και τα αντίστοιχα τόξα τους θα είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{ΓΔ}$.



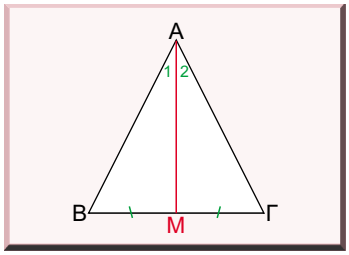
Η απόδειξη για την περίπτωση ίσων κύκλων είναι ίδια. ■

Πόρισμα 3.8

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και ύψος και διχοτόμος.

Απόδειξη

Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ=ΑΓ και η ΑΜ είναι διάμεσός του, δηλαδή ΜΒ=ΜΓ. Τα δύο τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΒΓ έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΑΜ=ΑΜ, ΑΒ=ΑΓ, ΜΒ=ΜΓ). Άρα τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε και $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (οι γωνίες $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$ ανήκουν σε ίσα τρίγωνα και βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΜΒ και ΜΓ). Επομένως η ΑΜ είναι διχοτόμος, οπότε σύμφωνα με το Πόρισμα 3.2 η ΑΜ είναι και ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. ■



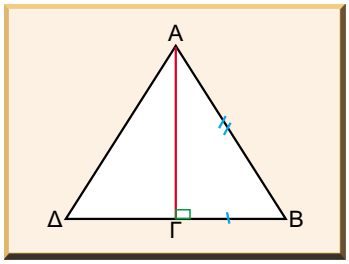
3.1.4 Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Θεώρημα 3.7

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν ίσες υποτείνουσες και από μία κάθετη πλευρά ίση, είναι ίσα.

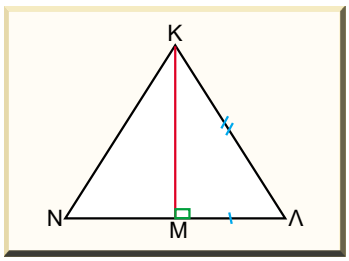
Απόδειξη

Έστω τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ με ίσες υποτείνουσες ΑΒ=ΚΛ και τις κάθετες πλευρές ΒΓ και ΛΜ επίσης ίσες. Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ=ΓΒ, και τη ΛΜ κατά τμήμα ΜΝ=ΜΛ. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει το ΑΓ και ύψος ($\widehat{Γ} = 90°$) και διάμεσο (ΓΒ=ΓΔ), άρα είναι ισοσκελές (Πόρισμα 3.5) δηλαδή ΑΒ=ΑΔ. Ομοίως και το τρίγωνο ΚΛΝ είναι ισοσκελές, διότι το ΚΜ είναι και ύψος και διάμεσος, δηλαδή ΚΛ=ΚΝ.



Τα δύο τρίγωνα ΑΒΔ και ΚΛΝ έχουν ΑΒ=ΚΛ (από την

υπόθεση), ΑΔ=ΚΝ (ίσες με τις προηγούμενες πλευρές) και ΒΔ=ΛΝ (διπλάσιες των ίσων πλευρών ΒΓ και ΛΜ). Δηλαδή, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΚΛΝ έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Επομένως $\widehat{B} = \widehat{\Lambda}$. Οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν ΑΒ=ΚΛ, ΒΓ=ΛΜ και $\widehat{B} = \widehat{\Lambda}$. Επομένως σύμφωνα με το 1° κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π) είναι ίσα. ■



Πόρισμα 3.9

Το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου, που άγεται από την κορυφή του, είναι διάμεσος και διχοτόμος.

Πόρισμα 3.10

Η κάθετη από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διέρχεται από το μέσο της χορδής και το μέσον του αντίστοιχου τόξου.

Σημείωση

Το κάθετο τμήμα από το κέντρο ενός κύκλου προς μια του χορδή καλείται **απόστημα** της χορδής αυτής.

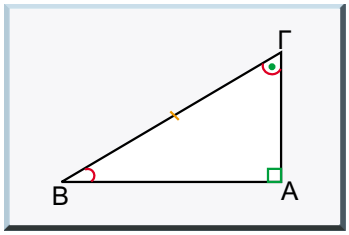
Θεώρημα 3.8

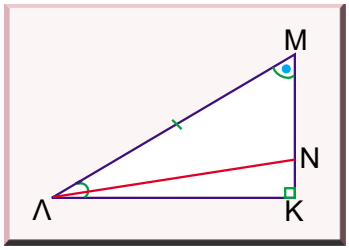
Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν ίσες υποτείνουσες κι από μία οξεία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{K}$ ορθές, τις υποτείνουσες ΒΓ και ΛΜ ίσες και τις οξείες γωνίες $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{M}$ ίσες.

Θα αποδείξουμε ότι είναι ίσα. Υποθέτουμε ότι οι κάθετες πλευρές ΓΑ και ΜΚ δεν είναι ίσες. Τότε στην ημιευθεία ΜΚ θεωρούμε σημείο Ν τέτοιο ώστε ΜΝ=ΓΑ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΝΛΜ έχουν ΒΓ=ΜΛ, $\widehat{\Gamma} = \widehat{M}$ και ΓΑ=ΜΝ. Είναι επομένως ίσα σύμφωνα με το κριτήριο (Π-Γ-Π), άρα θα έχουν ίσες και τις γωνίες τους $\widehat{A}$ και $\widehat{N}$ (βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ και ΛΜ). Άρα η γωνία $\widehat{N}$ είναι ορθή, δηλαδή από το σημείο Λ άγονται δύο κάθετες προς την ευθεία ΜΚ, οι ΛΚ και ΛΝ. Αυτό όμως είναι άτοπο. Άρα η ΓΑ είναι ίση με τη ΜΚ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες μία προς μία, επομένως είναι ίσα. ■





Παρατήρηση

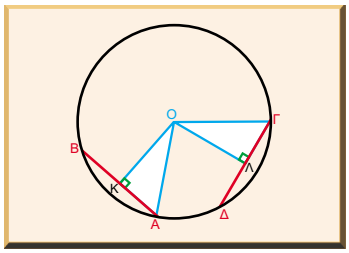
Στην παράγραφο 4.2.3 θα αποδείξουμε άλλο ένα κριτήριο ισότητας ορθογώνιων τριγώνων(το 5° κριτήριο ορθογώνιων τριγώνων) και θα ολοκληρωθεί έτσι η τεχνική σύγκρισης αυτών των τριγώνων.

Άμεσες συνέπειες των κριτηρίων των ορθογώνιων τριγώνων είναι τα παρακάτω πορίσματα.

Πόρισμα 3.11

Το κέντρο ενός κύκλου απέχει εξίσου από τις χορδές και αντιστρόφως.

Απόδειξη



Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου κέντρου Ο και οι αποστάσεις ΟΚ και ΟΛ του κέντρου Ο από τις χορδές. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΑ και ΟΛΓ έχουν ίσες υποτείνουσες ΟΑ και ΟΓ (είναι ακτίνες του κύκλου), ίσες κάθετες πλευρές ΚΑ και ΛΓ (είναι μισά των ίσων χορδών, σύμφωνα με το πόρισμα 3.10). Άρα σύμφωνα με το θεώρημα 3.7 τα τρίγων ΟΚΑ και ΟΛΓ είναι ίσα οπότε θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΟΚ=ΟΛ.

Αντιστρόφως

Έστω τώρα ότι έχουμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου Ο και τις αποστάσεις ΟΚ και ΟΛ του κέντρου Ο του κύκλου από τις χορδές αυτές τέτοιες, ώστε ΟΚ=ΟΛ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν ίσες τις υποτείνουσες ΟΑ και ΟΓ (σαν ακτίνες του ίδιου κύκλου) και ίσες τις κάθετες πλευρές ΟΚ και ΟΛ. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 3.7 τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ είναι ίσα οπότε θα έχουν ίσες και τις τρίτες τους πλευρές ΑΚ και ΔΓ. Συνεπώς θα είναι ίσα και τα διπλάσια των πλευρών αυτών, δηλαδή οι χορδές ΑΒ και ΔΓ. ■

Πόρισμα 3.12

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας απέχει εξίσου από τις πλευρές της και αντιστρόφως.

3.2 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να αποδείξετε το πόρισμα 3.12 στηριζόμενοι στα θεωρήματα 3.7 και 3.8.

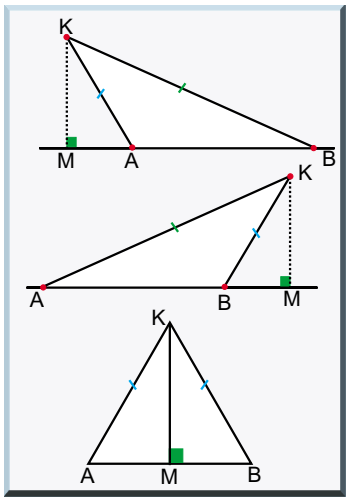
Πόρισμα 3.13

Κάθε σημείο που απέχει εξίσου από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος βρίσκεται στη μεσοκάθετή του.

Απόδειξη

Αν ΑΒ ένα ευθύγραμμο τμήμα και Κ ένα σημείο του επιπέδου, τέτοιο, ώστε ΚΑ=ΚΒ και Μ η ορθή προβολή του Κ στο ΑΒ, τότε το σημείο Μ μπορεί να είναι εξωτερικό σημείο του ΑΒ είτε αριστερά του Α, είτε δεξιά του Β ή να είναι εσωτερικό σημείο του ΑΒ. Και στις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΒΚΜ είναι ίσα σύμφωνα με το θεώρημα 3.7, άρα ΑΜ=ΜΒ.

Η ισότητα ΑΜ=ΜΒ δηλώνει πως αποκλείεται το σημείο Μ να είναι εξωτερικό σημείο του ΑΒ. Άρα το Μ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β και μάλιστα επειδή ΑΜ=ΜΒ, το κάθετο τμήμα ΚΜ διέρχεται από το μέσο Μ του ΑΒ. Επομένως, το σημείο Κ βρίσκεται στη μεσοκάθετη του ΑΒ. ■



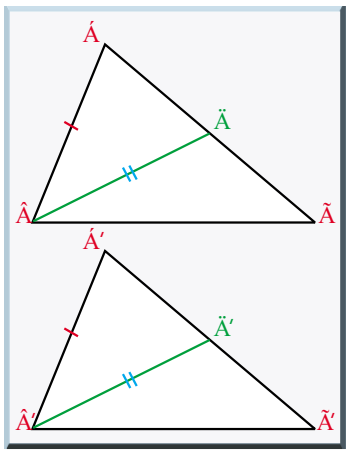
1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν ΑΓ=Α΄Γ΄, ΑΒ=Α΄Β΄ και τις διαμέσους τους ΒΔ και Β΄Δ΄ ίσες, να αποδείξετε ότι είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω ΒΔ και Β΄Δ΄ οι αντίστοιχες διάμεσοι των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ έχουν ΑΒ=Α΄Β΄, ΒΔ=Β΄Δ΄ και ΑΔ=Α΄Δ΄ $\left(\frac{ΑΓ}{2}=\frac{Α'Γ'}{2}\right)$. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ είναι ίσα σύμφωνα με το 3° κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Π-Π), οπότε και οι γωνίες $\widehat{Α}$ και $\widehat{Α'}$ είναι ίσες.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν ΑΒ=Α΄Β΄, ΑΓ=Α΄Γ΄ και $\widehat{Α}=\widehat{Α'}$. Άρα σύμφωνα με το 1° κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

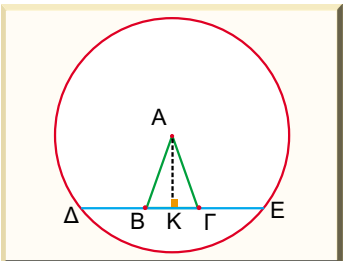


2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Η κορυφή Α ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται στο κέντρο ενός κύκλου ο οποίος τέμνει την ευθεία της βάσης ΒΓ του τριγώνου στα σημεία Δ και Ε. Να αποδείξετε ότι ΔΒ=ΓΕ.

Απόδειξη

Φέρουμε ΑΚ⊥ΔΕ, οπότε ΔΚ=ΚΕ (1) σύμφωνα με το πόρισμα 3.10. Αλλά το ΑΚ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, άρα και διάμεσός του οπότε ΒΚ=ΚΓ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ΔΚ–ΒΚ=ΚΕ–ΚΓ ή ΔΒ=ΓΕ.

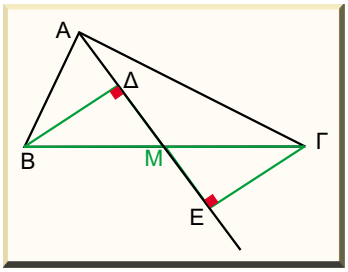


3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Από τις κορυφές Β και Γ φέρουμε τις κάθετες ΒΔ και ΓΕ προς την ευθεία ΑΜ. Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ.

Απόδειξη

Έστω ΑΜ η διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ. Φέρουμε τις κάθετες ΒΔ και ΓΕ προς την ευθεία της διαμέσου. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν ίσες υποτείνουσες, ΒΜ=ΜΓ και από μία οξεία γωνία ίση $\widehat{ΔΜΒ} = \widehat{ΕΜΓ}$ (ως κατακορυφήν). Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα και επομένως ΒΔ=ΓΕ.



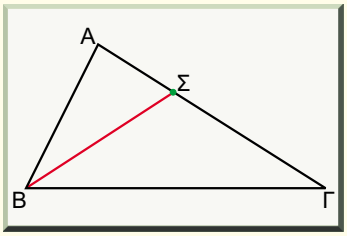
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Τι σχέση έχει η εσωτερική με την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$ σ' ένα τρίγωνο;

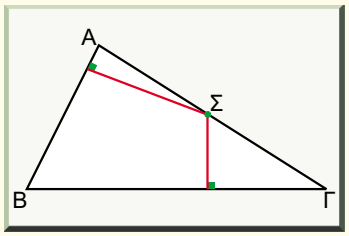
2 Γιατί δύο ισόπλευρα τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα;

3 Για δύο τρίγωνα γνωρίζουμε ότι είναι ορθογώνια, είναι ισοσκελή και μία κάθετη πλευρά του ενός είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου. Είναι ίσα;

4 Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου Σ πάνω στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, τέτοιο ώστε οι αποστάσεις ΣΒ και ΣΓ να είναι ίσες;



5 Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου Σ πάνω στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΓΒ, έτσι ώστε οι αποστάσεις του Σ από τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ να είναι ίσες;



6 Υπάρχει πολύγωνο που δεν έχει διαγώνιες; Υπάρχει πολύγωνο που έχει μόνο δύο διαγώνιες;

7 Είναι σωστό ότι σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται πάντοτε ίσες γωνίες;

8 Τι τρίγωνο είναι εκείνο στο οποίο δύο πλευρές του είναι και ύψη;

9 Να εξηγήσετε για ποιο λόγο όταν δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν κοινή βάση τη ΒΓ, η ευθεία ΑΔ θα είναι η μεσοκάθετος της βάσης αυτής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και στις προεκτάσεις της βάσης του ΒΓ παίρνουμε σημείο Δ, Ε τέτοια ώστε ΔΒ=ΓΕ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι επίσης ισοσκελές.

2 Ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ έχει όλες του τις πλευρές και όλες του τις γωνίες ίσες. Να εξετάσετε αν έχει ίσες και όλες τις διαγώνιές του.

3 Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ προς τις κορυφές Β, Γ, Α και παίρνουμε στις προεκτάσεις τμήματα ΒΕ=ΓΖ=ΑΔ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι επίσης ισόπλευρο.

4 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και δυο ημιευθείες Αx και Αy κάθετες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ και τέτοιες ώστε κάθε μία από τις γωνίες $x\widehat{A}B$ και $y\widehat{A}\Gamma$ να είναι εφεξής με την $\widehat{A}$. Στις Αx και Αy παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ=ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΔΓ=ΒΕ.

5 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στο φορέα της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\widehat{A}$ παίρνουμε δύο σημεία Δ και Ε εκατέρωθεν του Α, τέτοια

ώστε ΑΔ=ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΓΔ.

6 Θεωρούμε έναν κύκλο και μία διάμετρο ΑΒ αυτού. Εκατέρωθεν της ΑΒ παίρνουμε δύο ίσα τόξα $\overset{\frown}{ΑΓ}$ και $\overset{\frown}{ΑΔ}$ και φέρουμε τις χορδές αυτών. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $Γ\hat{Α}Β$ και $Δ\hat{Α}Β$ είναι ίσες.

7 Να αποδείξετε ότι στις αντίστοιχες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διχοτόμοι.

8 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ φέρουμε τα δύο του ύψη ΒΔ και ΓΕ, τα οποία τέμνονται στο σημείο Ζ. Τότε η ΑΖ θα είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$.

9 Σε έναν κύκλο κέντρου Ο χαράσουμε δύο ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι η ΟΚ είναι η διχοτόμος της γωνίας των δύο αυτών χορδών.

10 Δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά ίση και ίσες περιμέτρους. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.

11 Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και τα σημεία Α, Α΄ των πλευρών της και άλλα δύο σημεία Β, Β΄ της διχοτόμου Οδ, ώστε ΟΑ=ΟΒ, ΟΑ΄=ΟΒ΄. Να αποδείξετε ότι ΑΒ΄=Α΄Β.

12 Αν Μ το μέσο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ και Ε, Ζ σημεία των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΕ=ΑΖ. Να αποδείξετε ότι ΜΕ=ΜΖ.

13 Να αποδείξετε ότι τα ίχνη των υψών ισόπλευρου τριγώνου σχηματίζουν επίσης ισόπλευρο τρίγωνο.

14 Δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ με βάσεις ΒΓ και ΔΕ έχουν κοινή την κορυφή τους Α και τις γωνίες της κορυφής Α ίσες. Να δείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ ή ΒΕ=ΓΔ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, μια ακτίνα αυτού ΟΑ και ένα τυχαίο σημείο Κ αυτής. Γράφουμε κύκλο με κέντρο Κ, ο οποίος τέμνει τον κύκλο Ο στα σημεία Β και Γ.
α) Να αποδείξετε ότι $O\hat{B}K = O\hat{Γ}K$.
β) Να εξετάσετε τη θέση της ευθείας ΟΑ ως προς ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.

2 Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις α=2γ και $\hat{B} = 2\hat{Γ}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90°$.

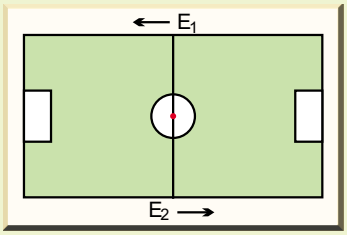
3 Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$, δύο σημεία Α και Β της Ox και δύο σημεία Γ και Δ της Oy τέτοια ώστε ΟΑ=ΟΓ και ΟΒ=ΟΔ. Αν Ι το σημείο τομής των ΒΓ και ΑΔ, να δείξετε ότι:
α) ΑΔ=ΒΓ.
β) Η ΟΙ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}y$.

4 Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ προς το μέρος του Α παίρνουμε τμήματα ΑΕ=ΑΒ και ΑΖ=ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ο φορέας της διαμέσου ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται από το μέσο του ΖΕ.

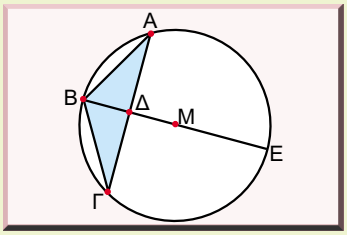
5 Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις διαμέσους που αντιστοιχούν στις άλλες πλευρές ίσες, να αποδειχθεί ότι είναι ίσα.

6 Ένα σημείο Α βρίσκεται εκτός κύκλου και ισαπέχει από δύο σημεία Β και Γ αυτού. Αν οι ευθείες ΑΒ και ΑΓ επανατέμνουν τον κύκλο στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τότε οι χορδές ΒΔ και ΓΕ θα είναι ίσες.

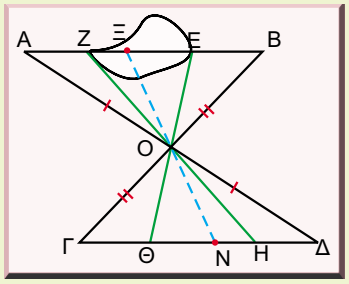
7 Τη στιγμή της έναρξης ενός ποδοσφαιρικού αγώνα οι επόπτες των γραμμών βρίσκονται στα άκρα E_1 και E_2 της μεσαίας γραμμής. Με το σφύριγμα ο διαιτητής Δ παίρνει θέση στο κέντρο του γηπέδου και οι επόπτες κινούνται με το ίδιο βήμα (ίδια ταχύτητα) προς τις περιοχές ελέγχου του ο καθένας. Να εξηγήσετε το λόγο για τον οποίο δεν μπορεί ο ένας επόπτης να βλέπει τον άλλο λόγω παρεμβολής του διαιτητή ανάμεσά τους.



8 Οι εργάτες του Δήμου για να προσδιορίσουν το κέντρο μιας κυκλικής πλατείας ακολούθησαν την παρακάτω διαδικασία. Στην αρχή μέτρησαν δύο ίσες αποστάσεις ΒΑ και ΒΓ με αρχή το σημείο Β. Μετά χάραξαν την ευθεία ΑΓ και πήραν το μέσο Δ του ΑΓ. Στη συνέχεια χάραξαν τη ΒΔ μέχρι την απέναντι μεριά της πλατείας στο σημείο Ε, και τέλος πήραν το μέσο Μ του τμήματος ΒΕ. Στηριζόμενοι σε προτάσεις της Γεωμετρίας να εξηγήσετε την ορθότητα της διαδικασίας αυτής.



9 Στο σχήμα έχουμε ένα έλος το οποίο πρέπει να διασχίσει ένας αγωγός αερίου ΑΒ. Η πρόσβαση στο έλος σ' αυτό το στάδιο είναι αδύνατη και οι μηχανικοί με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος θα υπολογίσουν την απόσταση ΑΒ. Να εξηγήσετε με ποιον τρόπο μπορεί να γίνει αυτό. Πώς μπορούν οι μηχανικοί να υπολογίσουν την απόσταση ΕΖ (Μήκος αγωγού στην περιοχή του έλους); Αν στο σημείο Ξ υπάρχει μία ξέρα, πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση ΑΞ; (Στη διάθεση των μηχανικών υπάρχουν όργανα μέτρησης γωνιών και αποστάσεων σε περιοχές που έχουν πρόσβαση).



10 Μια ευθεία ε τέμνει τις πλευρές μιας γωνίας $x\hat{O}y$ στα σημεία Β και Γ. Αν Δ και Ε σημεία των Ox, Oy ώστε ΟΒ=ΒΔ και ΕΓ=ΟΓ, να δείξετε ότι τα Δ και Ε ισαπέχουν από την ε.

11 Έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Στην ημιευθεία ΑΒ παίρνουμε σημείο Γ΄ έτσι ώστε ΑΓ΄=ΑΓ και στην ημιευθεία ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΑΒ΄=ΑΒ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β΄, Δ, Γ΄ είναι συνευθειακά.

12 Έστω ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ έτσι ώστε ΑΒ=ΕΔ, ΒΓ=ΔΓ και $\hat{B}=\hat{\Delta}$. Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΕ διέρχεται από την κορυφή Γ και διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

3.2 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

Στην παράγραφο 2.4 κάναμε λόγο για πρώτη φορά για την έννοια του Γ.Τ (γεωμετρικού τόπου). Θυμίζουμε ότι "Γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν την ιδιότητα Α είναι ένα σχήμα, που όλα του τα σημεία και μόνο αυτά έχουν αυτή την ιδιότητα Α. Γνωρίσαμε και ένα γεωμετρικό τόπο τον κύκλο. Τα σημεία του όλα και μόνο αυτά έχουν την ιδιότητα "να απέχουν όλα την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο".

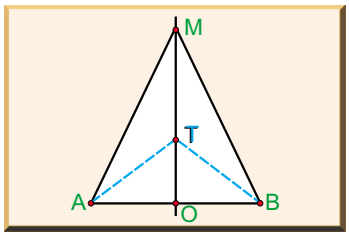
Όπως είδαμε, η φράση "όλα τα σημεία και μόνο αυτά" μας αναγκάζει στα προβλήματα των (Γ.Τ) να διακρίνουμε δύο βήματα στη διαδικασία εύρεσής του. Αυτά τα δύο βήματα εύκολα θα τα διακρίνουμε στις εφαρμογές που ακολουθούν.

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί ο Γ.Τ των σημείων που απέχουν εξίσου από δύο σημεία Α και Β.

Απόδειξη

Έχουμε τα δύο σημεία Α και Β και έστω ένα σημείο Μ με την ιδιότητα να ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή να ισχύει ΜΑ=ΜΒ. Θεωρούμε το μέσο Ο του τμήματος ΑΒ. Το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές (διότι ΜΑ=ΜΒ) και η ΜΟ είναι διάμεσός του (το Ο είναι μέσο). Άρα σύμφωνα με το πόρισμα 3.8 η ΜΟ είναι και ύψος. Δηλαδή, η ευθεία ΜΟ είναι μεσοκάθετη του ΑΒ. Επομένως το Μ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΑΒ.



Αντιστρόφως

Αν θεωρήσουμε τώρα ένα οποιοδήποτε σημείο Τ της μεσοκάθετης, στο τρίγωνο ΤΑΒ η ΤΟ είναι και ύψος και διάμεσος. Άρα το τρίγωνο ΤΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε ΤΑ=ΤΒ. Άρα το Τ ισαπέχει από τα Α και Β.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο Γ.Τ των σημείων που ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία Α και Β είναι η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

3.3 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

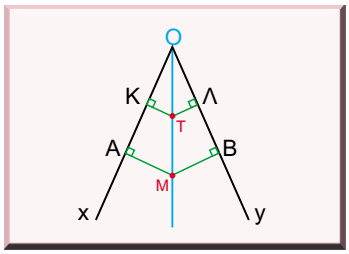
Να πάρετε δύο σημεία Α και Β και να χαράξετε όλα τα σημεία που ισαπέχουν από τα Α και Β. Να πάρετε μετά ακόμη ένα σημείο Γ και να χαράξετε όλα τα σημεία που ισαπέχουν από τα Β και Γ. Υπάρχει σημείο που ισαπέχει και από τα τρία σημεία Α, Β και Γ;

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί ο Γ.Τ των σημείων που απέχουν εξίσου από τις πλευρές μιας γωνίας.

Απόδειξη

Έστω η γωνία $x\hat{O}y$, Μ ένα σημείο και ΜΑ, ΜΒ οι αποστάσεις του από τις πλευρές Ox και Oy της γωνίας $x\hat{O}y$. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΜΒ έχουν κοινή υποτείνουσα την ΜΟ και από μία κάθετη πλευρά (ΜΑ και ΜΒ) αντίστοιχα ίσες. Άρα είναι ίσα και επομένως οι γωνίες $A\hat{O}M$ και $B\hat{O}M$ είναι ίσες, δηλαδή το Μ ανήκει στη διχοτόμο της $x\hat{O}y$.



Αντιστρόφως

Αν τώρα θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο Τ της διχοτόμου της $x\hat{O}y$ και φέρουμε τις αποστάσεις ΤΚ και ΤΛ, θα παρατηρήσουμε ότι τα τρίγωνα ΤΟΚ και ΤΟΛ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια, έχουν κοινή υποτείνουσα (την ΤΟ) και έχουν και από μια προσκείμενη γωνία αντίστοιχα ίση ($K\hat{O}T = \Lambda\hat{O}T$). Άρα τα τρίγωνα ΤΟΚ και ΤΟΛ θα είναι ίσα οπότε ΤΚ=ΤΛ. Δηλαδή το Τ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $x\hat{O}y$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο Γ.Τ των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας είναι η διχοτόμος της (σύμφωνα με το πόρισμα 3.12).

3.4 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε όλα τα σημεία που ισαπέχουν από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Μετά να προσδιορίσετε όλα τα σημεία που ισαπέχουν από τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ. Να προσδιορίσετε τελικά τα σημεία που ισαπέχουν και από τις τρεις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) για ποιο λόγο κάθε σημείο του ύψους προς τη βάση ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου;

2 Στο ισοσκελές τρίγωνο να εξηγήσετε το λόγο για τον οποίο κάθε σημείο της διαμέσου προς τη βάση ισαπέχει από τα άκρα της βάσης.

3 Αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α πώς μπορούμε να βρούμε όλα τα σημεία που απέχουν από το Α απόσταση α; Πώς μπορούμε να βρούμε όλα τα σημεία που απέχουν από το Β απόσταση α; Ποιο είναι μετά απ' όλα αυτά το σημείο που απέχει και από το Α και από το Β απόσταση α; Τι είδους τριγώνου μπορούμε να κατασκευάσουμε με την παραπάνω διαδικασία;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Να βρεθεί ο Γ.Τ των κέντρων του κύκλου, οι οποίοι διέρχονται από δύο σημεία Α και Β.

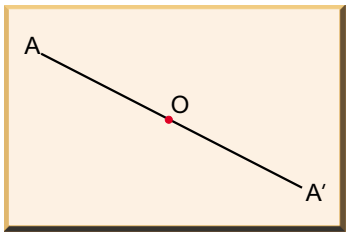
2 Να βρεθεί ο Γ.Τ των σημείων που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες.

3 Να βρεθεί ο Γ.Τ των μέσων των χορδών ενός κύκλου (Ο,ρ), οι οποίες χορδές έχουν σταθερό μήκος α.

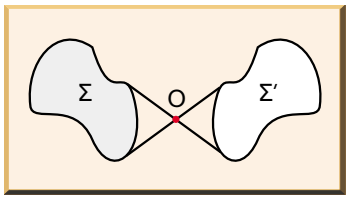
4 Θεωρούμε μια σταθερή γωνία $x\hat{O}y$ και δύο σημεία Α και Β των πλευρών της Ox, Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ=ΟΒ. Αν τα σημεία Α και Β κινούνται πάνω στις πλευρές της γωνίας διατηρώντας την ισότητα ΟΑ=ΟΒ, να βρεθεί ο Γ.Τ του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

5 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΒΓ μένει σταθερή και ως προς τη θέση και ως προς το μήκος της. Από τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου η διάμεσος μ_α διατηρεί το μήκος της σταθερό. Να βρεθεί ο Γ.Τ της κορυφής Α του τριγώνου.

6 Να βρεθεί ο Γ.Τ των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι περνούν από ένα σημείο Α και έχουν την ίδια ακτίνα ρ.



Έχουμε δύο σημεία τα Α και Ο. Φέρουμε το τμήμα ΑΟ και το προεκτείνουμε κατά τμήμα ΟΑ΄ τέτοιο, ώστε ΟΑ΄=ΟΑ. Τα σημεία Α και Α΄ ονομάζονται συμμετρικά ως προς το Ο και το σημείο Ο κέντρο συμμετρίας.

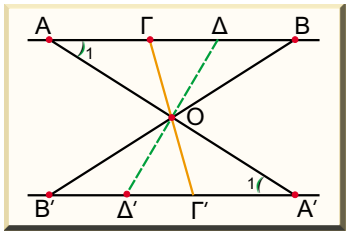


Τα συμμετρικά όλων των σημείων ενός σχήματος Σ ως προς ένα σημείο Ο αποτελούν ένα νέο σχήμα Σ΄ το οποίο καλείται **συμμετρικό του Σ ως προς το Ο**. Τα δύο σχήματα Σ και Σ΄ καλούνται **συμμετρικά ως προς το Ο**.

Θεώρημα 3.9

Το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως προς σημείο Ο είναι ευθύγραμμο τμήμα Α΄Β΄, όπου Α΄ και Β΄ τα συμμετρικά των Α και Β ως προς το Ο.

Απόδειξη



Αρκεί να δείξουμε ότι το συμμετρικό Γ΄ τυχαίου σημείου Γ του ΑΒ ανήκει στο Α΄Β΄ και ακόμη ότι το συμμετρικό Δ τυχαίου σημείου Δ΄ του Α΄Β΄ ανήκει στο τμήμα ΑΒ.

Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑ΄Β΄ είναι ίσα (ΟΑ=ΟΑ΄, ΟΒ=ΟΒ΄, $A\widehat{O}B = A'\widehat{O}B'$), άρα είναι ίσες και οι γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{A}'_1$. Έστω Γ τυχαίο σημείο του ΑΒ και Γ΄ η τομή της ΓΟ με το Α΄Β΄. Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΓ΄Α΄ έχουν ΟΑ=ΟΑ΄, $\widehat{A}_1 = \widehat{A}'_1$, $\Gamma\widehat{O}A = \Gamma'\widehat{O}A'$, άρα είναι ίσα και ΟΓ΄=ΟΓ. Άρα το συμμετρικό του Γ ως προς το Ο είναι το Γ΄.

Έστω Δ΄ τυχαίο σημείο του Α΄Β΄ και Δ η τομή της ευθείας Δ΄Ο και του τμήματος ΑΒ. Τα τρίγωνα ΟΔΑ και ΟΔ΄Α΄ είναι ίσα (ΑΟ=ΟΑ΄, $\widehat{A}_1 = \widehat{A}'_1$, $\Delta'\widehat{O}A' = \Delta\widehat{O}A$), επομένως και ΟΔ=ΟΔ΄, δηλαδή το Δ είναι συμμετρικό του Δ΄ ως προς το Ο. ■

Παρατήρηση

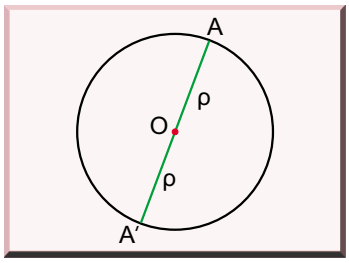
Αν το Ο ανήκει στον φορέα του ΑΒ η απόδειξη είναι παρόμοια.

Πόρισμα 3.14

Το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ως προς σημείο είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το αρχικό.

Πόρισμα 3.15

Το συμμετρικό τριγώνου ως προς σημείο Ο είναι τρίγωνο ίσο προς το αρχικό.



Έστω ένας κύκλος (Ο,ρ) και ένα τυχαίο σημείο του Α. Αν ΑΑ΄ μία διάμετρος του κύκλου, είναι ΑΟ=Α΄Ο. Άρα τα Α και Α΄ είναι συμμετρικά ως προς το Ο. Δηλαδή το συμμετρικό του κύκλου (Ο,ρ) ως προς το Ο είναι ο ίδιος ο κύκλος.

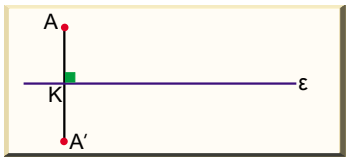
Ορισμός

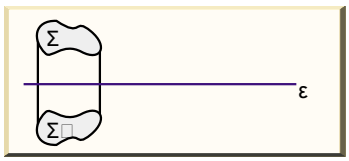
Λέμε ότι ένα σχήμα Σ έχει κέντρο συμμετρίας το Κ όταν το συμμετρικό του Σ ως προς το Κ είναι το ίδιο το σχήμα Σ.
Ο κύκλος, λοιπόν, είναι ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας το κέντρο του.

3.5 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1) Να βρείτε το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος ως προς το μέσο του.
2) Να βρείτε το συμμετρικό μιας ευθείας ως προς ένα τυχαίο σημείο της.
3) Να διατυπώσετε τα σχετικά συμπεράσματα.
4) Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό κύκλου ως προς σημείο Κ είναι κύκλος ίσος προς τον αρχικό.

3.3.2 Αξονική συμμετρία

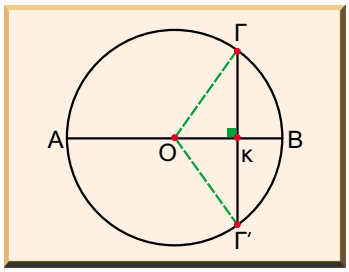




Θεωρούμε ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Έστω Κ η ορθή προβολή του Α στην ε και στην προέκτασή της ΑΚ θεωρούμε τμήμα ΚΑ΄=ΚΑ. Το σημείο Α΄ καλείται **συμμετρικό του Α ως προς την ε**. Λέμε ακόμη ότι τα σημεία Α και Α΄ είναι **συμμετρικά ως προς την ε**.

Τα συμμετρικά όλων των σημείων ενός σχήματος Σ ως προς μια ευθεία ε αποτελούν ένα σχήμα Σ΄ το οποίο καλείται **συμμετρικό του Σ ως προς την ε**.

Έστω ένας κύκλος (Ο,ρ), ΑΒ μια τυχαία διάμετρός του και Γ ένα τυχαίο σημείο του. Φέρουμε την ΓΚ⊥ΑΒ η οποία και τέμνει τον κύκλο σε ένα τυχαίο σημείο, το Γ΄. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΟΓ΄ το ΟΚ είναι ύψος, άρα το ΟΚ είναι και διάμεσος. Οπότε ΚΓ΄=ΚΓ ή αλλιώς το συμμετρικό του Γ είναι το Γ΄. Κάθε σημείο, λοιπόν, του κύκλου έχει για συμμετρικό ένα σημείο του κύκλου, δηλαδή ο κύκλος έχει για συμμετρικό τον εαυτό του.



Ορισμός

Ένα σχήμα Σ λέμε ότι έχει άξονα συμμετρίας μία ευθεία ε όταν το συμμετρικό του Σ ως προς την ε είναι το ίδιο το Σ.

Παρατήρηση

Άρα ο κύκλος είναι ένα σχήμα με άπειρους άξονες συμμετρίας.

Αποδεικνύεται επίσης ότι:

Θεώρημα 3.10

Το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως προς ευθεία ε είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα Α΄Β΄, όπου Α΄ και Β΄ τα συμμετρικά των Α και Β ως προς την ευθεία ε.

3.6 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να εντοπίσετε τους άξονες συμμετρίας στα παρακάτω σχήματα:

1) Ισοσκελές τρίγωνο.
2) Γωνία.
3) Ευθεία.
4) Ευθύγραμμο τμήμα.

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

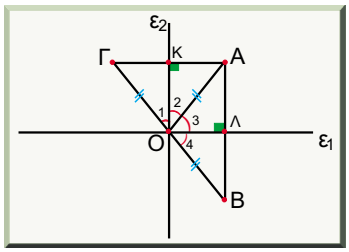
Αν ένα σχήμα έχει δύο άξονες συμμετρίας που τέμνονται κάθετα, τότε θα έχει και κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής τους.

Απόδειξη

Έστω $ε_1$, $ε_2$ οι δύο άξονες συμμετρίας που τέμνονται κάθετα και

έστω Ο το σημείο τομής τους. Αν Α τυχαίο σημείο του σχήματος και Β το συμμετρικό του Α ως προς ε_1, τότε το Β, εφόσον το ε_1 είναι άξονας συμμετρίας, είναι σημείο του σχήματος.

Όμοια, αν Γ το συμμετρικό του Α ως προς ε_2, το Γ είναι και αυτό σημείο του σχήματος. Από την ισότητα των τριγώνων ΟΑΚ, ΟΓΚ και ΟΑΛ, ΟΒΛ προκύπτει ότι ΟΑ=ΟΓ και ΟΑ=ΟΒ, άρα ΟΓ=ΟΒ (1), και $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$, $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$, αλλά $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ$, άρα Γ, Ο, Β συνευθειακά. Επειδή ΟΓ=ΟΒ και Γ, Ο, Β συνευθειακά, το Ο είναι κέντρο συμμετρίας.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Το συμμετρικό μιας ακτίνας ενός κύκλου (Ο,ρ) ως προς το κέντρο του κύκλου τι στοιχείο του κύκλου είναι;

2 Το συμμετρικό μιας διαμέτρου ενός κύκλου ως προς το κέντρο του ποιο είναι;

3 Ποιο είναι το συμμετρικό μιας ημιευθείας Ox ως προς την αρχή της;

4 Να σχεδιάσετε το συμμετρικό ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ)
α) ως προς την κορυφή του Α.
β) ως προς την ευθεία του ύψους του προς τη βάση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς σημείο Ο είναι τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ.

2 Το συμμετρικό ενός τριγώνου ως προς ευθεία είναι τρίγωνο ίσο μ' αυτό.

3 Το συμμετρικό μιας γωνίας $x\widehat{O}y$ ως προς ένα σημείο Κ είναι μια γωνία ίση με την $x\widehat{O}y$.

4 Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό μιας ημιευθείας Ox ως προς ένα σημείο Κ είναι μια ημιευθεία.

5 Δίνονται τα σημεία Α και Β και ένα σημείο Ο. Αν Γ και Δ τα συμμετρικά των Α και Β αντίστοιχα ως προς το Ο, να προσδιορίσετε το συμμετρικό του σχήματος ΑΒΓΔ ως προς το Ο.

3.4 Ανισοτικές σχέσεις

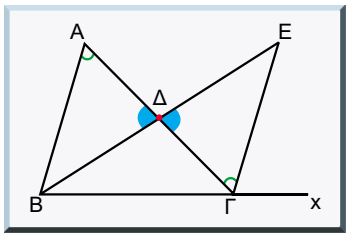
3.4.1 Σχέσεις εξωτερικής και απέναντι εσωτερικής γωνίας τριγώνου

Θεώρημα 3.11

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη καθεμιάς από τις δύο απέναντι εσωτερικές.

Απόδειξη

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και $\widehat{\text{ΑΓx}}$ η εξωτερική γωνία. Θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\widehat{\text{ΑΓx}}$ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $\widehat{\text{Α}}$. Αν θεωρήσουμε το μέσο Δ της ΑΓ και προεκτείνουμε τη ΒΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΔΒ, τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΔΕ έχουν: ΑΔ=ΔΓ, ΒΔ=ΔΕ και $\widehat{\text{ΑΔΒ}} = \widehat{\text{ΕΔΓ}}$ (ως κατακορυφήν). Σύμφωνα με το 1° κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π) είναι ίσα άρα $\widehat{\text{Α}} = \widehat{\text{ΔΓΕ}}$. Επειδή η ΓΕ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $\widehat{\text{ΑΓx}}$, θα ισχύει $\widehat{\text{ΑΓx}} > \widehat{\text{ΔΓΕ}}$, άρα και $\widehat{\text{ΑΓx}} > \widehat{\text{Α}}$.



Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\widehat{\text{ΑΓx}} > \widehat{\text{Β}}$. ■

Πόρισμα 3.16

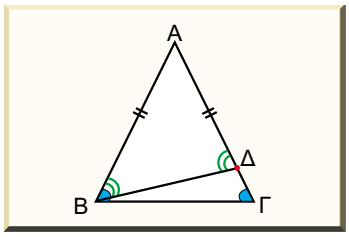
Κάθε τρίγωνο έχει τουλάχιστον δύο οξείες γωνίες.

Θεώρημα 3.12

Κάθε τρίγωνο που έχει δύο γωνίες ίσες μεταξύ τους είναι ισοσκελές.

Απόδειξη

Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\text{Β}} = \widehat{\text{Γ}}$ και ΑΒ<ΑΓ. Τότε θα υπάρχει ένα σημείο Δ της ΑΓ τέτοιο, ώστε ΑΔ=ΑΒ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ θα είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{\text{ΑΒΔ}} = \widehat{\text{ΑΔΒ}}$. Όμως η $\widehat{\text{ΑΔΒ}}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΔΓ, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα 3.11 θα έχουμε $\widehat{\text{ΑΔΒ}} > \widehat{\text{Γ}}$ ή $\widehat{\text{ΑΒΔ}} > \widehat{\text{Β}}$, πράγμα άτοπο γιατί $\widehat{\text{ΑΒΔ}} < \widehat{\text{Β}}$.



Άρα ΑΒ=ΑΓ. ■

Πόρισμα 3.17

Κάθε τρίγωνο που έχει τρεις γωνίες ίσες μεταξύ τους είναι ισόπλευρο.

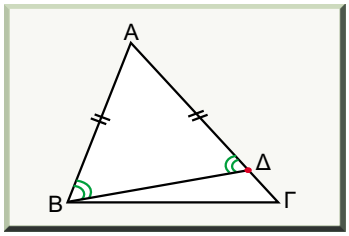
3.4.2 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών τριγώνου

Θεώρημα 3.13

Σε ένα τρίγωνο οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από άνισες πλευρές είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντιστρόφως.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει ΑΓ>ΑΒ. Θα αποδείξουμε ότι $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$. Παίρνουμε πάνω στην ΑΓ ένα σημείο Δ έτσι, ώστε ΑΔ=ΑΒ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΔ και θα ισχύει $A\widehat{B}\Delta = A\widehat{\Delta}B$ (1). Όμως στο τρίγωνο ΒΓΔ η $A\widehat{\Delta}B$ είναι εξωτερική γωνία και θα ισχύει $A\widehat{\Delta}B > \widehat{\Gamma}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $A\widehat{B}\Delta > \widehat{\Gamma}$. Επειδή η ΒΔ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $A\widehat{B}\Gamma$, θα έχουμε $A\widehat{B}\Gamma > A\widehat{B}\Delta$ ή $A\widehat{B}\Gamma > \widehat{\Gamma}$ ή $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$.



Αντιστρόφως

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$. Θα αποδείξουμε ότι ΑΓ>ΑΒ αποκλείοντας τις περιπτώσεις ΑΓ=ΑΒ και ΑΓ<ΑΒ. Αν ήταν ΑΓ=ΑΒ, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ θα ήταν ισοσκελές με $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, άρα αποκλείεται ΑΓ=ΑΒ. Αν ήταν ΑΓ<ΑΒ, τότε θα ήταν $\widehat{B} < \widehat{\Gamma}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, άρα αποκλείεται να ισχύει και η ανισότητα ΑΓ<ΑΒ. Συνεπώς ΑΓ>ΑΒ.

Πόρισμα 3.18

Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη και η μικρότερη πλευρά έχουν απέναντί τους τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη γωνία αντίστοιχα.

Πόρισμα 3.19

Η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι η μεγαλύτερη απ' όλες τις πλευρές.

Πόρισμα 3.20

Σ' ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο μεγαλύτερη πλευρά είναι εκείνη που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία του.

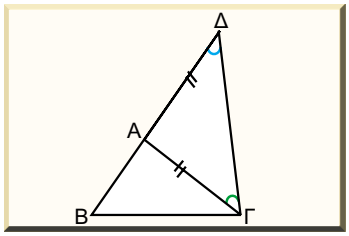
3.4.3 Τριγωνική ανισότητα

Θεώρημα 3.14

Σε κάθε τρίγωνο κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Απόδειξη

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΓ>ΑΒ. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει ΑΓ–ΑΒ<ΒΓ<ΑΓ+ΑΒ.



α) Πρώτα θα αποδείξουμε ότι ισχύει ΒΓ<ΑΓ+ΑΒ. Το άθροισμα ΑΒ+ΑΓ θα το δημιουργήσουμε προεκτείνοντας τη ΒΑ κατά τμήμα ΑΔ τέτοιο, ώστε ΑΔ=ΑΓ, οπότε ΑΒ+ΑΓ=ΒΔ. Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές άρα $\widehat{ΑΔΓ} = \widehat{ΑΓΔ}$. Επειδή η ΓΑ είναι εσωτερική της γωνίας $\widehat{ΒΓΔ}$, θα έχουμε $\widehat{ΒΓΔ} > \widehat{ΑΓΔ}$ και κατά συνέπεια $\widehat{ΒΓΔ} > \widehat{ΒΔΓ}$. Τότε όμως στο τρίγωνο ΒΓΔ, σύμφωνα με το θεώρημα 3.13, ισχύει ΒΓ<ΒΔ ή ΒΓ<ΑΓ+ΑΒ.

β) Θα αποδείξουμε ότι ισχύει ΑΓ–ΑΒ<ΒΓ. Η προηγούμενη ανισότητα που αποδείξαμε ισχύει για κάθε πλευρά του τριγώνου. Άρα θα έχουμε ΑΓ<ΒΓ+ΑΒ ή ΑΓ–ΑΒ<ΒΓ+ΑΒ–ΑΒ και τελικά ΑΓ–ΑΒ<ΒΓ. ■

Πόρισμα 3.21

Το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα ίδια άκρα με μία τεθλασμένη γραμμή έχει μήκος μικρότερο από την περίμετρο (άθροισμα πλευρών) αυτής.

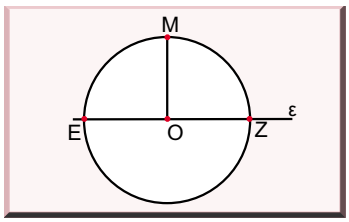
3.4.4 Κάθετες και πλάγιες ευθείες

Θεώρημα 3.15

Σε τυχαίο σημείο ευθείας μπορούμε να φέρουμε μια και μοναδική κάθετη προς την ευθεία αυτή.

Απόδειξη

Στο Κεφάλαιο 2 αποδείξαμε τη μοναδικότητα της κάθετης, εφόσον υπάρχει. Τώρα θα αποδείξουμε την ύπαρξή της.



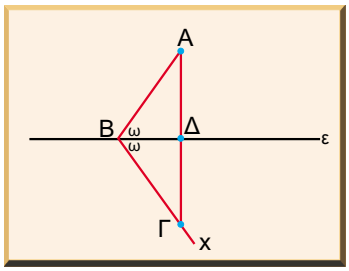
Έστω ευθεία ε και ένα σημείο της Ο. Γράφουμε κύκλο (Ο,ρ) που τέμνει την ε στα σημεία Ε και Ζ. Αν Μ το μέσο του $\overset{\frown}{ΕΖ}$, οι γωνίες $\widehat{ΕΟΜ}$ και $\widehat{ΜΟΖ}$ είναι ίσες και παραπληρωματικές, άρα $\widehat{ΕΟΜ} = \widehat{ΜΟΖ} = 90°$, οπότε η ΜΟ είναι η ζητούμενη κάθετη. ■

Θεώρημα 3.16

Από σημείο Α εκτός ευθείας ε μπορουμε να φέρουμε μία και μοναδική κάθετη προς αυτήν.

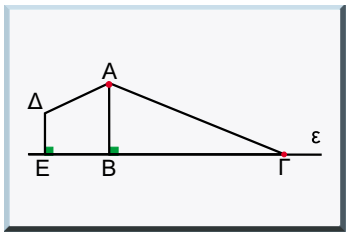
Απόδειξη

Στο Κεφάλαιο 2 αποδείξαμε τη μοναδικότητα της κάθετης, εφόσον υπάρχει. Τώρα θα αποδείξουμε την ύπαρξή της.



Έστω η ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Θεωρούμε ένα σημείο Β της ε. Αν η ΑΒ σχηματίζει με την ευθεία ε ορθή γωνία, τότε η ΑΒ είναι η ζητούμενη κάθετη. Διαφορετικά η ΑΒ σχηματίζει με την ε μία γωνία, την $\widehat{ABε} = \widehat{ω}$. Στο ημιεπίπεδο που δε βρίσκεται το Α θεωρούμε ημιευθεία Βx έτσι, ώστε οι γωνίες $\widehat{ABε}$ και $\widehat{εBx}$ να είναι ίσες και εφεξής και στη Βx παίρνουμε σημείο Γ τέτοιο, ώστε ΒΓ=ΒΑ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και το τμήμα ΑΓ τέμνει την ε (τα Α και Γ ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα) στο Δ. Η ΒΔ είναι διχοτόμος ($\widehat{ABε} = \widehat{εBΓ}$) του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, άρα θα είναι και ύψος του. Συνεπώς $\widehat{AΔB} = 90°$, οπότε η ζητούμενη κάθετη είναι η ΑΔ. ■

Προβολές - Ίχνη



Θεωρούμε ευθεία ε, ένα σημείο Γ αυτής και τα σημεία Α και Δ εκτός αυτής. Αν Ε και Β οι ορθές προβολές των Δ και Α αντίστοιχα στην ε, τότε προβολή του τμήματος ΑΔ είναι το τμήμα ΒΕ και προβολή του ΑΓ είναι το τμήμα ΒΓ. Γίνεται φανερό ότι η **προβολή τμήματος** πάνω σε μία ευθεία είναι ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τις προβολές των άκρων.

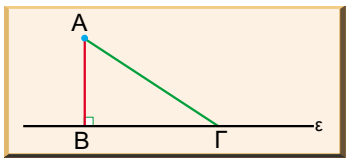
Το τμήμα ΑΓ λέγεται **πλάγιο τμήμα** προς την ευθεία ε. Το σημείο Β καλείται **ίχνος** της κάθετης, και το σημείο Γ λέγεται **ίχνος** της πλάγιας.

Απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από το σημείο Α στην ε. Στο σχήμα μας απόσταση του Α από την ε είναι το τμήμα ΑΒ.

Πόρισμα 3.22

Το κάθετο τμήμα ΑΒ από σημείο Α προς ευθεία ε είναι το μικρότερο από κάθε πλάγιο τμήμα ΑΓ προς την ίδια ευθεία.

Απόδειξη



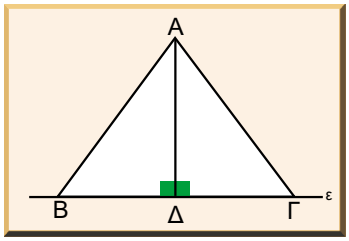
Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΒ είναι κάθετη πλευρά του και η ΑΓ υποτείνουσα. Άρα σύμφωνα με το πόρισμα 3.19 ισχύει ΑΒ<ΑΓ. ■

Θεώρημα 3.17

Τα ίχνη δύο ίσων πλάγιων τμημάτων ΑΒ και ΑΓ, που άγονται από το ίδιο σημείο προς μία ευθεία ε, ισαπέχουν από το ίχνος Δ της κάθετης ΑΔ, που άγεται από το ίδιο σημείο Α και αντιστρόφως.

Απόδειξη

Από σημείο Α εκτός ευθείας ε φέρουμε δύο ίσα πλάγια ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ και το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και το ΑΔ είναι ύψος. Άρα το ΑΔ θα είναι και διάμεσος, οπότε ΔΒ=ΔΓ.



Αντιστρόφως

Έστω ΔΒ=ΔΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΑΔ είναι και ύψος και διάμεσος. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΒ=ΑΓ. ■

Θεώρημα 3.18

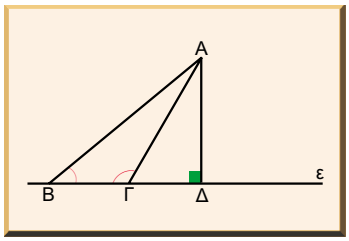
Τα ίχνη δύο άνισων πλάγιων τμημάτων, που άγονται από το ίδιο σημείο απέχουν ομοιοτρόπως άνισα από το ίχνος της κάθετης και αντιστρόφως.

Απόδειξη

α) Θα αποδείξουμε πρώτα το αντίστροφο.

Έστω ΑΒ και ΑΓ τα δύο πλάγια τμήματα, ΑΔ το κάθετο και ΔΒ>ΔΓ.

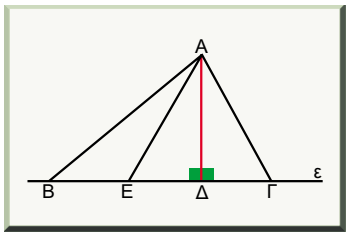
Έστω ακόμη ότι τα ΑΒ και ΑΓ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ΑΔ. Η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι αμβλεία σαν εξωτερική του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ, άρα είναι η μεγαλύτερη του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε και η απέναντί της πλευρά η ΑΒ είναι η μεγαλύτερη του τριγώνου αυτού, άρα ΑΒ>ΑΓ.



Αν τα ΑΒ και ΑΓ βρίσκονται εκατέρωθεν του ΑΔ, θεωρούμε το συμμετρικό Ε του Γ ως προς Δ οπότε ΔΕ=ΔΓ άρα και ΑΕ=ΑΓ σύμφωνα με το θεώρημα 3.17.

Επομένως το Ε είναι ενδιάμεσο των Β και Δ. Επειδή ΔΒ>ΔΓ θα είναι ΔΒ>ΔΕ οπότε ΑΒ>ΑΕ ή ΑΒ>ΑΓ.

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι μεγαλύτερη απόσταση από το Δ απέχει το ίχνος της μεγαλύτερης πλάγιας.



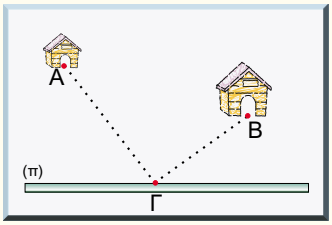
β) Αν ΑΒ>ΑΓ, θα αποδείξουμε ότι ΔΒ>ΔΓ αποκλείοντας τις περιπτώσεις ΔΒ=ΔΓ και ΔΒ<ΔΓ.

Αν ΔΒ=ΔΓ θα ήταν και ΑΒ=ΑΓ, πράγμα άτοπο.

Αν ΔΒ<ΔΓ θα ήταν και ΑΒ<ΑΓ πράγμα πάλι άτοπο. Δε μένει, λοιπόν, παρά να ισχύει ΔΒ>ΔΓ. ■

3.7 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1) Έχουμε μία αγροτική περιοχή, όπου π είναι το ευθύγραμμο κομμάτι ενός ποταμού. Στο σημείο Α βρίσκεται το σπίτι ενός αγρότη και στο σημείο Β ο σταύλος με τα ζώα. Ο αγρότης θα ξεκινήσει από το σπίτι του (σημείο Α), θα περάσει από ένα οποιοδήποτε σημείο Γ του ποταμού για να πάρει νερό και να το μεταφέρει στο σταύλο με τα ζώα (σημείο Β). Να τον βοηθήσετε να ακολουθήσει τη συντομότερη διαδρομή.



2) Στο μάθημα της γεωμετρίας ο καθηγητής ανέθεσε σε μια ομάδα παιδιών να σχεδιάσει το καθένα από ένα τρίγωνο που το μήκος καθεμιάς πλευράς θα είναι 3 cm ή 7 cm. Σε μία δεύτερη ομάδα ανέθεσε το ίδιο πρόβλημα αλλά με το μήκος καθεμιάς πλευράς 3 cm ή 5 cm. Κάποιο παιδί της δεύτερης ομάδας παρατήρησε ότι είναι δυνατό η ομάδα του να κατασκευάσει τέσσερα διαφορετικά τρίγωνα. Είναι σωστή η παρατήρησή του; Ισχύει μήπως η παρατήρηση αυτή και για την πρώτη ομάδα;

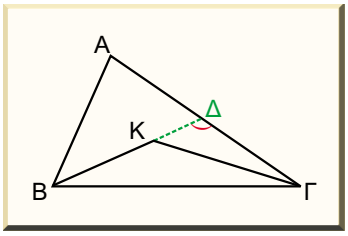
1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν Κ εσωτερικό σημείο τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) ΚΒ+ΚΓ<ΑΒ+ΑΓ.

β) $\widehat{ΒΑΓ} < \widehat{ΒΚΓ}$.

Απόδειξη



α) Έστω Δ το σημείο τομής της ΒΚ με την ΑΓ. Έτσι

$$ΒΔ<ΑΒ+ΑΔ \quad ή \quad ΒΚ<ΑΒ+ΑΔ-ΚΔ \qquad (1)$$

Αλλά

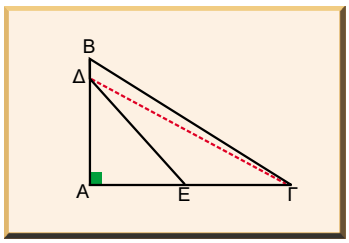
$$ΚΓ<ΚΔ+ΔΓ \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ΒΚ+ΚΓ<ΑΒ+ΑΔ+ΔΓ ή ΒΚ+ΚΓ<ΑΒ+ΑΓ.

β) Η γωνία $\widehat{ΒΚΓ}$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΚΓΔ άρα $\widehat{ΒΚΓ} > \widehat{ΚΔΓ}$. Η γωνία όμως $\widehat{ΚΔΓ}$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΒΔ, άρα $\widehat{ΚΔΓ} > \widehat{ΒΑΓ}$. Τελικά από τις δυο αυτές ανισότητες προκύπτει $\widehat{ΒΚΓ} > \widehat{ΒΑΓ}$.

2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) και δύο σημεία Δ και Ε στις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΔΕ<ΒΓ.



Απόδειξη

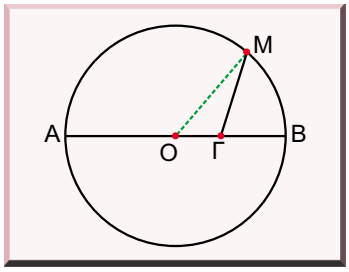
Για τα πλάγια από το Δ προς την ΑΓ τμήματα ΔΕ και ΔΓ έχουμε ΑΕ<ΑΓ, οπότε ΔΕ<ΔΓ (1)

Ομοίως για τα πλάγια από το Γ προς την ΑΒ τμήματα ΓΔ και ΓΒ έχουμε ΑΔ<ΑΒ, οπότε ΓΔ<ΓΒ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ΔΕ<ΒΓ.

3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε μια διάμετρο ΑΒ και ένα σημείο Γ εσωτερικό του ΟΒ. Αν Μ ένα τυχαίο σημείο του κύκλου, να αποδείξετε ότι ΓΒ≤ΜΓ≤ΓΑ.



Απόδειξη

Στο τρίγωνο ΜΟΓ ισχύει η τριγωνική ανισότητα, οπότε

ΜΓ<ΟΓ+ΟΜ ή ΜΓ<ΟΓ+ΟΑ ή ΜΓ<ΓΑ (1)

ΜΓ>ΟΜ–ΟΓ ή ΜΓ>ΟΒ–ΟΓ ή ΜΓ>ΓΒ (2)

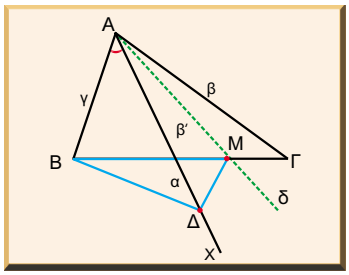
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ΓΒ<ΜΓ<ΓΑ.

Αν το Μ βρίσκεται στη θέση Β ισχύει ΓΒ=ΜΓ, και αν βρίσκεται στη θέση του Α ισχύει ΜΓ=ΓΑ. Συνεπώς σε κάθε περίπτωση έχουμε ΓΒ≤ΜΓ≤ΓΑ

4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

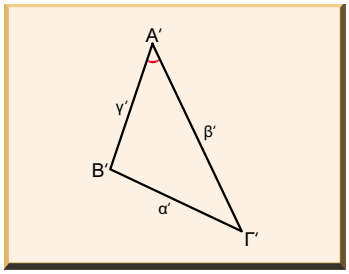
Δύο τρίγωνα αν έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε οι τρίτες τους πλευρές είναι άνισες αν και μόνο αν οι απέναντί τους γωνίες είναι ομοιοτρόπως άνισες.

Απόδειξη



Θεωρούμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με ΑΒ=Α΄Β΄, ΑΓ=Α΄Γ΄ και $\widehat{A} > \widehat{A'}$. Θεωρούμε την ημιευθεία Αx στο εσωτερικό της $\widehat{A}$ έτσι, ώστε $B\widehat{A}x = \widehat{A'}$ και το σημείο Δ της Αx τέτοιο, ώστε ΑΔ=β΄. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα επειδή έχουν ίσες τις πλευρές γ=γ΄ και ΑΔ=β΄ καθώς και τις περιεχόμενες των ίσων πλευρών γωνίες $B\widehat{A}\Delta$ και $\widehat{A'}$, άρα ΒΔ=α΄. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ΒΓ>ΒΔ.

Πράγματι θεωρούμε τη διχοτόμο Αδ της $\Delta\widehat{A}\Gamma$, η οποία τέμνει τη ΒΓ εσωτερικά στο Μ. Στο τρίγωνο ΔΜΒ ισχύει ΒΜ+ΜΔ>ΒΔ. Επειδή όμως ΜΔ=ΜΓ, καθότι τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΓ είναι ίσα, τελικά προκύπτει ΒΜ+ΜΓ>ΒΔ ή ΒΓ>ΒΔ.



Αντιστρόφως

Αν β=β΄, γ=γ΄ και α>α΄, τότε θ' αποδείξουμε ότι $\widehat{A} > \widehat{A'}$ αποκλείοντας τις περιπτώσεις $\widehat{A} = \widehat{A'}$ και $\widehat{A} < \widehat{A'}$. Πράγματι αν $\widehat{A} = \widehat{A'}$, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ θα ήτανι ίσα, άρα και α=α΄, πράγμα άτοπο. Αν $\widehat{A} < \widehat{A'}$, τότε σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη θα έπρεπε α<α΄, πράγμα άτοπο. Συνεπώς θα ισχύει $\widehat{A} > \widehat{A'}$.

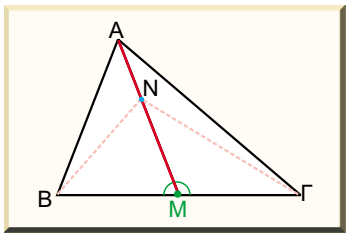
5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ>ΑΒ, ΑΜ η διάμεσός του και Ν σημείο της ΑΜ. Να δείξετε ότι:

α) $A\widehat{M}\Gamma > A\widehat{M}B$.

β) **ΝΓ>ΝΒ.**

Απόδειξη



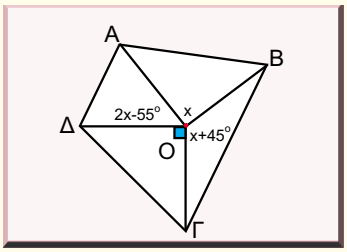
α) Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ έχουν ΒΜ=ΜΓ, ΑΜ κοινή και ΑΓ>ΑΒ. Δηλαδή δύο πλευρές ίσες και τις τρίτες άνισες. Άρα θα έχουν ομοιοτρόπως άνισες και τις περιεχόμενες γωνίες των ίσων πλευρών, δηλαδή $A\widehat{M}\Gamma > A\widehat{M}B$.

β) Τα τρίγωνα ΒΜΝ και ΝΜΓ έχουν ΒΜ=ΜΓ, ΜΝ κοινή και $N\widehat{M}\Gamma > N\widehat{M}B$, δηλαδή έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες αυτών άνισες. Άρα θα έχουν ομοιοτρόπως άνισες και τις τρίτες πλευρές τους, δηλαδή ΝΓ>ΝΒ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

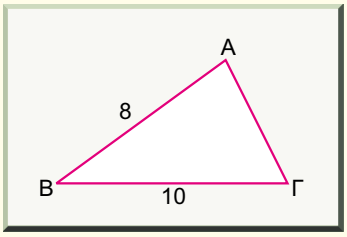
1 Γιατί η διάμετρος ενός κύκλου είναι η μεγαλύτερη απ' όλες τις χορδές;

2 Αν ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ, να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

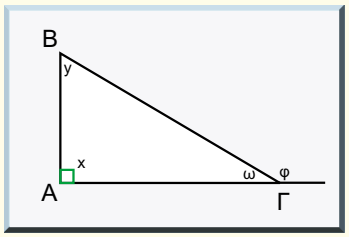


3 Να εξηγήσετε γιατί κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από την ημιπερίμετρο.

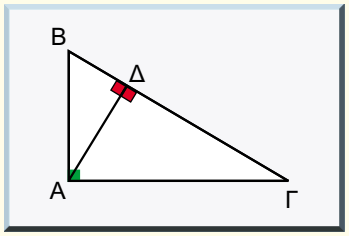
4 Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται η περίμετρος στο τρίγωνο ΑΒΓ;



5 Αν ΑΒ>ΑΓ, να διατάξετε τις γωνίες $\widehat{x}$, $\widehat{y}$, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\omega}$ από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη.



6 Στο σχήμα αν $\widehat{B}>\widehat{\Gamma}$, να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ.



7 Αν τα δυο μήκη των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι x και 2x+1, η περίμετρός του είναι:

Α. 4x, Β. 4x+1, Γ. 5x+1, Δ. 5x+2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Αν Δ σημείο της πλευράς ΑΒ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), να αποδείξετε ότι ΔΓ>ΑΒ.

2 Υπάρχει τρίγωνο με $\beta=\frac{\alpha}{3}$ και $\gamma=\frac{3\alpha}{5}$ ή όχι; Να εξετάσετε το ίδιο πρόβλημα όταν $\beta=\frac{7\alpha}{5}$ και $\gamma=\frac{\alpha}{3}$.

3 Θεωρούμε ένα σημείο Μ εκτός τριγώνου ΑΒΓ, αλλά εντός της γωνίας $\widehat{B}$ αυτού. Να αποδείξετε ότι β+ΜΒ>γ+ΜΓ.

4 Σε κάθε τετράπλευρο ΑΒΓΔ να δείξετε ότι τ<ΑΓ+ΒΔ<2τ.

5 Αν Δ σημείο της πλευράς ΒΓ=α τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι $ΑΔ>\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.

6 Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$ και ένα σημείο Μ της διχοτόμου Οδ. Από το Μ φέρουμε ΜΑ⊥Οy και έστω Β το σημείο τομής της ΜΑ με την Οx. Να αποδείξετε ότι ΜΑ<ΜΒ.

7 Αν Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ

και Ε, Ζ οι προβολές του στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι ΕΖ<ΒΓ.

8 Αν το Ρ είναι εσωτερικό σημείο τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι
τ<ΡΑ+ΡΒ+ΡΓ<2τ.

9 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) και σημείο Ε της ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΓ κατά τμήμα ΓΔ τέτοιο ώστε ΓΔ=ΒΕ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ>ΒΓ.

10 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και έστω σημείο Δ της πλευράς ΑΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΑΕ=ΑΔ. Να συγκρίνετε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και ΑΜ η διάμεσός του. Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}M > \Gamma\hat{A}M$.

2 Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > 90°$ θεωρούμε δύο τυχαία σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ+ΓΔ>ΒΔ+ΔΕ+ΕΓ.

3 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ, Μ ένα σημείο της διχοτόμου της $\hat{A}$ και Ν ένα σημείο της εξωτερικής διχοτόμου της $\hat{A}$. Να δείξετε ότι:
α) ΜΓ–ΜΒ<ΑΓ–ΑΒ.
β) ΝΓ+ΝΒ>ΑΓ+ΑΒ.

4 Θεωρούμε μια ευθεία ε και δυο σημεία Α και Β εκτός αυτής προς το ίδιο μέρος της. Να βρεθεί σημείο Μ της ε τέτοιο, ώστε η διαφορά των αποστάσεων ΜΑ και ΜΒ να είναι η μεγαλύτερη δυνατή.

5 Αν Κ σημείο του επιπέδου κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι ΚΑ+ΚΒ+ΚΓ≥ΑΓ+ΒΔ. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος ΚΑ+ΚΒ+ΚΓ+ΚΔ και πότε επιτυγχάνεται.

6 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και ΒΔ η διχοτόμος του. Να αποδείξετε ότι ΔΑ<ΔΓ.

7 Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$. Έστω Οδ η διχοτόμος της και Δ σημείο στο εσωτερικό της $\delta\hat{O}y$. Ν αποδείξετε ότι η απόσταση του Δ από την Ox είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του Δ από την Oy.

8 Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήματα ΒΔ και ΓΕ τέτοια ώστε ΒΔ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΒΓ<ΔΕ.

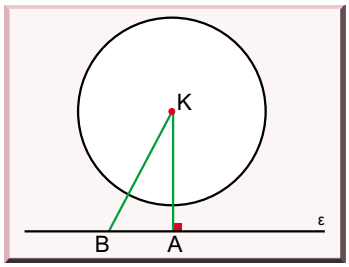
9 Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχουμε ΑΒ=ΓΑ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΓ>ΒΔ και
β) $\hat{\Delta} > \hat{A}$.

10 Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ μεγαλύτερη πλευρά του είναι η ΑΒ και μικρότερη η ΓΔ. Να δείξετε οτι $\hat{A} < \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} < \hat{\Delta}$.

11 Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της ΒΓ. Στις προεκτάσεις των ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τμήματα ΒΕ=ΓΔ και ΓΖ=ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ<ΔΖ.

Έστω ένας κύκλος (Κ,ρ), μία ευθεία ε και ΚΑ η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία ε.

Για την απόσταση ΑΚ και την ακτίνα ρ του κύκλου διακρίνουμε τις περιπτώσεις: α) ΚΑ>ρ, β) ΚΑ=ρ, γ) ΚΑ<ρ.

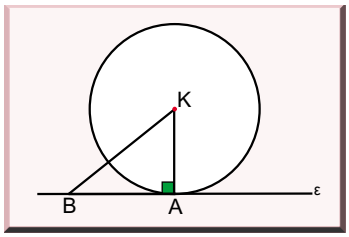


α. Εξωτερική ευθεία κύκλου

Αν ΚΑ>ρ, τότε για κάθε άλλο σημείο Β της ε το ΚΒ ως πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα θα είναι ΚΒ>ΚΑ>ρ, δηλαδή ΚΒ>ρ, οπότε το Β θα είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου. Όλα επομένως τα σημεία της ε θα είναι εξωτερικά του κύκλου. Η ευθεία ε δεν έχει κανένα κοινό σημείο μ' αυτόν και λέγεται **εξωτερική** ευθεία του κύκλου.

β. Εφαπτόμενη ευθεία κύκλου

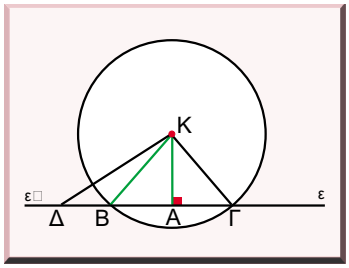
Αν ΚΑ=ρ, τότε το Α είναι και σημείο του κύκλου. Για κάθε άλλο σημείο Β της ε το ΚΒ είναι πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα στην ευθεία ε και ΚΒ>ΑΚ=ρ, δηλαδή ΚΒ>ρ και το σημείο Β θα είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου. Η ευθεία ε επομένως, έχει με τον κύκλο ένα μόνο κοινό σημείο, το Α, λέγεται **εφαπτόμενη** του κύκλου και το σημείο Α καλείται **σημείο επαφής**.



γ. Τέμνουσα ευθεία κύκλου

Αν ΚΑ<ρ, τότε το Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου. Οι δύο ημιευθείες Αε και Αε΄, καθώς εκτείνονται απεριόριστα από το εσωτερικό προς το εξωτερικό θα έχουν η κάθε μία με τον κύκλο κοινά σημεία, εφόσον ο κύκλος είναι κλειστή γραμμή. Επομένως, η ευθεία ε και ο κύκλος θα έχουν τουλάχιστον δύο κοινά σημεία (τα κοινά σημεία του κύκλου και καθεμιάς από τις ημιευθείες Αε και Αε΄γ).

Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι τα σημεία αυτά είναι μοναδικά.

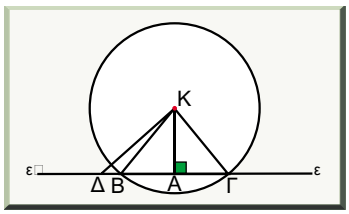


Μια ευθεία κι ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Θεώρημα 3.19

Απόδειξη

Έστω ότι η ε και ο κύκλος (Κ,ρ) έχουν και τρίτο κοινό σημείο, το Δ. Το σημείο αυτό θα ανήκει τότε σε μία από τις δύο ημιευθείες Αε και Αε΄. Έστω ότι ανήκει στην Αε. Τότε ΚΔ=ρ (αφού το Δ ανήκει και στον κύκλο), δηλαδή ΚΔ=ΚΒ, άρα ΑΒ=ΑΔ και επομένως τα σημεία Β και Δ συμπίπτουν. Ομοίως αποδεικνύεται, ότι αν το σημείο Δ ανήκει στην Αε΄, τότε θα συμπίπτει με το Γ. Επομένως αποκλείεται η ύπαρξη τρίτου κοινού σημείου ευθείας και κύκλου. ■

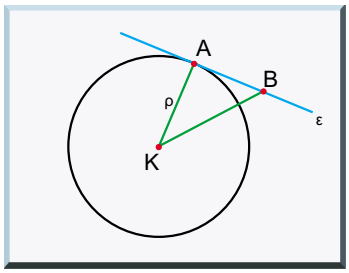


Η εφαπτόμενη ευθεία ε ενός κύκλου (Κ,ρ), σ' ένα σημείο Α αυτού είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΑ.

Θεώρημα 3.20

Απόδειξη

Κάθε άλλο σημείο Β της ε είναι εξωτερικό του κύκλου, οπότε ΚΒ>ΚΑ. Το ΚΑ είναι το μικρότερο τμήμα που ενώνει το κέντρο Κ με την ευθεία ε, άρα το ΚΑ είναι κάθετο στην ε. ■



Από κάθε σημείο ενός κύκλου διέρχεται μία μόνο ευθεία εφαπτόμενη σ' αυτόν.

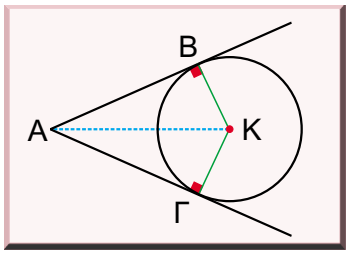
Πόρισμα 3.23

Τα δύο εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ που άγονται από σημείο Α εκτός κύκλου προς αυτόν είναι μεταξύ τους ίσα.

Θεώρημα 3.21

Απόδειξη

Έστω κύκλος (Κ,ρ) και ΑΒ και ΑΓ τα δύο εφαπτόμενα τμήματα από το Α. Τα δύο τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΚ είναι ορθογώνια ($\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$) και έχουν την ΑΚ κοινή υποτείνουσα, και τις κάθετες πλευρές ΚΒ και ΚΓ ίσες. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε ΑΒ=ΑΓ.



Συμπεράσματα

Η ΑΚ διχοτομεί τη γωνία $B\widehat{A}\Gamma$, διχοτομεί τη γωνία $B\widehat{K}\Gamma$ και είναι μεσοκάθετη της ΒΓ. Η ευθεία ΑΚ λέγεται **διακεντρική** ευθεία του κύκλου.

1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

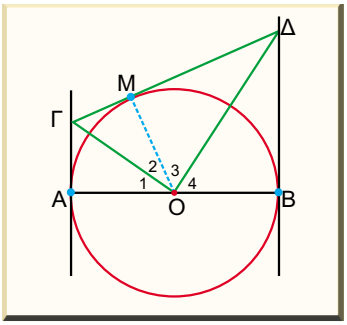
Στα άκρα Α και Β μιας διαμέτρου ΑΒ ενός κύκλου Ο φέρουμε δύο εφαπτόμενες ευθείες. Φέρουμε ακόμη μια τρίτη εφαπτομένη σε ένα τυχαίο σημείο Μ, η οποία τέμνει τις δύο προηγούμενες στα σημεία Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{ΓΟΔ}$ είναι ορθή.

Απόδειξη

Επειδή ΑΓ, ΓΔ και ΒΔ είναι εφαπτόμενες, άρα οι γωνίες $\widehat{ΟΑΓ}$, $\widehat{ΟΒΔ}$, $\widehat{ΟΜΓ}$ και $\widehat{ΟΜΔ}$ είναι ορθές. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΟ και ΜΓΟ είναι ίσα, γιατί έχουν κοινή την υποτείνουσα ΟΓ και ΟΑ=ΟΜ. Άρα ισχύει $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, δηλαδή η ΟΓ είναι διχοτόμος της $\widehat{ΑΟΜ}$.

Ομοίως, τα τρίγωνα ΜΔΟ και ΟΒΔ είναι ίσα, γιατί έχουν κοινή την υποτείνουσα ΟΔ και ΟΜ=ΟΒ. Άρα ισχύει $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$, δηλαδή η ΟΔ είναι διχοτόμος της $\widehat{ΜΟΒ}$.

Επειδή η $\widehat{ΑΟΒ}$ είναι ευθεία γωνία, οι $\widehat{ΑΟΜ}$ και $\widehat{ΜΟΒ}$ είναι εφεξής παραπληρωματικές και διχοτομούνται από τις ΟΓ και ΟΔ αντίστοιχα. Άρα η ΟΓ είναι κάθετη στην ΟΔ, δηλαδή $\widehat{ΓΟΔ}$ ορθή.



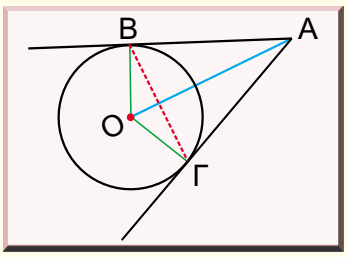
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Στο σχήμα οι ΑΒ και ΑΓ είναι εφαπτόμενες στον κύκλο Ο.

α) Τι είδους τριγώνο είναι το τρίγωνο ΑΒΟ;

β) Τι είναι τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΑΓΟ;

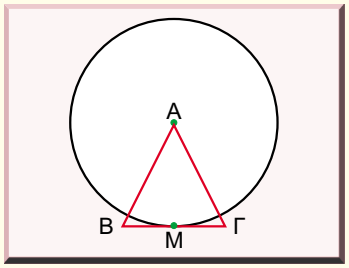
γ) Τι είναι η ευθεία ΑΟ για το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ;



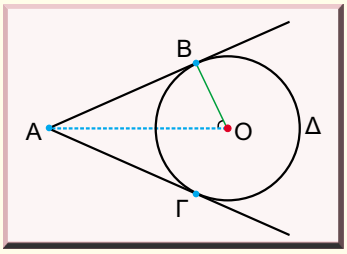
2 Να εξηγήσετε γιατί δεν μπορούν να υπάρξουν δύο εφαπτόμενες στο ίδιο σημείο ενός κύκλου.

3 Όταν δύο χορδές ενός κύκλου έχουν το ίδιο μέσο, τι έχετε να παρατηρήσετε για το απόστημά τους; Τι είδους χορδές είναι αυτές;

4 Στο σχήμα ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο Α και εφάπτεται στο μέσο Μ της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

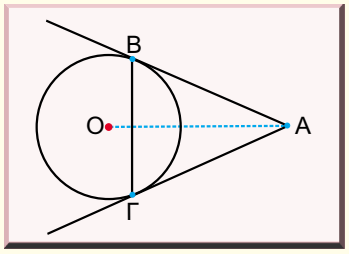


5 Στο σχήμα οι ΑΒ και ΑΓ εφάπτονται στον κύκλο (Ο,ρ). Αν η γωνία $\widehat{AOB}$ είναι 60°, πόσων μοιρών είναι το τόξο $\overset{\frown}{B\Delta\Gamma}$;

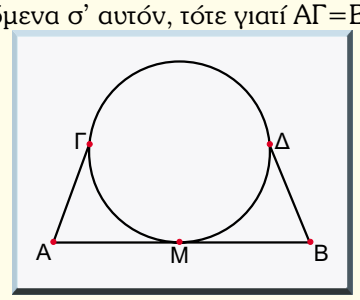


6 Αν μια χορδή ενός κύκλου είναι ίση με το απόστημά της, τότε θα είναι μικρότερη από την ακτίνα.

7 Στο σχήμα οι ΑΒ και ΑΓ εφάπτονται στον κύκλο. Να εξηγήσετε γιατί η ΑΟ είναι μεσοκάθετη του ΒΓ.



8 Αν ο κύκλος εφάπτεται στο μέσο Μ του τμήματος ΑΒ και τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι εφαπτόμενα σ' αυτόν, τότε γιατί ΑΓ=ΒΔ;



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνονται δύο κύκλοι (Ο,R) και (Ο,ρ) με R>ρ. Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β του κύκλου (Ο,R) και φέρουμε τις εφαπτόμενες ΑΓ και ΒΔ προς τον κύκλο (Ο,ρ). Να αποδείξετε ότι ΑΓ=ΒΔ.

2 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$. Με διαμέτρους τις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου γράφουμε δύο κύκλους. Να δείξετε ότι καθένας από τους κύκλους αυτούς εφάπτεται σε μια από τις κάθετες πλευρές του τριγώνου.

3 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Γράφουμε κύκλο (Ο,ΟΒ) ο οποίος περνά από το σημείο Γ. Στα σημεία Β και Γ του κύκλου αυτού φέρουμε δύο εφαπτομένες οι οποίες τέμνονται στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\Delta\Gamma}$ περνά από την κορυφή Α του ισοσκελούς τριγώνου.

4 Από σημείο Α εκτός κύκλου Ο φέρουμε τις δύο εφαπτομένες ΑΒ και ΑΓ. Αν Δ το συμμετρικό του κέντρου Ο ως προς την ευθεία ΑΓ, να δείξετε ότι η γωνία $\widehat{BA\Delta}$ είναι τριπλάσια από τη γωνία $\widehat{\Gamma A\Delta}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται στις πλευρές γωνίας $\widehat{xOy}$.

2 Με κέντρο το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ γράφουμε έναν κύκλο. Να δείξετε ότι αν ο κύκλος αυτός εφάπτεται σε μία πλευρά του τριγώνου, τότε θα εφάπτεται και σε μια ακόμη.

3 Σε έναν κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε μια ακτίνα ΟΑ και φέρουμε στο σημείο Α ένα εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ. Αν για ένα σημείο Γ του κύκλου ισχύει ΒΑ=ΒΓ, να δείξετε ότι και η ευθεία ΒΓ θα είναι εφαπτόμενη στον κύκλο.

Διάκεντρος δύο κύκλων λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα κέντρα τους.

Ορισμός

Η σχέση της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων δύο κύκλων καθορίζει τις σχετικές θέσεις που έχουν μεταξύ τους.

Θεωρούμε τους κύκλους (Κ,R) και (Λ,ρ) με R>ρ και συμβολίζουμε τη διάκεντρό τους ΚΛ με δ. Θα εξετάσουμε έξι διαφορετικές σχετικές θέσεις των κύκλων αυτών.

Στο πρώτο σχήμα οι δύο κύκλοι έχουν κοινό κέντρο, κανένα κοινό σημείο και η διάκεντρός τους δ=0. Αν φανταστούμε ότι ο κύκλος (Κ,R) είναι σταθερός και ότι ο (Λ,ρ) κινείται συνεχώς προς τα δεξιά της σελίδας, τότε οι κύκλοι θα πάρουν όλες τις διαφορετικές θέσεις που βλέπουμε στα σχήματα 1 έως 6. Ταυτόχρονα, λόγω της κίνησης αυτής σε κάθε περίπτωση η διάκεντρος δ είναι μεγαλύτερη από τη διάκεντρο της προηγούμενης περίπτωσης και μικρότερη από της επόμενης.

Στο σχήμα 1 τα κέντρα των δύο κύκλων συμπίπτουν οπότε δ=0 και οι κύκλοι ονομάζονται **ομόκεντροι**.

Στο σχήμα 2 οι δύο κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, δ<R–ρ και ο κύκλος με τη μικρότερη ακτίνα βρίσκεται στο εσωτερικό του άλλου.

Στο σχήμα 3 οι δύο κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο, δ=R–ρ και λέμε ότι **εφάπτονται εσωτερικά**.

Στο σχήμα 5 οι δύο κύκλοι έχουν επίσης ένα κοινό σημείο, δ=R+ρ και λέμε ότι **εφάπτονται εξωτερικά**.

Ο κύκλοι των δύο τελευταίων περιπτώσεων ονομάζονται **εφαπτόμενοι** και το κοινό σημείο τους **σημείο επαφής**.

Στο σχήμα 4 οι δύο κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, R–ρ<δ<R+ρ και οι κύκλοι ονομάζονται **τεμνόμενοι**.

Στο σχήμα 6 οι δύο κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, δ>R+ρ και κάθε ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου.

Στο σχήμα 1: δ=0.

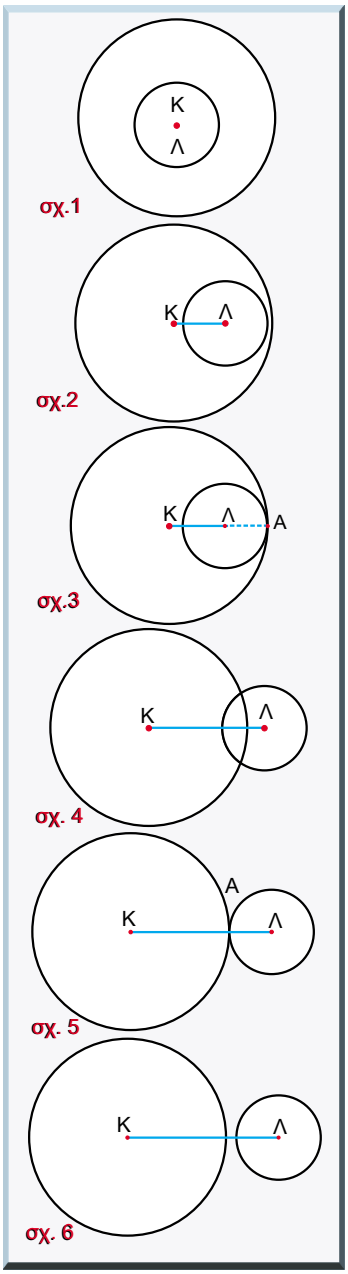
Στο σχήμα 5: δ=ΚΛ=ΚΑ+ΑΛ ή δ=R+ρ

Στο σχήμα 3: δ=ΚΛ=ΚΑ–ΛΑ ή δ=R–ρ

Στο σχήμα 2: 0<δ<R–ρ.

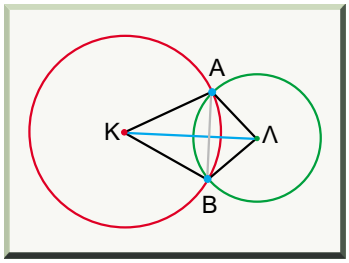
Στο σχήμα 4: R–ρ<δ<R+δ.

Στο σχήμα 6: R+ρ<δ



Θεώρημα 3.22

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.

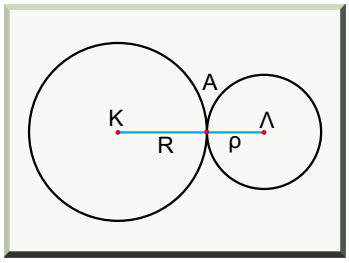


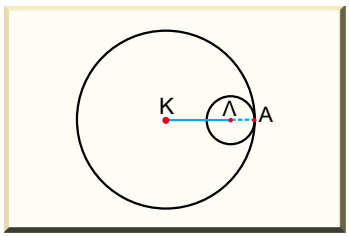
Απόδειξη

Δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) τέμνονται στα σημεία Α και Β. Επειδή ΚΑ=ΚΒ, το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΑΒ. Επίσης, επειδή ΛΑ=ΛΒ και το σημείο Λ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΑΒ. Επομένως μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ είναι η διάκεντρος ΚΛ. ■

Θεώρημα 3.23

Το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων ανήκει στη διάκεντρό τους.



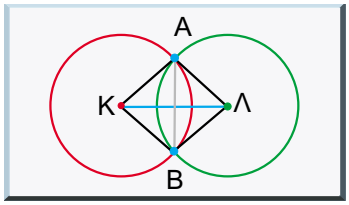


Απόδειξη

Έστω Α το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων (Κ,R) και (Λ,ρ). Η ευθεία ΚΛ είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου (Κ,R), άρα το συμμετρικό του Α ως προς την ΚΛ ανήκει στον κύκλο (Κ,R). Η ευθεία ΚΛ όμως είναι και άξονας συμμετρίας του κύκλου (Λ,ρ), άρα το συμμετρικό του Α ως προς την ΚΛ ανήκει και στον κύκλο (Λ,ρ). Οπότε το συμμετρικό Α΄ του Α ως προς την ΚΛ ανήκει και στους δύο κύκλους. Αυτοί, όμως, έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, το Α, πρέπει επομένως το Α΄ και το Α να ταυτίζονται. ■

Θεώρημα 3.24

Η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της διακέντρου αν οι κύκλοι είναι ίσοι και αντιστρόφως.



Απόδειξη

Έστω (Κ,ρ) και (Λ,ρ) οι δύο ίσοι τεμνόμενοι κύκλοι και ΑΒ η κοινή χορδή τους. Τότε ΑΚ=ΑΛ, άρα το Α ανήκει στη μεσοκάθετη της ΚΛ. Ομοίως ΒΚ=ΒΛ, άρα το Β ανήκει στη μεσοκάθετη της ΚΛ. Επομένως μεσοκάθετη της ΚΛ είναι η ευθεία ΑΒ.

Αντιστρόφως

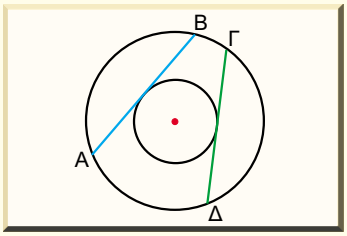
Έστω τώρα ότι η ΑΒ είναι η μεσοκάθετη της διακέντρου ΚΛ δύο κύκλων με κέντρα Κ και Λ. Αφού το Α ανήκει στη μεσοκάθετη της ΚΛ, θα είναι ΑΚ=ΑΛ, δηλαδή οι ακτίνες των δύο κύκλων με κέντρα Κ και Λ είναι ίσες. Άρα οι κύκλοι είναι ίσοι. ■

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1 Γιατί δύο εφαπτόμενοι κύκλοι στο κοινό τους σημείο έχουν την ίδια εφαπτομένη;

2 Ποια είναι η θέση δύο ίσων κύκλων όταν η διάκεντρος είναι ίση με την ακτίνα τους και ποια όταν η διάκεντρός τους είναι ίση με τη διάμετρό τους;

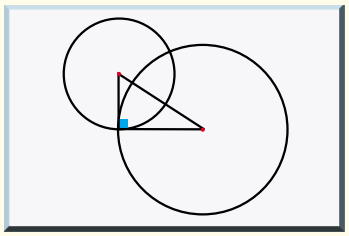
3 Οι δύο κύκλοι είναι ομόκεντροι. Αν οι χορδές ΑΒ και ΓΔ του ενός είναι εφαπτόμενες του άλλου, για ποιο λογο είναι ίσες;



4 Αν με ακτίνες, τις δύο πλευρές ενός τριγώνου, γράψουμε δύο κύκλους, που έχουν για διάκεντρο την 3η πλευρά του, οι κύκλοι αυτοί τι θέση έχουν μεταξύ τους;

5 Δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) τέμνονται στα σημεία Α και Β.
α) Σε ποιες περιπτώσεις η ΚΛ είναι μεσοκάθετη του ΑΒ;
β) Σε ποιες περιπτώσεις η ΑΒ είναι μεσοκάθετη του ΚΛ;

6 Με κέντρα τα άκρα της υποτείνουσας και ακτίνες τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, γράφουμε δύο κύκλους. Γιατί οι κύκλοι αυτοί τέμνονται; Τι σχέση έχουν με τις κάθετες πλευρές του τριγώνου;



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά το σημείο Α. Φέρουμε το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα ΒΓ και την κοινή εσωτερική εφαπτομένη στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσο του ΒΓ και να εξετάσετε το είδος της γωνίας $\widehat{ΚΔΛ}$.

2 Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα Κ και Λ και η μεσοκάθετος του ΚΛ. Να αποδείξετε ότι αν από ένα σημείο της μεσοκαθέτου εξωτερικό (των κύκλων), φέρουμε εφαπτόμενα τμήματα προς αυτούς, αυτά θα είναι ίσα.

3 Δύο κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,ρ) τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν ΑΓ και ΑΔ οι διάμετροι των κύκλων με κέντρα Κ και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΓΛ=ΚΔ.

4 Να δείξετε ότι αν τρεις κύκλοι έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου και εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο, τότε θα είναι ίσοι. Τα σημεία επαφής, είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου;

5 Μια ευθεία ε τέμνει δύο ομόκεντρους κύκλους κατά σειρά στα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Να δείξετε ότι ΑΒ=ΓΔ.

6 Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ που ο καθένας είναι εξωτερικός του άλλου. Αν η διάμετρος ΚΛ τους τέμνει στα σημεια Α και Β, να αποδείξετε ότι το τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από κάθε άλλο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τους δύο κύκλους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μιλήσαμε για τη γεωμετρική κατασκευή, δηλαδή σχεδίαση ενός σχήματος, που πληρεί κάποιες δεδομένες προϋποθέσεις, με τη χρήση μόνο του διαβήτη και του κανόνα.

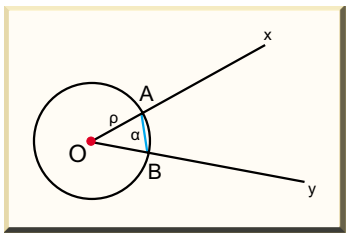
Μια γεωμετρική κατασκευή έχει στόχο τη σχεδίαση του σχήματος, την απόδειξη ότι το σχήμα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του προβλήματος, και ακόμη την εξέταση όλων των δυνατών ενδεχομένων (προϋποθέσεις ύπαρξης, δυνατότητα σχεδιασμού, πλήθος σχημάτων που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις).

Η κατασκευή γωνίας ίσης με δοθείσα γωνία που έγινε στην παράγραφο 2.4 δεν μπορούμε να πούμε ότι πληρεί όλα τα παραπάνω. Βασικός λόγος για τον ισχυρισμό αυτόν είναι η χρήση της "μετατόπισης" μιας έννοιας που προσδιορίζεται διαισθητικά και δεν ορίζεται με την απαιτούμενη μαθηματική αυστηρότητα. Το πρώτο από τα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών που ακολουθούν αφορά την κατασκευή γωνίας ίσης με δοθείσα, αλλά με τρόπο συστηματικότερο στον οποίο θα φανούν και τα στάδια-βήματα για την επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος.

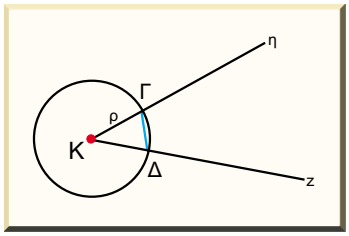
Πρόβλημα 3.7.1

Να κατασκευαστεί γωνία ίση με δοθείσα γωνία.

Έστω ότι η δοθείσα γωνία είναι η $x\hat{O}y$. Αγνοώντας κάποια μέθοδο κατασκευής γωνίας ίσης προς την $x\hat{O}y$ θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση που το πρόβλημα λυθεί.

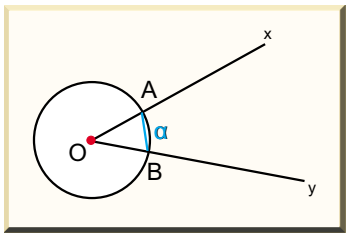


Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι έχει κατασκευαστεί η γωνία $n\hat{K}z$ ίση με $x\hat{O}y$. Γνωρίζουμε ότι σε ίσους κύκλους οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα είναι ίσες. Ο διαβήτης μας εξασφαλίζει τη δυνατότητα να κάνουμε τις γωνίες $n\hat{K}z$ και $x\hat{O}y$ επίκεντρες σε ίσους κύκλους. Χαράσσουμε, λοιπόν, τους δύο αυτούς ίσους κύκλους (Ο,ρ) και (Κ,ρ). Επειδή οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $n\hat{K}z$ είναι ίσες και τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ θα είναι ίσα. Αλλά ίσα τόξα σε ίσους κύκλους έχουμε, αν έχουμε ίσες χορδές. Πρέπει, λοιπόν, η χορδή ΓΔ να είναι ίση με τη χορδή ΑΒ. Η χάραξη όμως χορδής ΓΔ ίσης με την ΑΒ είναι γνωστή

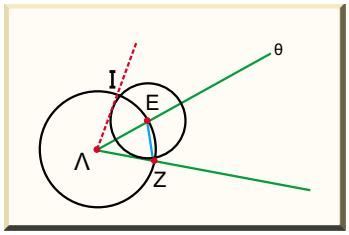


κατασκευή.

Κατασκευάζουμε έναν κύκλο (Λ,ρ), ίσο με τον κύκλο στον οποίο έχουμε κάνει επίκεντρη τη δοθείσα γωνία. Θεωρούμε και μία ημιευθεία Λθ η οποία θα είναι η μία πλευρά της γωνίας που θα κατασκευάσουμε. Η ημιευθεία Λθ τέμνει τον (Λ,ρ) στο σημείο Ε. Αν το μήκος της χορδής ΑΒ είναι α και γράψουμε κύκλο (Ε,α), αυτός θα τέμνει τον κύκλο (Λ,ρ) στο σημείο Ζ. Ουσιαστικά με τον τρόπο αυτό τοποθετούμε στο δεύτερο κύκλο (Λ,ρ) μία χορδή ΕΖ ίση με την ΑΒ. Προσδιορίζουμε έτσι κι ένα τόξο $\overset{\frown}{EZ} = \overset{\frown}{AB}$. Χαράσσοντας τώρα την ημιευθεία ΛΖ κατασκευάσαμε τη γωνία $E\hat{\Lambda}Z$ που είναι ίση με τη $x\hat{O}y$.



Αποδεικνύεται ότι $E\hat{\Lambda}Z = x\hat{O}y$ επειδή και οι δύο γωνίες είναι επίκεντρες και βαίνουν στα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, τα οποία είναι ίσα διότι έχουν ίσες τις αντίστοιχες χορδές ΑΒ και ΓΔ.



Διερευνώντας το σχήμα περισσότερο θα παρατηρήσουμε ότι ο κύκλος (Ε,α) τέμνει τον (Λ,ρ) και στο σημείο Ι. Άρα άλλη μια γωνία που ικανοποιεί τις ίδιες προϋποθέσεις με την $E\hat{\Lambda}Z$ είναι και η $E\hat{\Lambda}I$.

Η γωνία $E\hat{\Lambda}I$ δε θα θεωρηθεί δεύτερη λύση στο πρόβλημα, όπως εξηγούμε στις παρατηρήσεις που ακολουθούν. ■

Θα προσπαθήσουμε τώρα, έχοντας ολοκληρωμένη τη λύση του προηγούμενου προβλήματος, να εντοπίσουμε τα στάδια που ακολουθήσαμε και τα οποία θα είναι ίδια σε κάθε πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής.

Στο πρώτο στάδιο, το οποίο ονομάζουμε **ανάλυση**, υποθέτουμε ότι το σχήμα έχει κατασκευαστεί και πάνω σ' αυτό κάνουμε τις όποιες παρατηρήσεις μας, έως ότου εντοπίσουμε στοιχεία που θα μας οδηγήσουν σε γνωστές κατασκευές.

Στο δεύτερο στάδιο, το οποίο ονομάζουμε **σύνθεση**, αρχίζουμε να κατασκευάζουμε το σχήμα στηριζόμενοι στις παρατηρήσεις της ανάλυσης.

Στο τρίτο στάδιο, το οποίο ονομάζουμε **απόδειξη**, αποδεικνύουμε, ότι το σχήμα που κατασκευάσαμε ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του προβλήματος.

Στο τέταρτο στάδιο το οποίο ονομάζουμε **διερεύνηση**, εξετάζουμε με ποιες προϋποθέσεις το πρόβλημα έχει λύση και πόσες λύσεις έχει.

Παρατηρήσεις

Η φύση των γεωμετρικών κατασκευών είναι τέτοια ώστε σε άλλα

προβλήματα μας ενδιαφέρει μόνο η "μορφή" και το "μέγεθος" του σχήματος και όχι η θέση που θα κατασκευαστεί, και σε άλλα μας ενδιαφέρει και η θέση ή ίσως μόνο η θέση.

Στα προβλήματα της πρώτης κατηγορίας θα ονομάζουμε ένα σχήμα σαν δεύτερη λύση στο πρόβλημα, αν αυτό το σχήμα δεν είναι ίσο με το σχήμα της πρώτης λύσης. Στην προηγούμενη κατασκευή η γωνία $I\widehat{\Lambda}E$ είναι ίση με τη $Z\widehat{\Lambda}E$, για το λόγο αυτό δε θεωρείται δεύτερη λύση. Εξάλλου το Λ είναι τυχαίο σημείο, οπότε με μια διαφορετική λογική θα είχαμε άπειρες λύσεις.

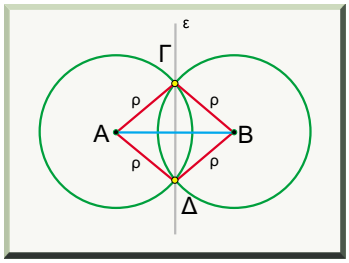
Στα προβλήματα της δεύτερης κατηγορίας η διαφορετική θέση του σχήματος θεωρείται και διαφορετική λύση.

Η κατασκευή γωνίας ίσης προς δοθείσα, ανήκει φανερά στην πρώτη κατηγορία, γι' αυτό το λόγο δε θεωρούμε ότι η γωνία $I\widehat{\Lambda}E$ είναι δεύτερη λύση.

Πρόβλημα 3.7.2

Να κατασκευαστεί η μεσοκάθετη ενός μη μηδενικού ευθύγραμμου τμήματος.

Ανάλυση



Έστω ΑΒ ένα ευθύγραμμο τμήμα και ε η μεσοκάθετή του. Ως ευθεία, η ε προσδιορίζεται από δυο σημεία της. Για κάθε σημείο της Γ γνωρίζουμε ότι ΓΑ=ΓΒ. Το Γ είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τα Α και Β, και τα Α και Β είναι κέντρα ίσων κύκλων που διέρχονται από το Γ. Δύο τέτοιους ίσους κύκλους με κέντρα τα Α και Β μπορούμε να σχεδιάσουμε και να προσδιορίσουμε το σημείο τομής τους, το Γ. Για να τέμνονται, όμως, πρέπει η διάκεντρός τους ΑΒ να ικανοποιεί τη σχέση $\rho-\rho<AB<\rho+\rho$, δηλαδή, οι κύκλοι να χαραχθούν με ακτίνα $\rho>\frac{1}{2}AB$.

Σύνθεση

Με κέντρα τα Α και Β και ακτίνα $\rho>\frac{1}{2}AB$ γράφουμε δύο κύκλους, που τέμνονται σε δύο σημεία τα Γ και Δ. Φέρουμε την ευθεία ΓΔ, η οποία είναι μεσοκάθετη στην ΑΒ.

Απόδειξη

Ισχύει ΓΑ=ΓΒ=ρ. Άρα το Γ είναι σημείο της μεσοκάθετης του ΑΒ. Επίσης είναι ΔΑ=ΔΒ=ρ. Άρα και το Δ είναι σημείο της μεσο-

κάθετης του ΑΒ. Επομένως η ευθεία ΓΔ είναι η μεσοκάθετη του ΑΒ.

Διερεύνηση

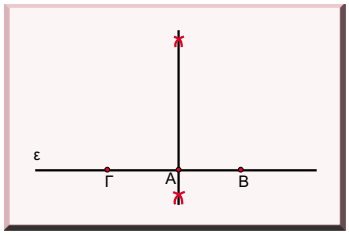
Γνωρίζουμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα (εκτός του μηδενικού) έχει μία μόνο μεσοκάθετη. Άρα το πρόβλημα έχει πάντοτε λύση και μάλιστα μόνο μία.

Πρόβλημα 3.7.3

Να κατασκευαστεί η κάθετη από σημείο προς ευθεία.

α) Το σημείο ανήκει στη δοσμένη ευθεία

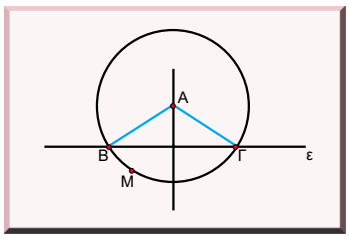
Κατασκευή



Έστω μία ευθεία ε και ένα σημείο Α αυτής. Εκατέρωθεν του Α παίρνουμε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήμα ΑΓ και ΑΒ και σχεδιάζουμε σύμφωνα με την προηγούμενη κατασκευή τη μεσοκάθετη του τμήματος ΒΓ. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της κάθετης εξασφαλίζεται από προηγούμενες γνωστές προτάσεις και η απόδειξη προκύπτει από την προηγούμενη κατασκευή.

β) Το σημείο δεν ανήκει στην ευθεία

Κατασκευή



Έστω μία ευθεία ε και Α ένα σημείο εκτός αυτής. Με κέντρο το Α και ακτίνα μεγαλύτερη από την απόστασή του από την ε γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει αυτήν στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε μετά τη μεσοκάθετη στο τμήμα ΒΓ που είναι και η ζητούμενη κάθετη. Η μεσοκάθετη της χορδής ΒΓ του κύκλου διέρχεται από το κέντρο Α του κύκλου, επειδή ΑΒ=ΑΓ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Παρατηρήσεις

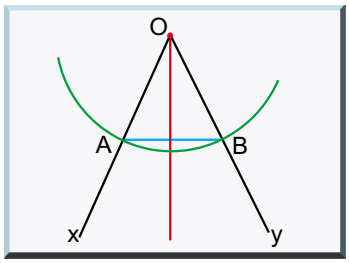
- Σε κατασκευές που εντοπίζεται η λύση τους έγκαιρα, η ανάλυση δεν προσφέρει τίποτε ουσιαστικό και μπορεί να παραληφθεί. Για τα επόμενα στάδια πολλές φορές δεν κάνουμε σαφή διάκριση, ειδικά όταν είναι πολύ σύντομα. Στα αμέσως προηγούμενα παραδείγματα αυτό έγινε φανερό.
- Από τις μέχρι τώρα γεωμετρικές κατασκευές φαίνεται ότι η κατασκευή της μεσοκάθετης είναι βασική.

Πρόβλημα 3.7.4

Να κατασκευαστεί η διχοτόμος μιας γωνίας.

Ανάλυση

Η διχοτόμος μιας γωνίας όταν αυτή είναι επίκεντρη είναι διχοτόμος του αντίστοιχου τόξου της και μεσοκάθετη της χορδής του τόξου αυτού. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στην επόμενη κατασκευή.



Κατασκευή

Κάνουμε τη γωνία επίκεντρη σε κύκλο με τυχαία ακτίνα. Στη συνέχεια φέρουμε τη μεσοκάθετη της χορδής του αντίστοιχου τόξου της.

Διερεύνηση

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της διχοτόμου είναι εξασφαλισμένη από σχετικό αξίωμα.

Παρατηρήσεις

- Στο προηγούμενο πρόβλημα το στάδιο της ανάλυσης θα μπορούσε να στηρίζεται στην παρατήρηση ότι η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής ισοσκελούς τριγώνου είναι μεσοκάθετη της βάσης της. Το στάδιο της κατασκευής και στην περίπτωση αυτή είναι το ίδιο.
- Στο ίδιο πρόβλημα η γωνία αναφερόταν χωρίς ιδιαίτερη διευκρίνιση. Είναι, λοιπόν, μία τυχαία γωνία και έχουμε την υποχρέωση να δώσουμε απάντηση-λύση για κάθε δυνατή περίπτωση (μηδενική γωνία - πλήρης γωνία, μη κυρτή, ευθεία γωνία).
- Σε κάθε στάδιο ενός προβλήματος γεωμετρικής κατασκευής υπάρχουν συχνά περισσότεροι του ενός τρόποι κατασκευής. Δεν αναφέρουμε τους τρόπους, αλλά επιλέγουμε κάθε φορά τον πιο σύντομο.

Πρόβλημα 3.7.5α

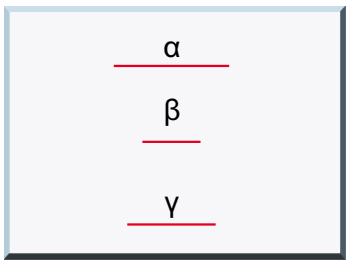
Να κατασκευαστεί τρίγωνο, όταν δίνονται οι τρεις πλευρές του.

Ανάλυση

Αν ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο, τότε ΑΒ=γ, δηλαδή το Α απέχει από το Β απόσταση γ. Άρα ανήκει σ' έναν κύκλο κέντρου Β και ακτίνας γ. Ακόμη ΑΓ=β, άρα το Α ανήκει και σ' έναν κύκλο κέντρου Γ και ακτίνας β. Αν είχαμε επομένως τη ΒΓ, τους δύο αυτούς κύκλους θα μπορούσαμε να τους σχεδιάσουμε.

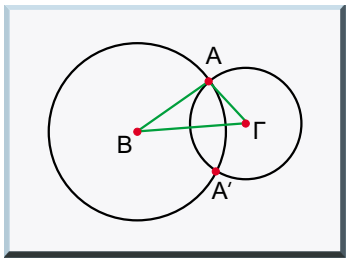
Σύνθεση (κατασκευή)

Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ=α. Γράφουμε τον κύκλο (Β,γ) και τον κύκλο (Γ,β). Αν Α το ένα από τα δύο σημεία τομής των δύο κύκλων και φέρουμε τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ, σχηματίζεται το ζητούμενο τρίγωνο ΑΒΓ.



Απόδειξη

Από την κατασκευή προκύπτει ότι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=γ, ΒΓ=α και ΓΑ=β.



Διερεύνηση

Για να έχει λύση το πρόβλημα πρέπει οι κύκλοι να τέμνονται, δηλαδή η διάκεντρος α και οι ακτίνες β και γ να ικανοποιούν τη σχέση $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$.

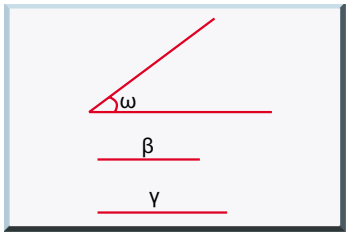
Αν Α΄ το δεύτερο σημείο τομής του, τότε σχηματίζεται άλλο ένα τρίγωνο Α΄ΒΓ με πλευρές ίσες με τα δοσμένα μήκη. Δε θα το θεωρήσουμε όμως δεύτερη λύση στο πρόβλημά μας, διότι είναι φανερό ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

Πρόβλημα 3.7.5β

Να κατασκευαστεί τρίγωνο, όταν δίνονται δύο πλευρές του και η περιεχόμενή τους γωνία.

Σύνθεση

Έστω β, γ, οι δύο πλευρές του τριγώνου και ω η περιεχόμενή τους γωνία. Στις πλευρές μιας γωνίας $x\hat{A}y$ ίσης με την ω παίρνουμε δύο τμήματα ΑΒ=γ και ΑΓ=β, αντίστοιχα. Φέρουμε το τμήμα ΒΓ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

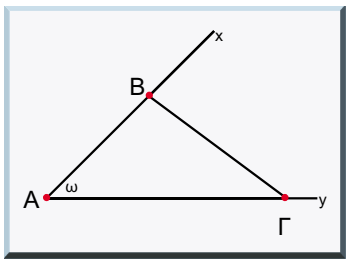


Απόδειξη

Προφανώς το τρίγωνο ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Διερεύνηση

Εφόσον η γωνία δεν είναι μηδενική, ευθεία, ή μη κυρτή, το πρόβλημα έχει πάντοτε λύση. Μάλιστα, μόνο μία διότι, όποιο τρίγωνο κι αν έχουμε μ' αυτά τα στοιχεία, σύμφωνα με το 1° κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π), θα είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

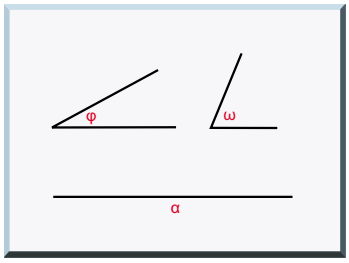


Πρόβλημα 3.7.5γ

Να κατασκευαστεί τρίγωνο, όταν δίνονται μία πλευρά του και οι προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες.

Σύνθεση

Κατασκευάζουμε ένα τμήμα ΒΓ ίσο με τη δοθείσα πλευρά του τριγώνου. Στο ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τις γωνίες $\widehat{ΓΒx}$ και $\widehat{ΒΓy}$, ίσες μία προς μία με τις δοθείσες γωνίες. Η τομή Α των ημιευθειών Βx και Γy καθορίζει την τρίτη κορυφή. Άρα το ζητούμενο τρίγωνο είναι το ΑΒΓ.



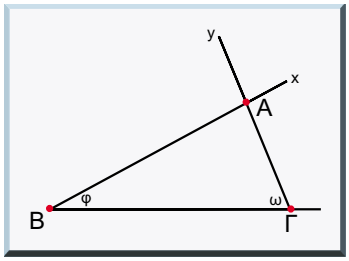
Απόδειξη

Το τρίγωνο ΑΒΓ ικανοποιεί προφανώς τις προϋποθέσεις του προβλήματος.

Διερεύνηση

Εφόσον εξασφαλίσουμε την τομή των ημιευθειών Βx και Γy το πρόβλημα έχει λύση. Για να συμβαίνει αυτό, δε θα πρέπει καμία από τις δοθείσες γωνίες να είναι μηδενική και το άθροισμά τους να είναι μικρότερο από 180°.

Η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος προκύπτει από το 2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ-Π-Γ), σύμφωνα με το οποίο, όποιο τρίγωνο κι αν έχουμε με τα στοιχεία αυτά θα είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ.



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Στο έργο "Στοιχεία" του Ευκλείδη, οι αναπόδεικτες αρχές, στις οποίες στηρίζεται η λογική ανάπτυξης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αναφέρονται σε τρεις γεωμετρικές κατασκευές:

- ενός ευθυγράμμου τμήματος
- της προέκτασης μιας ευθείας
- ενός κύκλου με δοθέν κέντρο και δοθείσα ακτίνα

Έτσι υπάρχει σιωπηρά – ως αναγκαία συνθήκη – η υποχρέωση χρήσης στις κατασκευές του κανόνα και του διαβήτη μόνο. Είναι δυνατό να επινοηθούν απεριόριστα σε πλήθος όργανα

κατασκευής. Όμως οι Αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν τα δυο απλούστερα. Μοναδική εξαίρεση ήταν τέσσερις κατασκευές, γνωστές σήμερα ως άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας:

1ον Ο τετραγωνισμός του κύκλου, δηλαδή κατασκευή τετραγώνου ίσου εμβαδού με δοθέντα κύκλο.

2ον Ο διπλασιασμός κύβου (ή Δήλιο πρόβλημα – το μαντείο της Δήλου έδωσε χρησμό να διπλασιαστεί ο βωμός του ναού του Απόλλωνα σε κυβικό σχήμα), δηλαδή κατασκευή κύβου διπλάσιου όγκου από δοθέντα κύβο.

3ον Η τριτοχοτόμηση τυχαίας γωνίας.

4ον Η κατασκευή κανονικού πολυγώνου ν πλευρών, όπου ν πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 5.

Στην προσπάθεια επίλυσης των περίφημων αυτών προβλημάτων επινοήθηκαν – εκτός της ευθείας και του κύκλου – άλλα σχήματα, όπως:

- η κογχοειδής του Νικομήδη,
- η μεσολάβος του Ερατοσθένη,
- η έλικα του Αρχιμήδη,
- η ελλειψογράφος του Πρόκλου, καθώς και
- οι κωνικές τομές (παραβολή, έλλειψη, υπερβολή) του Απολλώνιου, γιατί, όπως αποδείχθηκε αργότερα, τα τέσσερα προβλήματα είναι άλυτα με αποκλειστική χρήση κανόνα και διαβήτη.

Όλες οι απόπειρες επίλυσης των προβλημάτων αυτών υπήρξαν εξαιρετικά εποικοδομητικές και για άλλους κλάδους των μαθηματικών. Συγκεκριμένα στην Άλγεβρα συναντάμε την εξής βασική πρόταση, που σχετίζεται:

η τριτοβάθμια εξίσωση $x^3+ax^2+βx+γ=0$,

όπου α,β,γ ρητοί αριθμοί, έχει ρίζα κατασκευάσιμη μόνο με κανόνα και διαβήτη, αν και μόνο αν η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρητή ρίζα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, αν γνωρίζουμε τη γωνία $\widehat{A}$ και το μήκος των ίσων πλευρών ΑΒ=ΑΓ=α.

2 Να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ αν γνωρίζουμε τη γωνία $\widehat{\varphi}$ της βάσης ΒΓ και το μήκος α των ίσων πλευρών.

3 Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ, αν γνωρίζουμε τα μήκη των πλευρών ΑΓ=β και ΑΒ=γ και τη γωνία $\widehat{B}$.

4 Να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο, αν είναι γνωστή η πλευρά του.

5 Να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, αν είναι γνωστή η βάση του ΒΓ=α και μια από τις ίσες πλευρές του, έστω ΑΓ=β.

6 Να κατασκευαστεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, αν είναι γνωστές οι δύο κάθετες πλευρές του ΑΓ=β και ΑΒ=γ.

7 Να κατασκευαστεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, αν είναι γνωστές η υποτείνουσά του ΒΓ=α και η κάθετη πλευρά του ΑΒ=γ.

8 Να κατασκευαστεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, αν είναι γνωστή η υποτείνουσα του ΒΓ=α και η γωνία $\widehat{B}=\omega$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω τρία τυχαία σημεία Α΄, Β΄, Γ΄ των πλευρών ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι
$\tau<AA'+BB'+\Gamma\Gamma'<3\tau$.

2 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{B}<90°$ και ΑΓ=2ΑΒ. Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Gamma}<\frac{\widehat{A}}{2}$.

3 Δίνεται ευθεία ε και σημείο Ζ εκτός αυτής. Αν ΖΑ το κάθετο τμήμα και ΖΒ, ΖΓ και ΖΔ οι πλάγιες προς την ε τέτοιες, ώστε ΖΓ=2ΖΒ και ΖΔ=3ΖΒ, να αποδείξετε ότι ΓΔ<ΒΓ.

4 α) Δίνεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ. Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του κύκλου ισχύει ΣΑ≤ΣΜ≤ΣΒ.
β) Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο από τα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο κύκλους, οι οποίοι δεν έχουν κοινά σημεία.

5 Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ, αν γνωρίζουμε τα μήκη των πλευρών ΒΓ=α, ΑΓ=β και το ύψος ΑΔ=υ_α.

6 Να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο, αν είναι γνωστή μια από τις ίσες πλευρές του ΑΒ=β και το ύψος ΑΔ=υ_α που αντιστοιχεί στη βάση του.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τις παρακάτω προτάσεις δεν εξασφαλίζει την ισότητα τριγώνων;

Α. ❑ Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν δύο πλευρές και την περιεχομένη σε αυτές γωνία αντίστοιχα ίσες.

Β. ❑ Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες.

Γ. ❑ Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία.

Δ. ❑ Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες.

2 Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

Α. ❑ Τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Β. ❑ Ίσες υποτείνουσες.

Γ. ❑ Τις οξείες τους γωνίες ίσες μία προς μία.

Δ. ❑ Ίσες περιμέτρους.

3 Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν:

Α. ❑ Τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Β. ❑ Τις τρεις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία.

Γ. ❑ Τις τρεις πλευρές τους κάθετες μία προς μία.

Δ. ❑ Τις τρεις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

4 Να επιλέξετε την περίπτωση εκείνη στην οποία ένα τρίγωνο δεν μπορεί να είναι συγχρόνως

Α. ❑ Σκαληνό και ορθογώνιο.

Β. ❑ Ισοσκελές και οξυγώνιο.

Γ. ❑ Ισόπλευρο και ορθογώνιο.

Δ. ❑ Σκαληνό και αμβλυγώνιο.

5 Αν οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν μέτρα $\widehat{A}=4x$, $\widehat{B}=50°-2x$ και $\widehat{\Gamma}=150°-6x$, τι είδους τρίγωνο είναι;

Α. ❑ Ορθογώνιο σκαληνό.

Β. ❑ Αμβλυγώνιο σκαληνό.

Γ. ❑ Οξυγώνιο σκαληνό.

Δ. ❑ Αμβλυγώνιο ισοσκελές.

6 Η τριγωνική ανισότητα:

Α. ❑ Αληθεύει για κάθε τριάδα σημείων Α, Β, Γ εφόσον τα Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

Β. ❑ Αληθεύει για κάθε τριάδα σημείων Α, Β, Γ εκτός και αν τα Α, Β, Γ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Γ. ❑ Αληθεύει για κάθε τριάδα σημείων Α, Β, Γ και είναι η $|AB-A\Gamma| \le B\Gamma \le AB+A\Gamma$

Δ. ❑ Αληθεύει για κάθε τριάδα σημείων Α, Β, Γ εφόσον αυτά δεν είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

7 Αν οι πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκη 3, 4 και x, τότε:

Α. ❑ $0 \le x \le 4$ Β. ❑ $0<x<6$

Γ. ❑ $1<x<7$ Δ. ❑ $3 \le x \le 7$

Ε. ❑ $2<x<12$

8 Αν η περίμετρος τριγώνου είναι 18 και x η μεγαλύτερη πλευρά, τότε το x παίρνει τις τιμές του διαστήματος και μόνο αυτές.

Α. ❑ [0,6] Β. ❑ (6,9)

Γ. ❑ [1,12) Δ. ❑ (0,9]

9 Αν ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη 4, 9 και x, τότε η περίμετρός του:

Α. ❑ Είναι ακριβώς 17.

Β. ❑ Είναι ακριβώς 22.

Γ. ❑ Μπορεί να είναι 17, μπορεί να είναι και 22.

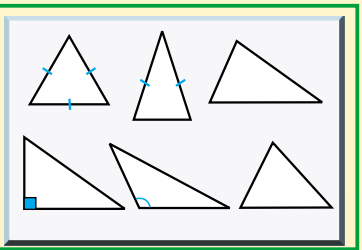
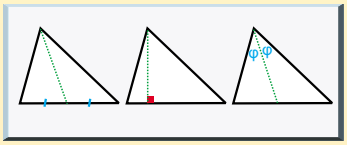
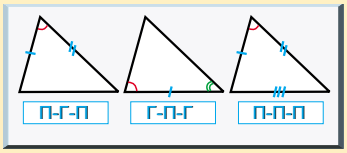
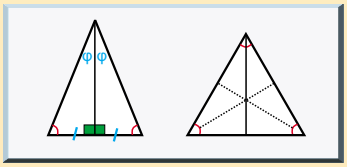
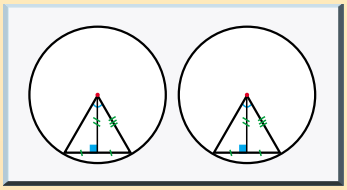
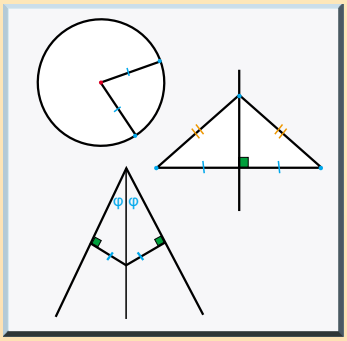
Δ. ❑ Είναι ακριβώς 26.

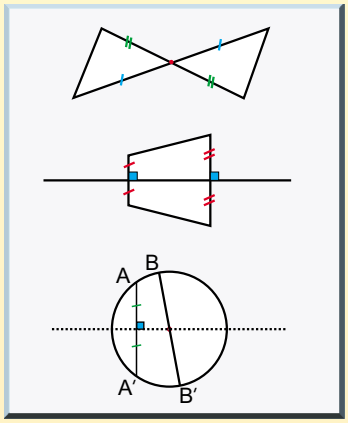
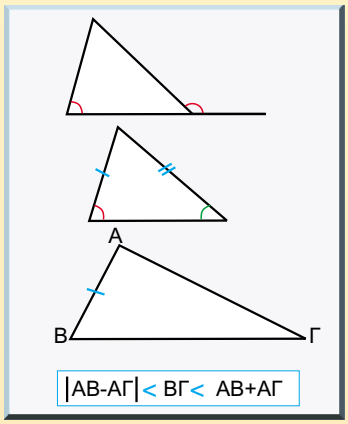
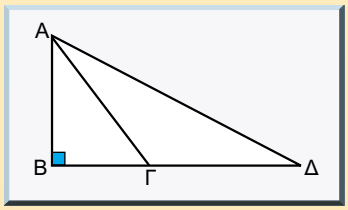
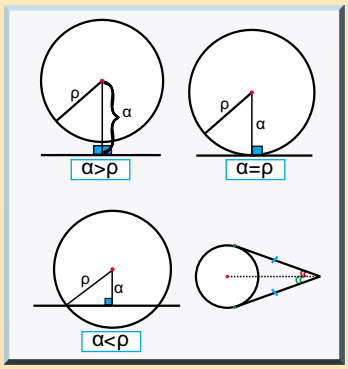
10 Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη 5, 11, x. Πόσες πιθανές ακέραιες τιμές υπάρχουν για το x;

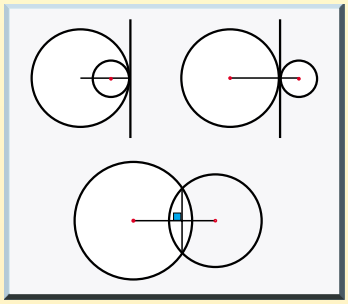
Α. ❑ 1 Β. ❑ 2 Γ. ❑ 3

Δ. ❑ 4 Ε. ❑ Περισσότερες από 4.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο 3ο κεφάλαιο βασικό σχήμα μελέτης ήταν το τρίγωνο. Καθορίσαμε τα είδη τριγώνων α) ως προς τις πλευρές: ισόπλευρο, ισοσκελές και σκαληνό και β) ως προς τις γωνίες: ορθογώνιο, αμβλυγώνιο και οξυγώνιο.	
Τα στοιχεία ενός τριγώνου, διάμεσος, ύψος, διχοτόμος ήταν ένα θέμα που εξετάσαμε επίσης στο κεφάλαιο αυτό.	
Σημαντικό μέρος του κεφαλαίου αφιερώσαμε στα κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων (Π-Γ-Π), (Γ-Π-Γ) και (Π-Π-Π). Επίσης αποδείξαμε και τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων που συνοψίζονται στην πρόταση "αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο ομώνυμα στοιχεία (που δεν είναι και τα δύο γωνίες και στα οποία δε συμπεριλαμβάνεται η ορθή γωνία) ίσα ένα προς ένα και ομοίως τοποθετημένα, τότε είναι ίσα".	
Η σύγκριση των τριγώνων μας έδωσε τη δυνατότητα να αποδείξουμε τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου (οι παρά τη βάση γωνίες ίσες, ύψος-διάμεσος-διχοτόμος προς τη βάση ταυτίζονται) και να διαπιστώσουμε ότι κάθε ιδιότητα απ' αυτές είναι και κριτήριο για να είναι ένα τρίγωνο ισοσκελές. Τα προηγούμενα είδαμε ότι επεκτείνοναι "εις τριπλούν" και στο ισόπλευρο τρίγωνο μιας κι αυτό είναι ειδική περίπτωση ισοσκελούς τριγώνου με βάση οποιαδήποτε πλευρά.	
Εφαρμόζοντας τα κριτήρια ισότητας τριγώνων αποδείξαμε ότι σε ίσους κύκλους η ισότητα δύο χορδών, μας οδηγεί σε ισότητα τόξων, ισότητα επίκεντρων γωνιών και ισότητα αποστημάτων.	
Επίσης εμφανίστηκε και ξεκαθαρίστηκε η έννοια του γεωμετρικού τόπου (αποκλειστικότητα μιας ιδιότητας από όλα τα σημεία ενός σχήματος), ο τρόπος εντοπισμού του (ευθύ και αντίστροφο) και έγινε η μελέτη τριών βασικών γεωμετρικών τόπων όπως: ο κύκλος, η μεσοκάθετη, η διχοτόμος γωνίας.	

Τα δύο είδη της συμμετρίας, κεντρική και αξονική μελετήθηκαν αναλυτικά στο κεφάλαιο αυτό και πάλι με τη βοήθεια της ισότητας των τριγώνων. Βασικό συμπέρασμα είναι η ισότητα των συμμετρικών σχημάτων, και βασική έννοια το κέντρο συμμετρίας σχήματος και ο άξονας συμμετρίας σχήματος (π.χ. το κέντρο στον κύκλο και η διάμετρος στον κύκλο).	
Ένα αλλο θέμα που μελετήσαμε ήταν οι ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα: εξωτερική γωνία μεγαλύτερη από κάθε απέναντι εσωτερική, άνισες πλευρές απέναντι από άνισες γωνίες στο ίδιο τρίγωνο, τριγωνική ανισότητα.	
Στο πλαίσιο των ανισοτικών σχέσεων αποδείξαμε ακόμη ότι το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο (ΑΒ>ΑΓ) και ότι η ανισότητα δύο πλάγιων είναι ομόρροπη με την ανισότητα των αποστάσεων των ιχνών τους από το ίχνος της κάθετης (ΑΓ<ΑΔ αν και μόνο αν ΒΓ<ΒΔ).	
Η σχετική θέση μιας ευθείας ως προς ένα κύκλο εξετάστηκε στη συνέχεια: εξωτερική ευθεία (όταν έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο), εφαπτομένη (ένα μόνο κοινό σημείο) και τέμνουσα (δύο κοινά σημεία). Σημαντικότατα συμπεράσματα εδώ είναι η καθετότητα εφαπτομένης και ακτίνας που καταλήγει στο σημείο επαφής και ότι τα δύο εφαπτόμενα τμήματα από ένα σημείο προς κύκλο είναι ίσα.	

Η σχετική θέση δύο κύκλων εξετάστηκε συνοπτικά και διαπιστώθηκε ότι: α) Πλήθος κοινών σημείων: κανένα, ένα ή το πολύ δύο. β) Το πλήθος των κοινών σημείων εξαρτάται από τη σχέση διάκεντρου και αθροίσματος ή διαφοράς ακτίνων. γ) Στους εφαπτόμενους κύκλους (ένα μόνο κοινό σημείο) η διάκεντρος περνά από το σημείο επαφής και σ' αυτό το σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη. δ) Στους τεμνόμενους κύκλους (δύο κοινά σημεία) η διάκεντρος είναι μεσοκάθετη στην κοινή χορδή.	
Το κεφάλαιο έκλεισε με την έννοια της γεωμετρικής κατασκευής (χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη), όπου και πραγματοποιήθηκαν μερικές απ' αυτές. Όπως έγινε κατανοητό σ' αυτές οι γεωμετρικοί τόποι αποδεικνύονται χρησιμότατα εργαλεία σ' ένα τέτοιο πρόβλημα.	