

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α' και Β'
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΝΔΥΛΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΡΤΣΙΩΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΓΚΟΡΑ ΕΛΛΗ
ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ



Ανάδοχος έργου
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΝΔΥΛΑ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

A Θ Η Ν Α

Ομάδα συγγραφής

ΚΑΝΔΥΛΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

Καθηγητής Μαθηματικών - Φροντιστής

ΚΑΡΤΣΙΩΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Καθηγητής Μαθηματικών Λυκείου Αξιούπολης

ΓΚΟΡΑ ΕΛΛΗ

Καθηγήτρια Μαθηματικών Λυκείου Καμπάνη

ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

Καθηγητής Μαθηματικών Λυκείου Κουφαλίων

Φιλολογική επιμέλεια

Αναγνώστου Ελένη - Παυλίδου Έφη

Εικονογράφηση - Επιμέλεια ύλης

Εκδόσεις ΚΕΣΟΠΟΥΛΟΣ

Επιμέλεια εξωφύλλου

NEASIS

Πρόλογος

Το παρόν βιβλίο περιέχει την ύλη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως προβλέπεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα και διδάσκεται στα Λύκεια από το σχολικό έτος 1999-2000.

Γράφτηκε σύμφωνα με τις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου και χωρίζεται σε 13 κεφάλαια που σε γενικές γραμμές περιλαμβάνουν:

- Το 1^ο κεφάλαιο, ένα σύντομο σχόλιο για το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και μία μικρή Ιστορική αναδρομή.
- Το 2^ο κεφάλαιο, τους ορισμούς των θεμελιώδων και βασικών εννοών καθώς και μια απλή αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας.
- Το 3^ο κεφάλαιο, τις σχέσεις ισοτίτων και ανισοτίτων στα τρίγωνα.
- Το 4^ο και 5^ο κεφάλαιο αντίστοιχα, τις ιδιότητες των παραλλήλων ευθειών και των τετραπλεύρων που έχουν παράλληλες πλευρές (παραλληλόγραμμα, τραπέζια).
- Το 6^ο κεφάλαιο, τα εγγεγραμμένα σε κύκλο σχήματα (γωνίες, τετράπλευρα).
- Το 7^ο έως και το 11^ο κεφάλαιο, τα θεωρήματα που αφορούν τις μετρήσεις των μεγεθών. Συγκεκριμένα στο 7^ο αναπτύσσονται όλα τα σχετικά με τις αναλογίες θεωρήματα (Θαλή, δικοτόμων), στο 8^ο η ομοιότητα, στο 9^ο τα θεωρήματα των μετρικών σχέσεων σε τρίγωνο με έμφαση στο Πυθαγόρειο θεωρημα, στο 10^ο τα εμβαδά των ευθυγράμμων σχημάτων και στο 11^ο τη μέτρηση του κύκλου και τα απαραίτητα για το σκοπό αυτό κανονικά πολύγωνα.
- Τα δύο τελευταία κεφάλαια περιέχουν τη Γεωμετρία του χώρου. Ειδικότερα το 12^ο ασχολείται με τη μελέτη ευθειών και επιπέδων, ενώ το 13^ο με τη μελέτη των βασικών στερεών στο χώρο (πρίσμα, πυραμίδα, κύλινδρος, κώνος, σφαίρα).

Η δομή του κάθε κεφαλαίου συνίσταται σε ανάπτυξη της θεωρίας με παρατηρήσεις και σχόλια, εφαρμογές, δραστηριότητες θεωρητικές και πρακτικές κυρίως για συζήτηση μέσα στην αίθουσα, ερωτήσεις σύντομης απάντησης για έλεγχο της θεωρίας σε ασκήσεις χωρισμένες ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας τους σε Α' και Β' ομάδα αλλά και σε γενικές για όλο το κεφάλαιο, σε ερωτήσεις κατανόσης και επιλογικά σε μια σύντομη ανακεφαλαίωση.

Στη συνέχεια παρατίθενται δύο παραρτήματα, ένα για την αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας και ένα για τη σφαιρική Γεωμετρία. Το βιβλίο δε ολοκληρώνεται με το ευρετήριο όρων και τις υποδείξεις για τις λύσεις των ασκήσεων.

Οι συγγραφείς

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

1.1	Το αντικείμενο της Γεωμετρίας	11
1.2	Ιστορική αναδρομή	13

Κεφάλαιο 2

Τα βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

2.1	Οι Πρωταρχικές Γεωμετρικές Έννοιες	15
2.2	Ευθύγραμμο Τμήμα	17
	2.2.1 Ημιευθεία-Ευθύγραμμο τμήμα	17
	2.2.2 Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων	18
	Πράξεις μεταξύ τμημάτων	19
	2.2.3 Μίκος ευθύγραμμου τμήματος	21
	Απόσταση σημείων	21
	Εφαρμογές	22
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	23
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	24
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	24
2.3	Γωνίες	25
	2.3.1 Το ημιεπίπεδο	25
	2.3.2 Η έννοια της γωνίας	25
	2.3.3 Σύγκριση γωνιών	26
	2.3.4 Κάθετες ευθείες	27
	2.3.5 Πράξεις με γωνίες	29
	Εφαρμογές	34
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	35
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	36
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	36
2.4	Κύκλος	37
	2.4.1 Η έννοια του κύκλου	37
	2.4.2 Επίκεντρη γωνία	38
	2.4.3 Μέτρο τόξου-Μέτρο γωνίας	39
	Εφαρμογές	41
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	45
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	45

Ασκήσεις Β' Ομάδας 45

2.5	Ευθύγραμμα σχήματα	46
	2.5.1 Τεθλασμένη γραμμή	46
	2.5.2 Πολύγωνο	47
	2.5.3 Στοιχεία πολυγώνου	48
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	48
	Γενικές ασκήσεις 2 ^{ου} κεφαλαίου	48
	Ερωτήσεις Κατανόσης 2 ^{ου} κεφαλαίου	49
	Ανακεφαλαίωση	51

Κεφάλαιο 3

Τρίγωνα

3.1	Σύγκριση τριγώνων	
	3.1.1 Είδη τριγώνων	53
	3.1.2 Στοιχεία τριγώνου	54
	3.1.3 Κριτήρια ισότητας τριγώνων	55
	3.1.4 Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων	60
	Εφαρμογές	62
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	65
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	65
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	66
3.2	Βασικοί γεωμετρικοί τόποι	
	Εφαρμογές	68
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	70
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	70
3.3	Συμμετρικά σχήματα	71
	3.3.1 Κεντρική συμμετρία	71
	3.3.2 Αξονική συμμετρία	72
	Εφαρμογές	73
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	74
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	74
3.4	Ανισοτικές σχέσεις	75
	3.4.1 Σχέσεις εξωτερικής και απέναντι εσωτερικής γωνίας τριγώνου	75
	3.4.2 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών τριγώνου	76

3.4.3	Τριγωνική ανισόπτα	77
3.4.4	Κάθετες και πλάγιες ευθείες .	77
	Εφαρμογές	80
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης . . .	83
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	83
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	84
3.5	Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου	85
	Εφαρμογές	87
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης . . .	87
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	88
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	88
3.6	Σχετικές θέσεις δύο κύκλων	89
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης . . .	91
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	91
3.7	Γεωμετρικές κατασκευές	92
	Προβλήματα	92
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	100
	Γενικές Ασκήσεις 3 ^{ου} κεφαλαίου . . .	100
	Ερωτήσεις Κατανόησης 3 ^{ου} κεφαλαίου .	100
	Ανακεφαλαίωση	102

Κεφάλαιο 4

Παράλληλες ευθείες

4.1	Παράλληλες ευθείες	105
4.2	Ιδιότητες παράλληλων ευθειών .	110
4.2.1	Κατασκευή παράλληλης ευθείας . .	111
4.2.2	Γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες	112
4.2.3	Άθροισμα γωνιών τριγώνου και κυρτού πολυγώνου.	113
	Εφαρμογές	116
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης . . .	117
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	118
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	119
	Γενικές ασκήσεις 4 ^{ου} κεφαλαίου.	120
	Ερωτήσεις κατανόησης 4 ^{ου} κεφαλαίου .	120
	Ανακεφαλαίωση	122

Κεφάλαιο 5

Τετράπλευρα

5.1	Ορισμός και ιδιότητες παραλληλογράμμων	123
5.1.1	Ορισμός	123
5.1.2	Ιδιότητες παραλληλογράμμων. .	123
	Εφαρμογές	126
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης . . .	127
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	128
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	129
5.2	Είδη παραλληλογράμμων.	130
	Εφαρμογές	134
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης . . .	135
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	135
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	136
5.3	Εφαρμογές ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων	137
	Εφαρμογές	140
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης . . .	141
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	141
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	142
5.4	Τραπέζια	143
	Εφαρμογές	144
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης . . .	145
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	145
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	145
5.5	Αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου .	147
	Εφαρμογές	149
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης . . .	150
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	151
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	152
	Γενικές ασκήσεις 5 ^{ου} κεφαλαίου.	152
	Ερωτήσεις κατανόησης 5 ^{ου} κεφαλαίου .	153
	Ανακεφαλαίωση	155

Κεφάλαιο 6

Σχήματα εγγεγραμμένα σε κύκλο

6.1	Εγγεγραμμένες γωνίες	157
	Εφαρμογές	162

Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	164	Ασκήσεις Α' Ομάδας	201
Ασκήσεις Α' Ομάδας	165	Ασκήσεις Β' Ομάδας	202
Ασκήσεις Β' Ομάδας	166	Γενικές ασκήσεις 7 ^{ου} κεφαλαίου	203
6.2 Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα.	167	Ερωτήσεις κατανόσης 7 ^{ου} κεφαλαίου	203
Εφαρμογές	169	Ανακεφαλαίωση	2-5
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	170		
Ασκήσεις Α' Ομάδας	170		
Ασκήσεις Β' Ομάδας	171		
6.3 Χρήση γεωμετρικών τόπων σε γεωμετρικές κατασκευές	172		
Εφαρμογές	175		
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	177		
Ασκήσεις Α' Ομάδας	178		
Ασκήσεις Β' Ομάδας	178		
Γενικές ασκήσεις 6 ^{ου} κεφαλαίου.	178		
Ερωτήσεις κατανόσης 6 ^{ου} κεφαλαίου	179		
Ανακεφαλαίωση	181		

Κεφάλαιο 7

Αναλογίες

7.1 Η έννοια του λόγου.	183
7.1.1 Γινόμενο αριθμού με ευθύγραμμο τμήμα	183
7.1.2 Λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων.	184
7.1.3 Αναλογίες και ιδιότητες των αναλογιών	186
7.1.4 Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά ως προς λόγο λ	187
7.2 Θεώρημα του Θαλή.	188
Εφαρμογές	191
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	192
Ασκήσεις Α' Ομάδας	193
Ασκήσεις Β' Ομάδας	194
7.3 Κύκλος του Απολλώνιου	195
Εφαρμογές	199
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	201

Κεφάλαιο 8

Ομοιότητα

8.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα	207
8.1.1 Σμίκρυνση - Μεγέθυνση και ομοιότητα	207
8.1.2 Κατασκευή όμοιων τριγώνων	209
8.2 Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων	214
Εφαρμογές	216
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	219
Ασκήσεις Α' Ομάδας	219
Ασκήσεις Β' Ομάδας	220
Γενικές ασκήσεις 8 ^{ου} κεφαλαίου.	221
Ερωτήσεις κατανόσης 8 ^{ου} κεφαλαίου	222
Ανακεφαλαίωση	224

Κεφάλαιο 9

Μετρικές σχέσεις

9.1 Μετρικές σχέσεις σε τρίγωνα	225
9.1.1 Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνια τρίγωνα	226
9.1.2 Μετρικές σχέσεις σε τυχαία τρίγωνα	230
Εφαρμογές	236
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	239
Ασκήσεις Α' Ομάδας	240
Ασκήσεις Β' Ομάδας	241
9.2 Μετρικές σχέσεις σε κύκλο	243
9.2.1 Δύναμη σημείου ως προς κύκλο.	243
9.2.2 Γεωμετρική κατασκευή των θετικών ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης	244
Εφαρμογές	248
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	250
Ασκήσεις Α' Ομάδας	251
Ασκήσεις Β' Ομάδας	251

Γενικές ασκήσεις 9 ^{ου} κεφαλαίου	252
Ερωτήσεις κατανόησης 9 ^{ου} κεφαλαίου	252
Ανακεφαλαίωση	254

Κεφάλαιο 10

Εμβαδά

10.1 Η έννοια του εμβαδού	257
10.2 Εμβαδά γνωστών σχημάτων	259
10.2.1 Βασικά θεωρήματα	259
10.2.2 Άλλοι τρόποι για το εμβαδό τριγώνου	262
Εφαρμογές	264
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	267
Ασκήσεις Α' Ομάδας	267
Ασκήσεις Β' Ομάδας	268
10.3 Σχέσεις εμβαδών	270
Εφαρμογές	273
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	275
Ασκήσεις Α' Ομάδας	276
Ασκήσεις Β' Ομάδας	276
10.4 Τετραγωνισμός πολυγώνων.	277
Ασκήσεις Α' Ομάδας	279
Γενικές ασκήσεις 10 ^{ου} κεφαλαίου	280
Ερωτήσεις κατανόησης 10 ^{ου} κεφαλαίου	280
Ανακεφαλαίωση	283

Κεφάλαιο 11

Μέτρηση κύκλου

11.1 Κανονικά πολύγωνα	285
11.1.1 Έννοια κανονικού πολυγώνου	285
11.1.2 Ιδιότητες κανονικών πολυγώνων	287
11.1.3 Εγγραφή τετραγώνου, κανονικού εξαγώνου, και κανονικού ισόπλευρου τριγώνου σε κύκλο	290
Εφαρμογές	295
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	297
Ασκήσεις Α' Ομάδας	298
Ασκήσεις Β' Ομάδας	298
11.2 Μήκος κύκλου	300

11.2.1 Προσέγγιση του μήκους ενός κύκλου	300
11.2.2 Μήκος κύκλου-Μήκος τόξου.	301
Εφαρμογές	304
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	305
Ασκήσεις Α' Ομάδας	306
Ασκήσεις Β' Ομάδας	306
11.3 Εμβαδό κυκλικού δίσκου	307
11.3.1 Προσέγγιση του εμβαδού κυκλικού δίσκου	307
11.3.2 Εμβαδό κυκλικού τομέα	307
Εφαρμογές	309
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	311
Ασκήσεις Α' Ομάδας	311
Ασκήσεις Β' Ομάδας	312
Γενικές ασκήσεις 11 ^{ου} κεφαλαίου	312
Ερωτήσεις κατανόησης 11 ^{ου} κεφαλαίου	313
Ανακεφαλαίωση	315

Κεφάλαιο 12

Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

12.1 Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο	317
Εφαρμογές	322
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	323
Ασκήσεις Α' Ομάδας	323
Ασκήσεις Β' Ομάδας	324
12.2 Η παραλληλία και η καθετότητα στο χώρο	325
Εφαρμογές	334
Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	337
Ασκήσεις Α' Ομάδας	338
Ασκήσεις Β' Ομάδας	339
Γενικές ασκήσεις 12 ^{ου} κεφαλαίου	340
Ερωτήσεις κατανόησης 12 ^{ου} κεφαλαίου	341
Ανακεφαλαίωση	342

Κεφάλαιο 13

Στερεά σχήματα

Εισαγωγή	343
--------------------	-----

13.1	Πρίσματα	346	Εφαρμογές	376
	Εφαρμογές	353	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	377
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	354	13.6 Κανονικά στερεά	378
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	354	Ασκήσεις Α' Ομάδας	379
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	355	Ασκήσεις Β' Ομάδας	380
13.2	Πυραμίδες	356	Γενικές ασκήσεις 13 ^{ου} κεφαλαίου	381
	Εφαρμογές	360	Ερωτήσεις κατανόησης 13 ^{ου} κεφαλαίου	382
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	361	Ανακεφαλαίωση	383
	Ασκήσεις Α' Ομάδας	362		
	Ασκήσεις Β' Ομάδας	362		
	Στερεά εκ περιστροφής	363		
13.3	Κύλινδρος	363		
	Εφαρμογές	365	1 Η ανάγκη αξιωματικής θεμελίωσης της	
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	366	Ευκλείδειας Γεωμετρίας	385
13.4	Κώνος	367	2 Μία Γεωμετρία στην επιφάνεια της	
	Εφαρμογές	370	σφαίρας	388
	Ερωτήσεις σύντομης απάντησης	371	Απαντήσεις και υποδείξεις για τη λύση των	
13.5	Σφαίρα	372	ασκήσεων	390
		Ευρετήριο όρων	405	

Παράτημα

1	Η ανάγκη αξιωματικής θεμελίωσης της	
	Ευκλείδειας Γεωμετρίας	385
2	Μία Γεωμετρία στην επιφάνεια της	
	σφαίρας	388
	Απαντήσεις και υποδείξεις για τη λύση των	
	ασκήσεων	390
	Ευρετήριο όρων	405

Κεφάλαιο

Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της Γεωμετρίας

Η επιστήμη της Γεωμετρίας ασχολείται και μελετά τα διάφορα σχήματα που πολλές φορές είναι εικόνες πραγματικών αντικειμένων. Σε καμία περίπτωση πάντως δεν ενδιαφέρεται για την υλική τους υπόσταση, αλλά για τις ιδιότητες που οφείλονται στη μορφή τους και μόνο. Επιγραμματικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων, τα οποία θεωρούνται αφηρημένες έννοιες και όχι υλικά αντικείμενα.

Στις προηγούμενες τάξεις του γυμνασίου, ορισμένα κεφάλαια των Μαθηματικών ήταν αφιερωμένα στη μελέτη τέτοιων σχημάτων. Σ' αυτά μελετήσαμε αρκετά γεωμετρικά σχήματα όπως είναι η ευθεία, η γωνία, ο κύκλος, το τρίγωνο, το παραλληλόγραμμο, ο κύβος, ο κώνος, η πυραμίδα, η σφαίρα και πολλά άλλα.

Συγκεκριμένα εντοπίσαμε τις ιδιότητές τους, βρήκαμε τρόπους να τα συγκρίνουμε και τρόπους να τα σχεδιάζουμε με ικανοποιητική ακρίβεια. Πολλές φορές μάλιστα βγάλαμε και γενικά συμπεράσματα για ομάδες ομοειδών σχημάτων, πχ. ότι σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των τριών γωνιών είναι 180° .

Αρχικά θα ασχοληθούμε με την αξιολόγηση των μεθόδων που ακολουθήσαμε στις παραπάνω ενέργειες.

Για το σχεδιασμό των σχημάτων χρησιμοποιούσαμε μια πληθώρα εργαλείων-οργάνων (διαβήτης, χάρακας, μοιρογνωμόνιο, τρίγωνο) και πετυχαίναμε στην πράξη ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Για τον έλεγχο της ισότητας των σχημάτων ακολουθήσαμε κυρίως τη διαδικασία της επανασχεδίασης σε διαφανές χαρτί και της



μεταπόσιος του ενός σχήματος στη θέση του άλλου. Μ' αυτόν τον τρόπο, οπτικά, διαπιστώναμε ή όχι την ισότητα των σχημάτων.

Είναι φανερό ότι στις παραπάνω διαδικασίες η ακρίβεια των οργάνων σχεδίασης, η ικανότητα σωστού χειρισμού από μας και η ακριβής παρατήρηση είναι παράγοντες που επιδρούν σημαντικά στην εξαγωγή των συμπερασμάτων.

Τα συμπεράσματα τα βγάζουμε μετά από επαναλαμβανόμενες συνήθως μετρήσεις, από τις οποίες διαπιστώνουμε ότι έχουμε πάντα τα ίδια ή και παραπλήσια αποτέλεσματα. Έτσι, καταλήγουμε σιγά σιγά στην πεποίθηση ότι αυτό το συμπέρασμα ισχύει γενικά και το διατυπώνουμε στη συνέχεια με κάποιες προτάσεις.

Αν αυτά τώρα τα κρίνουμε λίγο πιο αυστηρά, θα διαπιστώσουμε δύο τρωτά σημεία:

- Η ακρίβεια των οργάνων μέτρησης δεν είναι ποτέ απόλυτη ούτε και η ικανότητα αυτών που τα χειρίζονται.
- Αυτό που ισχύει για μία μεγάλη ομάδα μιας κατηγορίας σχημάτων δεν σημαίνει ότι αναγκαστικά ισχύει και για όλα τα σχήματα αυτής της κατηγορίας.

Εδώ εμφανίζεται η διαφορά της Πρακτικής από τη Θεωρητική Γεωμετρία. Η πρώτη ασχολείται με τη μελέτη των διαφόρων σχημάτων, αλλά τα συμπεράσματά της τα αποκομίζει κυρίως μετά από μετρήσεις, ή εμπειρικά και πολύ λίγο με συλλογισμούς. Σε αντίθεση με την Πρακτική, η Θεωρητική Γεωμετρία εξάγει τα συμπεράσματά της χωρίς καμία απολύτως πρακτική βοήθεια, αλλά μόνο με λογικούς συλλογισμούς, δηλαδή με την διαδικασία της απόδειξης. Η απόδειξη είναι μια σειρά λογικών συλλογισμών οι οποίοι μας οδηγούν σε συμπεράσματα που δεν επιδέχονται καμία αμφισβήτηση, είναι δηλαδή ένα παιχνίδι λογικής, ένας τρόπος χειρισμού του μυαλού.

Το γεγονός ότι δεν υπάρχει δυνατότητα αμφισβήτησης των συμπερασμάτων της Θεωρητικής Γεωμετρίας δίνει σ' αυτά καθολική αποδοχή.

Για το σχεδιασμό τώρα των σχημάτων στη γεωμετρία, οι μέθοδοι της Πρακτικής δίνουν πάρα πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ωστόσο, το ενδιαφέρον μας τώρα στρέφεται στη δυνατότητα κατασκευής ενός σχήματος με ελάχιστα μέσα (διαβήτη και χάρακα χωρίς υποδιαιρέσεις) και όχι στον ακριβή σχεδιασμό του· δηλαδή κι εδώ μας ενδιαφέρει η θεωρητική πλευρά του προβλήματος.

1.2 Ιστορική αναδρομή

Η γέννηση της Γεωμετρίας, όπως δολώνει και το όνομά της, οφείλεται στην ανάγκη μέτρησης της γης (γαία μετρώ). Αυτό φαίνεται να συνέβη ιστορικά πριν από μερικές χιλιετίες στην περιοχή της Μεσοποταμίας και του ποταμού Νείλου στην Αίγυπτο. Εκεί μετά από τις πλημμύρες των ποταμών αλλοιώνονταν τα όρια των χωραφιών και προέκυπτε η ανάγκη να επαναπροσδιοριστούν αυτά στις αρχικές τους θέσεις και διαστάσεις. Κατ' αυτόν τον τρόπο γεννήθηκε η Πρακτική Γεωμετρία, η οποία και κυριάρχησε ως η μοναδική Γεωμετρία για μερικές χιλιάδες χρόνια.

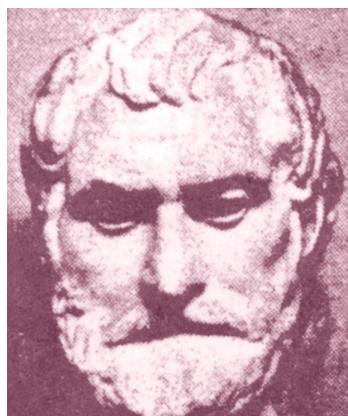
Η γέννηση της Θεωρητικής Γεωμετρίας πραγματοποιήθηκε πολύ αργότερα από την αντίστοιχη της Πρακτικής, περίπου 500 χρόνια πριν τη γέννηση του Χριστού και οφείλεται στους Έλληνες της Ιωνίας. Ο Θαλής από τη Μήλο θεωρείται ο πρώτος επιστήμονας της ανθρωπότητας και τον τίτλο αυτόν τον κέρδισε και από την συμβολή του στην θεώρηση της Γεωμετρίας από την πλευρά της ορθολογικής μαθηματικής σκέψης. Ο Πυθαγόρας από τη Σάμο αργότερα και στη συνέχεια ο Ευκλείδης, πιο συστηματικά από τους άλλους, καθιέρωσαν τον ορθό λόγο (λογικό συλλογισμό) σαν το μοναδικό εργαλείο της Γεωμετρίας.

Μεγαλειώδες έργο του Ευκλείδη (323-283 π.Χ.) είναι τα "Στοιχεία", στο οποίο συστηματοποίησε εργασίες προγενέστερων μαθηματικών, όπως του Πυθαγόρα. Αποτέλεσε δε τη βάση για μελέτες μεταγενέστερων μαθηματικών, όπως του Απολλωνίου του Περγαίου (12^{ος} αι. π.Χ.) στις κωνικές τομές και του Αρχιμήδη (3^{ος} αι. π.Χ.) στη Μηχανική και το εμβαδό του κύκλου.

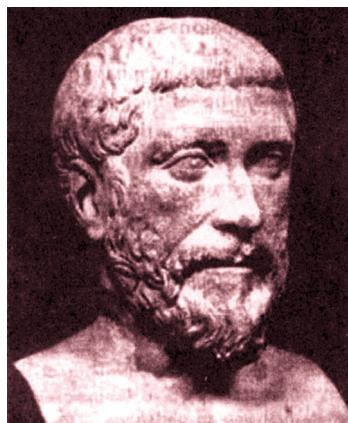
Τα "Στοιχεία" αποτελούνται από 13 βιβλία: τα έξι πρώτα έχουν ως αντικείμενο την επιπεδομετρία, τα τρία επόμενα τη θεωρία των αριθμών, το 10ο ασχολείται με τα ασύμμετρα μεγέθη, ενώ τα τρία τελευταία βιβλία πραγματεύονται τη στερεομετρία.

Οι βασικές αρχές και τα βασικά θεωρήματα, που είναι συγκεντρωμένα στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, μαζί με διάφορα θεωρήματα που απέδειξαν μεταγενέστεροι γεωμέτρες αποτελούσαν μέχρι τις αρχές του 20ού αιώνα το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι αποδείξεις του Ευκλείδη ήταν κυρίως περιγραφικές και βασισμένες στα σχήματα. Διάφορες υποθέσεις και λεπτομέρειες τις θεωρούσε προφανείς ή τις παρέλειπε. Το σχήμα ήταν ένα βασικό στοιχείο της απόδειξης, χωρίς όμως να είναι ξεκάθαρο μέχρι ποιο βαθμό έπρεπε να χρησιμοποιηθεί.

Στο 1ο βιβλίο των "Στοιχείων" ο Ευκλείδης παραθέτει 5 "αιτήματα" και



Θαλής



Πυθαγόρας

5 "κοινές έννοιες", δηλαδή θεμελιώδεις αρχές πάνω στις οποίες στηρίζεται η Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Αιτήματα

1. Ήιτήσθω ἀπό παντός σημείου ἐπί πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμήν ἀγαγεῖν.
2. Καί πεπερασμένην εὐθεῖαν κατά τό συνεχές ἐπ' εὐθεῖαν ἐκβαλεῖν.
3. Καί παντί κέντρῳ καί διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
4. Καί πάσας τάς ὁρθάς γωνίας ἵσας ἀλλήλαις εἶναι.
5. Καί ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεία ἐμπίπτουσα τάς ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας δύο ὁρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τάς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἂ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὁρθῶν ἐλάσσονες.

Κοινές έννοιες

1. Τά τῷ αὐτῷ ἵσα καὶ ἀλλήλοις ἔστιν ἵσα.
2. Καί ἐάν ἵσοις ἵσα προστεθῇ, τά δὲ ὅλα ἔστιν ἵσα.
3. Καί ἐάν ἀπό ἵσων ἵσα ἀφαιτεθῇ, τά καταλειπόμενα ἔστιν ἵσα.
4. Καί τά ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλληλα ἵσα ἀλλήλοις ἔστιν.
5. Καί τό δῶλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἔστιν.

Τα "Στοιχεία" μεταφράστηκαν στα Αραβικά κατά τη διάρκεια της βασιλείας του Χαρούν αλ-Ρασίντ (Harun al-Rashid, 786-809). Την πρώτη πλήρη λατινική μετάφραση από τα αραβικά έκανε ο Αγγλος σχολαστικός φιλόσοφος Αδελάρδος (Adelard) γύρω στο 1120. Έτσι, το βιβλίο ήταν κάπως γνωστό στο Μεσαίωνα, αλλά μόνο το 15ο αιώνα, όταν εφευρέθηκε η τυπογραφία, έγινε δεκτό να μελετηθεί σοβαρά στα πανεπιστήμια της Οξφόρδης και του Καΐμπριτζ.

Μέχρι τον 20ό αιώνα, το βιβλίο του Ευκλείδη ή παρόμοια μ' αυτό χρησιμοποιούνταν σε όλα τα σχολεία παγκοσμίως.

Η χρήση του όμως προκάλεσε τελικά δικαιολογημένες αντιδράσεις γιατί δεν ήταν αρκετά ακριβές ώστε να ικανοποιεί τις σύγχρονες απαιτήσεις της μαθηματικής επιστήμης.

Ωστόσο, η μάθηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, καθώς απαιτεί επιμονή, πνευματική διαύγεια και οξυδέρκεια, προσφέρει την αίσθηση επιτυχίας και της προσωπικής ικανοποίησης.

Και σύμφωνα με τη ρήση του μεγάλου φυσικού N. Bohr: "Όταν βρείτε ένα μαντάρι και το μαζέψετε, κοιτάξτε γύρω και για άλλα· έτσι να κάνετε και μετά την πρώτη σας ανακάλυψη-επιτυχία· και τα δύο είδη φυτρώνουν ομαδικά".

