



Καλαμαρί

ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ - ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ

8ΗΣ ΗΜΕΡΙΔΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΜΑ: Η εννοιολογική κατανόηση
των Μαθηματικών ως πρόκληση
στο σύγχρονο σχολείο
(Δημοτικό - Γυμνάσιο - Λύκειο)

Επιμέλεια:

Ιωάννης Σαράφης - Αθανάσιος Πέρδος

**10 ΜΑΡΤΙΟΥ
2018**

Πρόλογος

Στην έκδοση αυτή περιλαμβάνονται οι εργασίες των εισηγητών που αναλύουν με θεωρητικό και πρακτικό τρόπο την εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών στο Δημοτικό – Γυμνάσιο – Λύκειο.

Η επιμέλεια έγινε με γνώμονα την πρακτική αξιοποίηση των εργασιών από μάχιμους εκπαιδευτικούς που είτε κάνουν τα πρώτα βήματα τους στη διδασκαλία του μαθήματος είτε έχουν σημαντική εμπειρία αλλά θέλουν να εντοπίσουν μικρές λεπτομέρειες που θα βελτιώσουν περαιτέρω τη διδασκαλία τους.

Η 8^η Ημερίδα Μαθηματικών διεξήχθη στις 10/3/2018 στην Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί σε συνεργασία με τους Σχολικούς Συμβούλους Μαθηματικών, Ανατολικής Θεσσαλονίκης κ. Ανδρέα Πούλο, Κιλκίς – Λαγκαδά – Ωραιοκάστρου κ. Ιωάννη Θωμαΐδη.

Οφείλουμε να ευχαριστήσουμε για την ευγενική χορηγία τον κ. Παναγιώτη Κανδύλα.

Με εκτίμηση

Η οργανωτική Επιτροπή

Ιωάννης Σαράφης – Μαθηματικός

Αθανάσιος Πέρδος – Φυσικός - Πληροφορικός

Χριστίνα Τίκβα - Πληροφορικός

Νικόλαος Παλάζης (Κοινωνιολόγος)

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΗΜΕΡΙΔΑΣ

17:30 – 17:45. ΠΡΟΣΕΛΕΥΣΗ – ΕΓΓΡΑΦΕΣ
 17:45 – 18:00. ΕΝΑΡΞΗ – ΧΑΙΡΕΤΙΣΜΟΙ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

- 18:00–18:20. κ. Σωτήρης Μαρκάδας, Σχολικός Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης 13^{ης} Περιφέρειας Θεσσαλονίκης
 «Η εννοιολογική κατανόηση και η διαδικαστική γνώση στα Μαθηματικά: μια διαρκώς παρούσα διελκυστίνδα για τη διδασκαλία τους.»
- 18:20–18:40. κα. Κατερίνα Καλφοπούλου, Μαθηματικός 1^{ου} Γυμνασίου Νεάπολης (Θεσσαλονίκη)
 «Η επικράτεια των αλγορίθμων στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο »
- 18:40–18:55. κ. Πρόδρομος Ελευθερίου , Επίτιμος Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Ν. Λέσβου
 «Στοχεύοντας στην κατανόηση και την εμβάθυνση εννοιών της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου »
- 18:55–19:10. κ. Βασίλης Καρκάνης , Μαθηματικός 2^{ου} Πειραματικού Λυκείου Αθήνας
 «Εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών- Η διδακτική σημασία των ανοικτών προβλημάτων στη Γεωμετρία »
- 19:10–19:25. κ. Γιάννης Θωμαΐδης , Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Κιλκίς – Λαγκαδά – Ωραιοκαστρου
 «Η εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών ως βασικό προαπαιτούμενο στη διδασκαλία και μάθηση της Ανάλυσης »
- 19:25–19:40. κ. Θεοδόσης Ζαχαριάδης, Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.
 «Η σημασία της εννοιολογικής κατανόησης στη διδασκαλία των Μαθηματικών κατά τη μετάβαση από το σχολείο στο πανεπιστήμιο»
- 19.40 – 20.00. ΔΙΑΛΕΙΜΜΑ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΣΤΡΟΓΓΥΛΟ ΤΡΑΠΕΖΙ

- 20:00–20:20. Τοποθέτηση των κ. Πρόδρομου Ελευθερίου, κ. Βασίλη Καρκάνη, κ. Γιάννη Θωμαΐδη, κ. Θεοδόση Ζαχαριάδη
- 20:20–22:00. Ερωτήσεις - Συζήτηση

Η εννοιολογική κατανόηση και η διαδικαστική γνώση στα Μαθηματικά: μια διαρκώς παρούσα διεγκυστίνδα για τη διδασκαλία τους.

Δρ Μαρκάδας Σωτήρης
Δάσκαλος

Σχολικός Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
markadas@sch.gr

Περίληψη

Το να γνωρίζει κάποιος πως προσθέτουμε $1/3 + 1/4 + 1/5$ σημαίνει ότι αντιλαμβάνεται (χωρίς να κάνει πρόσθεση) αν το άθροισμα τους είναι μικρότερο από τη μονάδα ή ότι κατανοεί όλες τις διαστάσεις της έννοιας ‘κλάσμα’; Όταν τα παιδιά επιλύουν προβλήματα, ενισχύουν επίσης την κατανόηση των υποκείμενων εννοιών; Υπό ποιες συνθήκες οι αφηρημένες μαθηματικές έννοιες βοηθούν τα παιδιά να εφαρμόζουν σωστές μαθηματικές διαδικασίες;

Οι μαθηματικές ικανότητες βασίζονται στην ανάπτυξη της γνώσης των εννοιών και των διαδικασιών, δηλαδή των εννοιολογικών και διαδικαστικών γνώσεων. Αν και υπάρχει μεταβλητότητα στον τρόπο με τον οποίο αυτές οι γνώσεις ορίζονται και μετριοούνται, ερευνητές και εκπαιδευτικοί θεωρούν πως οι σχέσεις μεταξύ τους είναι αμφίδρομες (Arslan, 2010 · LeFevre, et al., 2006 · Star, 2002). Το πως συμπλέκονται είναι ένα από τα πιο σημαντικά ζητούμενα στο χώρο της Μαθηματικής έρευνας. Η οριοθέτηση του τρόπου αλληλεπίδρασης αυτών των δύο τύπων γνώσεων είναι θεμελιώδης για την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση και συμβάλλει στη βελτίωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών (Hallett, Nunes, & Bryant, 2010 · Baroody, 2003 · Haapasalo, & Kadijevich, 2000).

Ερευνητικά προγράμματα έχουν αναδείξει προτάσεις διδακτικών μεθόδων για την υποστήριξη και των δύο τύπων γνώσεων όπως η προώθηση της σύγκρισης εναλλακτικών τρόπων λύσης, η προτροπή στους μαθητές-τριες να εξηγούν και να ερμηνεύουν και η παροχή ευκαιριών για διερεύνηση πριν από την διδασκαλία (Rittle-Johnson, & Schneider, 2014 · Hallett, Nunes, & Bryant, 2010). Είναι πλέον γενικά αποδεκτό (Canobi, & Bethune, 2008 · Van de Walle, 2007) ότι οι διαδικαστικοί κανόνες χωρίς εννοιολογική βάση αποτελούν κανόνες χωρίς εκλογίκευση και οδηγούν όχι μόνο σε λάθη αλλά και σε αίσθημα αντιπάθειας προς τα Μαθηματικά.

Τι είναι ‘εννοιολογική γνώση’;

Σύμφωνα με το *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας*¹, έννοια είναι «η νοητική εικόνα για την ουσία, το περιεχόμενο συγκεκριμένου πράγματος, απτού ή αφηρημένου, η ιδέα που σχηματίζεται στο νου για κάθε στοιχείο του κόσμου». Στα μαθηματικά η γνώση των εννοιών αναφέρεται συχνά ως *εννοιολογική γνώση* (Canobi, 2009). Ορίζεται από τους Kilpatrick, Swafford, και Findell (2001), ως «κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, λειτουργιών και σχέσεων». Αυτός ο τύπος γνώσης αποκαλείται ενίοτε και εννοιολογική κατανόηση ή γνώση βασισμένη σε ‘αρχές’.

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό του Hiebert και LeFevre (1986), «η εννοιολογική γνώση είναι πλούσια σε διασυνδέσεις. Μπορεί να θεωρηθεί ως ένας ιστός γνώσης, ένα δίκτυο στο οποίο οι σχέσεις σύνδεσης είναι τόσο σημαντικές όσο και οι διακριτές πληροφορίες. Οι

¹ Μπαμπινιώτης, Γ. (1998). *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας*. Αθήνα: Κέντρο Λεξικολογίας.

σχέσεις διαπερνούν τα επιμέρους πληροφοριακά δεδομένα έτσι ώστε όλα τα στοιχεία να συνδέονται σε κάποιο δίκτυο».

Οι Baroody, Feil, και Johnson (2007), πρότειναν πως οι εννοιολογικές γνώσεις θα πρέπει να οριστούν ως «γνώσεις για γεγονότα, γενικεύσεις και αρχές» χωρίς να απαιτείται να είναι πλούσια συνδεδεμένες. Η εμπειρική υποστήριξη αυτής της προσέγγισης προέρχεται από την έρευνα για την εννοιολογική αλλαγή που δείχνει ότι (1) η εννοιολογική γνώση των αρχαρίων είναι συχνά κατακερματισμένη και πρέπει να ενσωματωθεί κατά τη διάρκεια της μάθησης και (2) οι εννοιολογικές γνώσεις των μη αρχαρίων συνεχίζουν να επεκτείνονται και να οργανώνονται.

Τι είναι “διαδικαστική γνώση”;

Μια διαδικασία είναι μια σειρά βημάτων ή ενεργειών που γίνονται για να επιτευχθεί ένας στόχος. Η γνώση των διαδικασιών ονομάζεται συχνά διαδικαστική γνώση (Canobi, 2009· Rittle-Johnson et al., 2001). Η διαδικαστική γνώση είναι η “γνώση του πώς” ή η γνώση των βημάτων που απαιτούνται για την επίτευξη διαφόρων στόχων. Οι διαδικασίες μπορούν να είναι (1) αλγόριθμοι - μια προκαθορισμένη ακολουθία ενεργειών που θα οδηγήσουν στη σωστή απάντηση όταν εκτελούνται σωστά, ή (2) πιθανές ενέργειες που πρέπει να εκτελεστούν κατάλληλα για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος (π.χ., βήματα επίλυσης εξισώσεων). Αυτή η γνώση αναπτύσσεται μέσω της πρακτικής επίλυσης προβλημάτων και συνεπώς συνδέεται με συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων. «Η σαφώς διαδοχική φύση των διαδικασιών τις ξεχωρίζει από άλλες μορφές γνώσης» (Hiebert & LeFevre, 1986).

Οι Baroody et al., (2007) αναφέρουν ότι «ορισμένοι εκπαιδευτικοί μαθηματικών προχωρούν σε υπεραπλουστεύσεις και επιπόλαια ή αθέλητα εξισώνουν τις γνώσεις που απομνημονεύονται με τις διαδικαστικές γνώσεις». Οι ερευνητές των μαθηματικών συνήθως καθορίζουν τις διαδικαστικές γνώσεις ως διαδοχικές ή “βήμα προς βήμα” οδηγίες για πώς να ολοκληρωθούν εργασίες (Hiebert & Lefevre, 1986).

Μέτρηση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης

Ο τρόπος με τον οποίο μετριέται η εννοιολογική και διαδικαστική γνώση είναι κρίσιμος για την ερμηνεία των σχέσεων τους. Οι εννοιολογικές γνώσεις έχουν αξιολογηθεί με μεγάλη ποικιλία τρόπων, ενώ υπάρχει πολύ μικρότερη ποικιλία στον τρόπο μέτρησης της διαδικαστικής γνώσης.

Οι μετρήσεις εννοιολογικής γνώσης ποικίλλουν ανάλογα με το αν οι δραστηριότητες απαιτούν *υπονοούμενη-έμμεση* ή *ρητή-σαφή* γνώση των εννοιών. Οι μετρήσεις της υπονοούμενης-έμμεσης εννοιολογικής γνώσης βασίζονται συχνά σε εργασίες αξιολόγησης στις οποίες τα παιδιά κάνουν μια κατηγορηματική επιλογή (π.χ. κρίνουν την ορθότητα ενός παραδείγματος ή μιας απάντησης) ή κάνουν μια ποιοτική αξιολόγηση (π.χ. αξιολογούν την ορθότητα ενός παραδείγματος ως πολύ καλό, καλό ή μη καλό). Άλλες μετρήσεις υπονοούμενης-έμμεσης εννοιολογικής γνώσης βασίζονται στην κατανόηση ή μη αντιπροσωπευτικών αναπαραστάσεων (π.χ. αντιστοίχιση κλασμάτων σε διαγράμματα πίτας) και σε συγκρίσεις ποσοτήτων. Για παράδειγμα, προβλήματα σύγκρισης μεγεθών χρησιμοποιούνται μερικές φορές για την αξιολόγηση των εννοιολογικών γνώσεων των παιδιών για τα μεγέθη των αριθμών (π.χ. Schneider, Grabner, & Paetsch, 2009).

Οι μετρήσεις ρητής-σαφούς εννοιολογικής γνώσης περιλαμβάνουν συνήθως την παροχή ορισμών και εξηγήσεων. Για παράδειγμα, ζητείται η επιλογή ορισμών για έννοιες και όρους, η σχεδίαση ενός χάρτη ιδεών ή εξηγήσεις γιατί λειτουργεί μια διαδικασία. Τέτοιες εργασίες μετρήσεων μπορούν να γίνουν συμπληρώνοντας στοιχεία αξιολόγησης (σε ένα έντυπο) ή με απαντήσεις κατά τη διάρκεια τυποποιημένων συνεντεύξεων. Ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό αυτών των εργασιών είναι πως τα ζητούμενα είναι άγνωστα στους συμμετέχοντες, έτσι ώστε να αντλούν απάντηση από τις εννοιολογικές τους γνώσεις αντί να εφαρμόζουν μια γνωστή διαδικασία για την επίλυση του έργου.

Οι μετρήσεις εννοιολογικής γνώσης είναι αξιόπιστες αν βασίζονται σε πολλαπλές εργασίες-τεστ. Οι πολλαπλές εργασίες-τεστ που αποσκοπούν στην εκτίμηση της ίδιας έννοιας μειώνουν την επιρροή όσων μετρήσεων αξιολογούν αποκλειστικά συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Η εννοιολογική γνώση σε έναν τομέα συχνά απαιτεί γνώση πολλών επιμέρους εννοιών που οδηγούν σε ένα πολυδιάστατο νοητικό κατασκεύασμα. Για παράδειγμα, για την *καταμέτρηση*, οι βασικές έννοιες περιλαμβάνουν την *πληθικότητα* (πληθθάριθμο) και τη *δυνατότητα αλλαγής σειράς καταμέτρησης* (η οποία δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα), ενώ για τις αριθμητικές πράξεις, οι βασικές έννοιες περιλαμβάνουν την *αξία θέσης* και την αρχή της *αντιμεταθετικότητας*.

Οι μετρήσεις διαδικαστικής γνώσης έχουν πολύ λιγότερη ποικιλία. Στόχος είναι σχεδόν πάντα η επίλυση προβλημάτων και εξετάζεται η ακρίβεια των απαντήσεων ή των διαδικασιών. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι ερευνητές εξετάζουν επίσης το χρόνο λύσης (LeFevre et al., 2006). Οι εργασίες-τεστ διαδικαστικής γνώσης είναι οικείες - περιλαμβάνουν τύπους προβλημάτων που παρόμοια έχουν λύσει οι εξεταζόμενοι και συνεπώς πρέπει να γνωρίζουν διαδικασίες επίλυσης.

Υπάρχουν και άλλες μετρήσεις που έχουν χρησιμοποιηθεί για την αξιοποίηση συγκεκριμένων τρόπων με τους οποίους οι διαδικαστικές γνώσεις μπορούν να ανιχνευθούν. Όταν ενδιαφέρονται για το πόσο ευέλικτες είναι οι διαδικαστικές γνώσεις, οι ερευνητές αξιολογούν τις γνώσεις των μαθητών-τριών σχετικά με πολλαπλές διαδικασίες και την ικανότητά τους να επιλέγουν με ευελιξία μεταξύ τους ποια επιλύει αποτελεσματικά τα προβλήματα. Η ευελιξία της διαδικαστικής γνώσης σχετίζεται θετικά με την εννοιολογική γνώση, αλλά αυτή η σχέση αξιολογείται σπάνια (Schneider, Rittle-Johnson & Star, 2011).

Για να μελετήσουμε τις σχέσεις μεταξύ της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης, είναι σημαντικό να τις αξιολογήσουμε ανεξάρτητα. Ωστόσο, επίσης σημαντικό είναι να αναγνωρίσουμε ότι είναι δύσκολο για ένα τεστ να μετρήσει το ένα είδος γνώσης εξαιρουμένου του άλλου. Αντίθετα, θεωρείται ότι τα τεστ μετρούν κατά κύριο λόγο ένα είδος γνώσης ή το άλλο.

Σχέσεις μεταξύ της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης

Ιστορικά, έχουν υπάρξει τέσσερις διαφορετικές θεωρητικές προσεγγίσεις σχετικά με τις αιτιώδεις σχέσεις μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης (Haapasalo & Kadijevich, 2000). Η *προσέγγιση της πρωτοκαθεδρίας εννοιών* υποδηλώνει ότι τα παιδιά αρχικά αποκτούν εννοιολογική γνώση, για παράδειγμα, μέσα από γονικές εξηγήσεις ή καθοδηγούμενη από εγγενείς περιορισμούς, και στη συνέχεια αποκτούν και αναπτύσσουν διαδικαστικές γνώσεις μέσω επαναλαμβανόμενων πρακτικών επίλυσης προβλημάτων. Η *προσέγγιση της πρωτοκαθεδρίας διαδικασιών* υποδηλώνει ότι τα παιδιά μαθαίνουν πρώτα τις διαδικασίες, για παράδειγμα, μέσω διερευνητικής συμπεριφοράς, και στη συνέχεια αποκτούν από αυτές σταδιακά τις εννοιολογικές γνώσεις, μέσω νοητικών διαδικασιών αφαίρεσης. Μια τρίτη προσέγγιση είναι ότι *οι εννοιολογικές και διαδικαστικές γνώσεις αναπτύσσονται ανεξάρτητα*. Η τέταρτη είναι η *αναδραστική προσέγγιση*. Οι αιτιώδεις σχέσεις υποστηρίζεται ότι είναι αμφίδρομες, και κάθε αύξηση στην εννοιολογική γνώση οδηγεί σε επακόλουθες αυξήσεις των διαδικαστικών γνώσεων και αντίστροφα (Baroody, 2003). Η αναδραστική προσέγγιση είναι πλέον η πιο αποδεκτή. Σύμφωνα με αυτήν επέρχονται σταδιακές βελτιώσεις σε κάθε είδος γνώσης με την πάροδο του χρόνου. Το ένα είδος γνώσης δεν αναπτύσσεται καλά πριν εμφανιστεί το άλλο. Θετικοί συσχετισμοί μεταξύ των δύο τύπων γνώσης έχουν βρεθεί σε ένα ευρύ φάσμα ηλικιών και θεματικών τομέων όπως η απαρίθμηση, η πρόσθεση και αφαίρεση, οι κλασματικοί και δεκαδικοί αριθμοί, η εκτίμηση και η επίλυση εξισώσεων (LeFevre et al., 2006· Canobi & Bethune, 2008· Hallett, Nunes, & Bryant, 2010).

Παιδιά δημοτικών σχολείων έλαβαν ένα πολύ σύντομο μάθημα σχετικά με τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων μαθηματικής ισοδυναμίας (π.χ. $6 + 3 + 4 = 6 + \underline{\quad}$), κάποια άλλα για την έννοια της μαθηματικής ισοδυναμίας και σε μια τρίτη ομάδα δεν δόθηκε κανένα μάθημα-διδασκαλία. Τα παιδιά που παρακολούθησαν το μάθημα της διαδικασίας κέρδισαν

καλύτερη κατανόηση της έννοιας και τα παιδιά που διδάχθηκαν σχετικά με την έννοια δημιούργησαν σωστές διαδικασίες για την επίλυση των προβλημάτων (Rittle-Johnson & Alibali, 1999).

Η ανάπτυξη της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης των μαθηματικών είναι συχνά αναδραστική και το ένα είδος γνώσης υποστηρίζει αύξηση της άλλης, γεγονός που με τη σειρά του στηρίζει βελτίωση της άλλης. Η εννοιολογική γνώση μπορεί να βοηθήσει στην κατασκευή, την επιλογή και την κατάλληλη εκτέλεση διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων. Ταυτόχρονα, η πρακτική εφαρμογή των διαδικασιών μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν και να εμβαθύνουν την κατανόηση των εννοιών, ειδικά εάν έχει σχεδιαστεί για να καταστήσει τις υποκείμενες έννοιες πιο εμφανείς.

Ωστόσο, οι σχέσεις μεταξύ των δύο τύπων γνώσης δεν είναι πάντα συμμετρικές. Σε κάποιες μελέτες, η εννοιολογική γνώση και η εννοιολογική διδασκαλία είχε ισχυρότερη επιρροή στη διαδικαστική γνώση παρά το αντίστροφο (Matthews & Rittle-Johnson, 2009). Επιπλέον, η σύντομη διδασκαλία διαδικασιών ή η πρακτική επίλυσης προβλημάτων δεν υποστηρίζει πάντα την ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης (Canobi, 2009).

Το κατά πόσο η βελτίωση της διαδικαστικής γνώσης υποστηρίζει την αύξηση της εννοιολογικής γνώσης εξαρτάται από τη φύση της διδασκαλίας των διαδικασιών ή της εξάσκησης. Βοηθάει η κατηγοριοποίηση προβλημάτων αριθμητικής πρακτικής ώστε να είναι ευκολότερο να παρατηρηθούν σχετικές εννοιολογικές σχέσεις, ενώ η τυχαία επίδοση πρακτικών προβλημάτων δεν αποδίδει (Canobi, 2009).

Η συμμετρία στις σχέσεις μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης ποικίλλει επίσης μεταξύ ατόμων. Παιδιά της Δ' τάξης και της Ε' τάξης συμμετείχαν σε μετρήσεις της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης των κλασμάτων (Hallett et al., 2010). Μια ανάλυση παραγόντων για τις δύο μετρήσεις ανέδειξε πέντε διαφορετικές ομάδες μαθητών-τριών, με ομάδες που ποικίλλουν ως προς το επίπεδο της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης. Για παράδειγμα, μια ομάδα είχε πάνω από το μέσο όρο των εννοιολογικών γνώσεων και κάτω από το μέσο όρο των διαδικαστικών γνώσεων, σε μια άλλη ομάδα διαπιστώθηκε το αντίθετο και σε μια τρίτη το επίπεδο ήταν υψηλό και στις εννοιολογικές και στις διαδικαστικές γνώσεις. Αυτές οι διαφορές υποδεικνύουν ότι, αν και οι δύο γνώσεις συσχετιζόταν σε όλες τις ομάδες, η ισχύς των σχέσεων ποικίλει.

Συνοψίζοντας, οι σχέσεις μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης είναι αμφίδρομες, αλλά μερικές φορές δεν είναι συμμετρικές. Οι εννοιολογικές γνώσεις υποστηρίζουν με μεγαλύτερη συνέπεια και ένταση τη διαδικαστική γνώση από ότι το αντίστροφο.

Εκπαιδευτικές μέθοδοι για τη βελτίωση και των δύο τύπων γνώσεων

Δεδομένης της σημασίας της ανάπτυξης τόσο της εννοιολογικής όσο και της διαδικαστικής γνώσης, οι εκπαιδευτικές τεχνικές που υποστηρίζουν και τα δύο είδη γνώσεων είναι σημαντικές.

Μια αποτελεσματική διδακτική προσέγγιση είναι η επιδίωξη της σύγκρισης εναλλακτικών διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων. Σε μια σειρά μελετών, οι μαθητές-τριες μελέτησαν επεξεργασμένα ζεύγη παραδειγμάτων-ασκήσεων που εμφανίζουν δύο διαφορετικές, σωστές διαδικασίες, για την επίλυση τους και κλήθηκαν να τις συγκρίνουν. Για τους μαθητές-τριες που γνώριζαν μία από τις διαδικασίες επίλυσης στην αρχική δοκιμασία (pro-test), οι συγκρίσεις των διαδικασιών είχαν ως αποτέλεσμα περισσότερες διαδικαστικές γνώσεις ή περισσότερες εννοιολογικές. Για όσους/ες δεν γνώριζαν μία από τις διαδικασίες επίλυσης κατά την προκαταρκτική δοκιμή (pro-test), δεν βρέθηκαν οφέλη για εννοιολογικές ή διαδικαστικές γνώσεις (αν και η σύγκριση βελτίωσε τη διαδικαστική ευελιξία τους (Rittle-Johnson, Star, & Durkin, 2009). Επιπλέον, όταν οι μαθητές συγκρίνουν λανθασμένες διαδικασίες επίλυσης με τις αρμόζουσες, βελτιώνουν τις εννοιολογικές και διαδικαστικές γνώσεις τους και αμβλύνουν τις παρανοήσεις (Durkin & Rittle-Johnson, 2009). Η σύγκριση διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές-τριες να αποκτήσουν εννοιολογικές και διαδικαστικές

γνώσεις, αλλά τα πλεονεκτήματά που προσδίδει είναι πιο σημαντικά αν οι μαθητές έχουν επαρκείς προγενέστερες γνώσεις.

Μια δεύτερη προσέγγιση είναι η ενθάρρυνση της εξήγησης κατά τη μελέτη των διαδικασιών επίλυσης. Για παράδειγμα, παρακινώντας μαθητές-τριες πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης να εξηγήσουν γιατί οι λύσεις σε προβλήματα μαθηματικής ισοδυναμίας ήταν σωστές ή λανθασμένες είχαμε ως αποτέλεσμα αύξηση της διαδικαστικής γνώσης. Ομοίως, η παρότρυνση σε μαθητές του γυμνασίου να εξηγούν τα βήματα τους όταν μελετούσαν παραδείγματα προβλημάτων πιθανότητας οδηγούσε σε υψηλότερη εννοιολογική γνώση της πιθανότητας (Berthold & Renkl, 2009).

Μια τρίτη διδακτική προσέγγιση είναι να προσφέρονται ευκαιρίες για εξερεύνηση των προβλημάτων πριν από τη διδασκαλία. Για παράδειγμα, παιδιά πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης έλυσαν προβλήματα και μετά διδάχτηκαν την έννοια της ισοδυναμίας (DeCaro & Rittle-Johnson, 2011). Τα παιδιά που έλυσαν τα προβλήματα πριν από τη διδασκαλία, είχαν μεγαλύτερα κέρδη σε εννοιολογικές γνώσεις και διαδικαστικές γνώσεις, σε σύγκριση με τα παιδιά που έλυσαν τα προβλήματα μετά τα διδασκαλία. Ομοίως, οι μαθητές-τριες της μέσης εκπαίδευσης που διερεύνησαν προβλήματα και επινοούσαν τη δική τους φόρμουλα-τύπο για τον υπολογισμό της πυκνότητας πριν από την διδασκαλία της πυκνότητας, απέκτησαν βαθύτερη εννοιολογική και διαδικαστική γνώση της πυκνότητας από τους μαθητές που έλαβαν πρώτα σχετική διδασκαλία (Schwartz et al., 2011). Η αρχική εξερεύνηση προβλημάτων προσφέρει στους μαθητές-τριες ένα πλαίσιο δραστηριοτήτων ώστε να κατανοήσουν κάτι που δεν είναι άμεσα εμφανές.

Παραδείγματα ανάπτυξης εννοιολογικής ή διαδικαστικής γνώσης μέσω της επίλυσης προβλημάτων.

Οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν την εννοιολογική κατανόηση ή τη διαδικαστική επάρκεια τους μέσω της επίλυσης προβλημάτων. Ακολουθούν τρία παραδείγματα που επικεντρώνονται σε έννοιες και τρία παραδείγματα που επικεντρώνονται στις διαδικασίες (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015):

Έννοιες

Η μάθηση των Μαθηματικών προϋποθέτει την ανάπτυξη πλούσιων συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών ιδεών. Όσες περισσότερες συνδέσεις πραγματοποιούνται, τόσο πλουσιότερο γίνεται το εννοιολογικό δίκτυο. Λαμβάνοντας υπόψη τις πρότερες γνώσεις των μαθητών-τριών και χρησιμοποιώντας σχετικές δραστηριότητες, οι μαθητές-τριες μπορούν να επεκτείνουν το δίκτυο των συνδέσεων και να εδραιώνουν νέες μαθηματικές έννοιες και νέους τρόπους σκέψης:

Έννοια: Διαχωρισμός

Νηπιαγωγείο – Α΄ τάξη

Σκεφτείτε έξι πιάτα που τοποθετούνται σε δύο διαφορετικά τραπέζια. Σχεδιάστε μια εικόνα για να δείξετε πως τα έξι πιάτα μπορούν να τοποθετηθούν στα δύο τραπέζια. Μπορείτε να βρείτε περισσότερους από έναν τρόπους; Πόσοι τρόποι πιστεύετε ότι υπάρχουν;

Στο νηπιαγωγείο ή στην Α΄ τάξη, οι μαθητές θα υποδείξουν πιθανώς έναν ή δύο τρόπους για να χωρίσουν τα 6 πιάτα (μόνοι τους). Καθώς οι μαθητές-τριες λένε για τις διάφορες δυνατότητες του διαχωρισμού, ο δάσκαλος-α μπορεί να τους ρωτήσει εάν έχουν βρει όλους τους πιθανούς συνδυασμούς. Καθώς στο ένα τραπέζι μπορούν να υπάρξουν από 0 έως και 6 πιάτα, στο άλλο τραπέζι αντίστοιχα θα έχουμε από 6 ως 0 πιάτα (επτά τρόποι διαχωρισμού). Μέσω αυτής της δραστηριότητας, οι μαθητές-τριες μπορούν να βελτιώσουν την κατανόησή τους για την έννοια της κατανομής-διαχωρισμού. Μπορεί να χρησιμοποιηθούν παρόμοιες δραστηριότητες όπως "Με πόσους τρόπους μπορείτε να βάλετε 10 ζώα σε 2 δωμάτια; Οι μαθητές-τριες με τέτοιες δραστηριότητες μπορούν να αρχίσουν να γενικεύουν το μοτίβο που έχουν παρατηρήσει και να προσδιορίσουν πόσους συνδυασμούς θα βρουν όταν οποιοσδήποτε αριθμός χωρίζεται σε δύο μέρη.

Έννοια: Κλάσματα μεγαλύτερα από το 1

Τάξεις Γ' ως Ε'

Τοποθετήστε ένα X στη αριθμογραμμή σχετικά με το που βρίσκεται το $11/8$. Εξηγήστε γιατί βάζετε εκεί το X .



Η εργασία μπορεί να επιλυθεί με διάφορους τρόπους - για παράδειγμα, με έναν χάρακα ή με το δίπλωμα μιας λωρίδας χαρτιού. Οι μαθητές πρέπει να δικαιολογήσουν πού έβαλαν το σήμα τους. Στη συζήτηση που ακολουθεί ο δάσκαλος μπορεί να βοηθήσει την τάξη να βελτιώσει τις ιδέες για κλάσματα μεγαλύτερα του 1 (για παράδειγμα, ότι τα $11/8$ ισοδυναμούν με ένα και άλλα $3/8$) και τη σημασία της χρήσης κριτηρίων αναφοράς, στην περίπτωση αυτή το 1, για να υπολογιστεί το σχετικό μέγεθος κλασματικών αριθμών.

Έννοια: Σύγκριση λόγων

Τάξεις ΣΤ' ως Β' γυμνασίου

Ο Κώστας και η Μαρία βρισκόταν στο ίδιο σημείο στην αρχή ενός λόφου και αρχίζουν να ανεβαίνουν προς την κορυφή του όπου βρίσκονται οι φίλοι τους. Ο Κώστας προχωράει 5 μέτρα κάθε 25 δευτερόλεπτα και η Μαρία 3 μέτρα κάθε 10 δευτερόλεπτα. Υποθέτοντας πως περπατάνε με σταθερό ρυθμό πεζοπορίας, ποιος θα φτάσει πρώτος στους φίλους τους στην κορυφή του λόφου;

Οι μαθητές μπορούν να επιλύσουν αυτό το πρόβλημα με διάφορους τρόπους. Μπορούν να αναπαραστήσουν το πρόβλημα οπτικά με άλματα σε μια αριθμογραμμή ή συμβολικά χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση του ρυθμού βαδίσματος (καθορίζοντας τον αριθμό των μέτρων ανά δευτερόλεπτο για κάθε άτομο). Η δραστηριότητα επικεντρώνεται στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μπορούν να συγκρίνουν λόγους. Με την εξειδίκευση και την εξέταση αρκετών παραδειγμάτων, είτε στο πλαίσιο αυτό είτε όχι, οι μαθητές θα αρχίσουν να γενικεύουν μια διαδικασία σύγκρισης λόγων, η οποία είναι η ουσία της αναλογικής συλλογιστικής.

Διαδικασίες

Ορισμένοι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τη διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων για να διδάξουν έννοιες, αλλά όχι για να διδάξουν διαδικασίες. Αυτό δημιουργεί μια αποσύνδεση από την οργάνωση διαδικασιών για τους μαθητές. Γιατί να μην επινοούν δικές τους στρατηγικές για τις διαδικασίες όταν ζητάμε να σχεδιάζουν στρατηγικές για τις σχετικές έννοιες; Οι μαθητές μπορούν να εφεύρουν δικές τους στρατηγικές για τη διεξαγωγή των διαδικασιών και αυτό θα πρέπει να αποτιμάται και να ενθαρρύνεται από τους εκπαιδευτικούς. Μερικά παραδείγματα δραστηριοτήτων που μπορούν να οδηγήσουν σε επινόηση (εύρεση) διαδικασιών από τους μαθητές-τριες είναι:

Διαδικασία: Πρόσθεση διψήφιων φυσικών αριθμών

Τάξεις Α' και Β'

Ποιο είναι το άθροισμα των 48 και 25; Πώς το κατάλαβες;

Παρόλο που δεν υπάρχει κάποιο σενάριο ή κατάσταση για επίλυση, αυτή η δραστηριότητα έχει το χαρακτήρα προβλήματος επειδή οι μαθητές-τριες πρέπει να κρίνουν πώς θα την προσεγγίσουν (δεν έχουν διδαχθεί τον τυπικό αλγόριθμο ως τώρα). Οι μαθητές-τριες μπορούν να εργαστούν στο πρόβλημα χρησιμοποιώντας αντικείμενα χειροπρακτικά, εικόνες ή νοητικές στρατηγικές. Αφού επιλύσουν το πρόβλημα με τον δικό τους τρόπο, ο δάσκαλος ζητάει να ακούσουν τις στρατηγικές και τις λύσεις ο καθένας του άλλου. Μερικές από τις προσεγγίσεις μαθητών σε μια Β' τάξη είναι:

4[8] + 2[5] Τα κουτάκια βοηθούν τους μαθητές

$$40 + 20 = 60$$

$$8 + 2 = 10 \quad [3] \quad \text{Το 3 "το κρατάμε" από το 5}$$

$$60 + 10 = 70$$

$$70 + 3 = 73$$

$$40 + 20 = 60$$

$$60 + 8 = 68$$

$$68 + 5 = 73$$

$$48 - 3 = 45 \quad [3]$$

$$45 + 25 = 70$$

$$70 + 3 = 73$$

$$48 + 20 = 68$$

$$68 + 2 \text{ ("από το 5")} = 70$$

"Έχουμε ακόμα το 3 από το 5"

$$70 + 3 = 73$$

$$25 + 25 = 50 \quad [23]$$

$$50 + 23 = 73$$

Δάσκαλος: Από πού προέρχονται τα 23;

"Είναι ένα μέρος από το 48".

Πώς χωρίσατε το 48;

"Σε 20 και 20 ενώ το 8 το χωρίσαμε σε 5 και 3".

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούν να επινοηθούν και να συζητηθούν διαδικασίες για άλλες πράξεις με φυσικούς, δεκαδικούς και κλασματικούς αριθμούς.

Διαδικασία: Διαίρεση κλασμάτων

Τάξεις Ε΄ ως και Α΄ γυμνασίου

Η κ. Μαρία πλέκει κασκόλ για δώρα για τις εγγονές της. Κάθε κασκόλ είναι 1 μέτρο και μπορεί να πλέκει 1/4 του κασκόλ κάθε μέρα. Πόσο καιρό θα πάρει για να κάνει 3 κασκόλ;

Οι μαθητές-τριες μπορούν να προσεγγίσουν το πρόβλημα με πολλούς τρόπους. Άλλοι επιλύουν το πρόβλημα εφαρμόζοντας μέτρηση με τα τέταρτα, άλλοι με ποσοστά του μέτρου πλέξης ανά ημέρα και άλλοι με ποσοστά της ημέρας ανά μέτρο πλέξης. Για να επεκτείνουν τις σκέψεις τους μπορούν να ερωτηθούν τι θα συνέβαινε αν η κ. Μαρία μπορούσε να πλέξει 3/4 του μέτρου σε μια μέρα. Με περισσότερες μαθησιακές εμπειρίες από ανάλογα προβλήματα με ποικίλα ποσοστά, οι μαθητές μπορούν να αρχίσουν να κατανοούν την έννοια της διαίρεσης και να γενικεύουν τον τρόπο επίλυσης τέτοιων προβλημάτων.

Διαδικασία: Εμβαδόν ορθογωνίου

Τάξεις: Γ΄ και Δ΄

Βρείτε το εμβαδόν του εξώφυλλου του βιβλίου μαθηματικών σας καλύπτοντας το με πλακάκια χρώματος. Επαναλάβετε για το εμβαδόν βιβλίων διαφόρων μεγεθών. Ποιο πρότυπο παρατηρείτε στην κάλυψη του βιβλίου; Είναι αυτό το πρότυπο ή ο κανόνας επαρκής για την κάλυψη οποιουδήποτε ορθογωνίου;

Οι περισσότεροι μαθηματικοί τύποι μπορούν να εξαχθούν μέσω της επίλυσης προβλημάτων. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να εξετάσουν τα κυκλικά καπάκια δοχείων για να διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο η διάμετρος σχετίζεται με την περιφέρεια ενός κύκλου ή να κόψουν παραλληλόγραμμα για να δημιουργήσουν ορθογώνια παραλληλόγραμμα ώστε να αντιληφθούν πώς σχετίζονται οι παρατηρήσεις στις οποίες καταλήγουν. Η διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών μέσω της επίλυσης προβλημάτων βοηθά τους μαθητές-τριες να αποφύγουν την απόκτηση μεμονωμένων ιδεών και συντελεί στην ανάπτυξη ενός διασυνδεδεμένου και όλο και πιο σύνθετου δικτύου μαθηματικής κατανόησης.

Παραδείγματα ανάπτυξης εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης για κλάσματα.

Η κατανόηση των κλασμάτων πολλές φορές προσκόπτει σε πολλών ειδών δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών. Δυσκολίες που είναι σχετικές με την εννοιολογική φύση των

ρητών αριθμών, και που οφείλονται στην πυκνή δομή τους σε αντίθεση με τη διακριτή δομή των φυσικών αριθμών, δυσκολίες που είναι σχετικές με την παρανόηση ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικά κλάσματα (π.χ. $1/4$ και $2/4$) δεν υπάρχει άλλος κλασματικός αριθμός, δυσκολίες όταν το σύνολο των αντικειμένων είναι πιο μεγάλο από τον παρονομαστή του κλάσματος, δυσκολίες των μαθητών-τριών να δουν το κλάσμα ως διαίρεση ανάμεσα σε δύο αριθμούς, κ.ά.

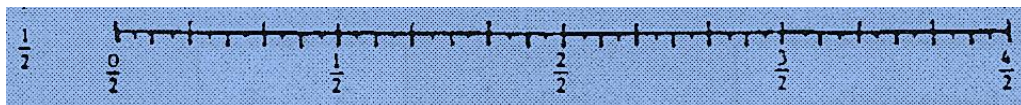
Οι μαθητές διαθέτουν μια αντίληψη του κλάσματος η οποία προέρχεται σχεδόν αποκλειστικά από διαδικασίες αναζήτησης του μέρους ενός όλου, δηλαδή μια στενή αντίληψη του κλάσματος ως “μέρος όλου”. Αυτή η γνώση δεν συνδέεται φυσικά με τη συμβολική αναπαράσταση των κλασμάτων (π.χ. $2/3$) ούτε με την τυπική γλωσσική διατύπωση (π.χ. δύο τρίτα). Αυτό σημαίνει ότι ενδέχεται ο μαθητής-τρια να μπορεί να απαντήσει σε ερωτήματα διατυπωμένα στη φυσική γλώσσα που αναφέρονται σε πραγματικές καταστάσεις αλλά να μην μπορεί να διατάξει κλάσματά κατά σειρά μεγέθους (π.χ. «μοιράσαμε δύο ίδιες πίτσες σε τέσσερα κομμάτια τη μια και σε πέντε την άλλη. Εγώ πήρα ένα κομμάτι από την πρώτη και εσύ ένα κομμάτι από τη δεύτερη. Ποιος πήρε περισσότερο;»).

Ιδιαίτερη έμφαση κατά τη διδασκαλία πρέπει να δοθεί σε διαδικασίες εκτίμησης του αποτελέσματος. Για παράδειγμα, έχει παρατηρηθεί ότι ένας μεγάλος αριθμός παιδιών απαντά λανθασμένα ότι $1/2 + 1/3 = 2/5$. Αν όμως είχαν προηγηθεί δραστηριότητες εκτιμήσεις του αποτελέσματος ο μαθητής-τρια θα μπορούσε να σκεφθεί πώς προσθέτοντας στο μισό κάτι περισσότερο δεν μπορούμε να βρούμε αποτέλεσμα μικρότερο από το μισό. Πρέπει επίσης να προσεχθεί πως η ανάπτυξη της αντίληψης των μεγεθών των κλασμάτων πρέπει να εδραιωθεί πριν προχωρήσουμε στις πράξεις με τα κλάσματα.

Όπως ειπώθηκε παραπάνω η προσπάθεια κατανόησης του κλάσματος γίνεται συνήθως μέσω του μοντέλου του εμβαδού. Δηλαδή ως “μέρος κάποιου όλου”.

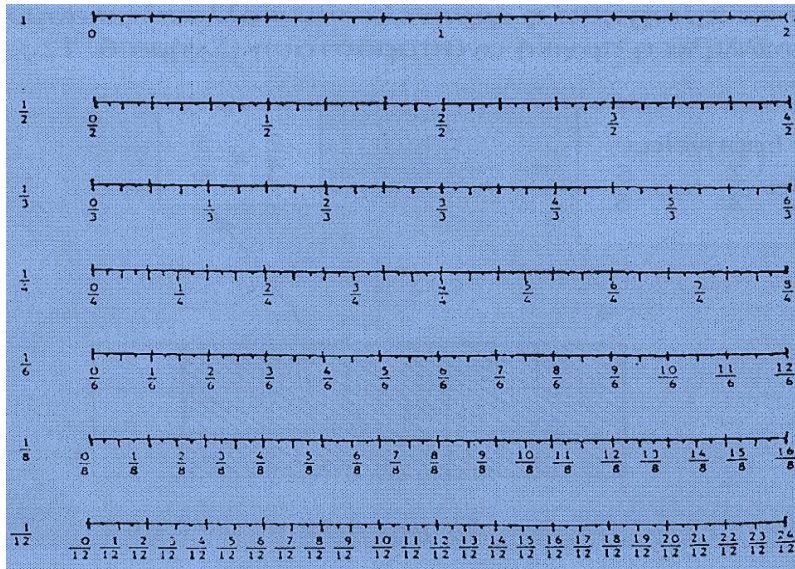

 $1/4$

Αυτό επαρκεί μόνο για την αναπαράσταση απλών κλασμάτων. Οι πράξεις των κλασμάτων απαιτούν μια διαφορετική αντίληψη: τα κλάσματα είναι αριθμοί και πρέπει να διδάσκονται και ως αριθμοί. Σ' αυτό μπορεί να μας βοηθήσει η αριθμογραμμή²:

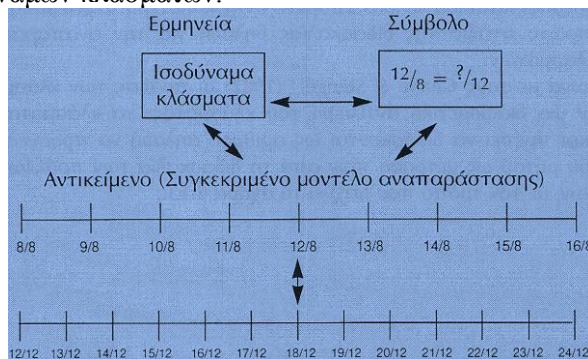


Οι μαθητές-τριες είναι καλό να συμπληρώνουν την αντίληψή τους γύρω από τα κλάσματα μέσα από το “γέμισμα” της αριθμογραμμής:

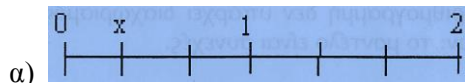
² Σχέδια αριθμογραμμών όπως παρουσιάζονται στο Κολέζα (2000).



Παράλληλες αριθμογραμμές μπορούν να λειτουργήσουν ως μορφή αναπαράστασης της έννοιας των ισοδύναμων κλασμάτων.



Παραδείγματα δραστηριοτήτων στην αριθμογραμμή:

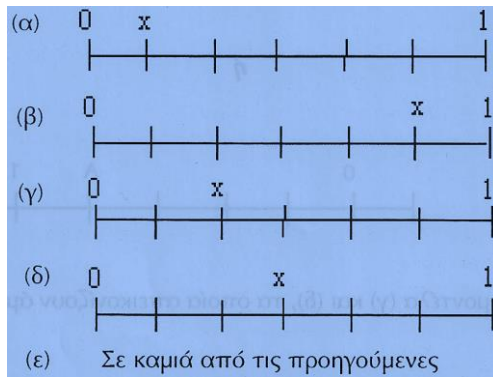


α)

Το X αντιστοιχεί στον αριθμό:

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$
 Γ) $\frac{1}{5}$ Δ) $\frac{1}{7}$
 E) Σε κανένα από τους προηγούμενους

β): Σε ποια αριθμογραμμή το X αντιπροσωπεύει το $\frac{1}{3}$;



γ) Σημείωσε το $\frac{3}{2}$ στην παρακάτω αριθμογραμμή:



δ) Μια εναλλακτική προσέγγιση του μοντέλου της αριθμογραμμής είναι το κουτί των κλασμάτων. Μπορεί εύκολα να κατασκευασθεί και αποτελεί μια αυτόνομη δημιουργική δραστηριότητα για τους μαθητές-τριες.

1											
1/2						1/2					
1/3				1/3				1/3			
1/4			1/4			1/4			1/4		
1/5		1/5		1/5		1/5		1/5		1/5	
1/6		1/6		1/6		1/6		1/6		1/6	
1/7		1/7		1/7		1/7		1/7		1/7	
1/8		1/8		1/8		1/8		1/8		1/8	
1/9		1/9		1/9		1/9		1/9		1/9	
1/10		1/10		1/10		1/10		1/10		1/10	
1/11		1/11		1/11		1/11		1/11		1/11	
1/12		1/12		1/12		1/12		1/12		1/12	

Με βάση αυτό το μοντέλο είναι εύκολο να απαντηθούν ερωτήσεις της μορφής:

Ποιο είναι μεγαλύτερο το $\frac{1}{2}$ ή το $\frac{1}{3}$;

Ποιο είναι μεγαλύτερο το $\frac{5}{7}$ ή το $\frac{7}{10}$;

Το μοντέλο αυτό μπορεί να βοηθήσει στην πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων ή να προκαλέσει γνωστικές συγκρούσεις στην περίπτωση που θα εμφανισθεί το τυπικό λάθος $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$.

$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		

Είναι εξίσου αποτελεσματικό και για τον πολλαπλασιασμό. Εύκολα μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι $1/2 \times 1/5 = 1/10$.

1/2					1/2				
1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10

Αλλά και σε δυσκολότερες περιπτώσεις όπως π.χ. στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού $7/2 \times 3/5$ με τη μετατροπή $7 \times (1/2 \times 3/5)$ προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Οι παρακάτω ενδεικτικές 5 πρώτες δραστηριότητες βοηθούν στην ανάπτυξη εννοιολογικής γνώσης για τα κλάσματα ενώ οι επόμενες 5 στην ανάπτυξη διαδικαστικής (Παπαθεοδώρου, 2016).

Ερώτηση	Θεματολογία	Παράδειγμα άσκησης
1 ^η	Αναπαράσταση	Δείξε με όποιον τρόπο θες (λόγια, σχήμα κ.α.) το $1/3$
2 ^η	Αναγνώριση	Αν κάποιος έφαγε το $1/4$ μιας πίτσας, πόσα κομμάτια έφαγε και πόσα κομμάτια είχε όλη η πίτσα;
3 ^η	Σημείο αναφοράς	Ο Γιάννης έφαγε το $1/3$ μιας τούρτας. Ο Θανάσης έφαγε το $1/3$ μιας άλλης τούρτας διαφορετικού μεγέθους. Ο Γιάννης είπε ότι έφαγε περισσότερη τούρτα, αλλά ο Θανάσης είπε ότι έφαγαν και οι δύο το ίδιο. Χρησιμοποίησε λέξεις και σχέδια για να δείξεις ποιος έχει δίκιο.
4 ^η	Διαμοιρασμός	Η μητέρα σου σου έδωσε 4 κομμάτια κέικ ίδιου μεγέθους για να τα μοιράσεις εξίσου σε 3 άτομα. Πόσα κομμάτια κέικ θα πάρει ο καθένας;
5 ^η	Σύγκριση (κοινοί αριθμητές ή παρονομαστές)	Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα από κάθε ζευγάρι κλασμάτων: $6/10$ ή $6/12$
6 ^η	Πρόβλημα με αναγωγή στην κλασματική μονάδα	Από τα 360 παιδιά μιας κατασκήνωσης τα $6/10$ είναι κορίτσια. Ποιος είναι ο αριθμός των κοριτσιών;
7 ^η	Σύγκριση (μη κοινοί αριθμητές και παρονομαστές)	Κύκλωσε το μεγαλύτερο κλάσμα από κάθε ζευγάρι κλασμάτων: $2/3$ ή $1/6$
8 ^η	Διάταξη	Διάταξε τα κλάσματα $3/2$, $1/5$, $3/10$ και $1/2$ από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.
9 ^η	Ισοδυναμία και Απλοποίηση	Συμπλήρωσε τα κενά ώστε να προκύψουν: Α) Ισοδύναμα κλάσματα $4/5 =$ Β) Απλοποιημένα/Ανάγωγα κλάσματα $8/12 =$
10 ^η	Τέσσερις πράξεις (ομώνυμα και ετερόνυμα)	Κάνε τις παρακάτω πράξεις: $5/8 + 3/8 =$ $7/16 - 3/8 =$ $4/6 \cdot 1/6 =$ $2/5 : 4/9 =$

Διαίρεση κλασμάτων, εννοιολογική και διαδικαστική γνώση

Η αυτοματοποίηση της χρήσης μιας ικανότητας απελευθερώνει διανοητική ενέργεια για επικέντρωση στις αυστηρότερες απαιτήσεις ενός περίπλοκου προβλήματος. Αυτό συμβαίνει π.χ. με την ανάγκη να γνωρίζουμε τον πίνακα πολλαπλασιασμού (για μονοψήφιους αριθμούς) προτού προσπαθήσουμε να αντιμετωπίσουμε τον τυπικό αλγόριθμο πολλαπλασιασμού.

• Η διαίρεση κλασμάτων με την τεχνική “αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και πολλαπλασιάζουμε” ανήκει στις διαδικαστικές γνώσεις χωρίς να έχει τις περισσότερες φορές εννοιολογικό αντίκρισμα. Η αντιστροφή του διαιρέτη και ο πολλαπλασιασμός είναι η μια διαδικασία που σχεδόν ποτέ δεν κατανοείται. Η Liping Ma (1999) έδειξε ότι οι Κινέζοι όχι μόνο χρησιμοποιούν και διδάσκουν αυτόν τον αλγόριθμο, αλλά ξέρουν και πώς λειτουργεί.

Για την επίλυση προβλημάτων όπως το $1/4 \div 1/2$, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να κατανοούν πως το ερώτημα που βρίσκεται από πίσω είναι: “Πόσα μισά υπάρχουν σε ένα τέταρτο”; Αυτό το είδος ευχέρειας επιτρέπει στους μαθητές να χρησιμοποιούν τις δικές τους ικανότητες λογικής και οπτικής σκέψης για να προχωρήσουν στη λύση ($1/2$) σε σχέση με το πρόβλημα. Η οπτικοποίηση του προβλήματος βοηθάει πάντοτε σημαντικά στην κατανόηση του αποτελέσματος.



$1/4$: ένα τέταρτο

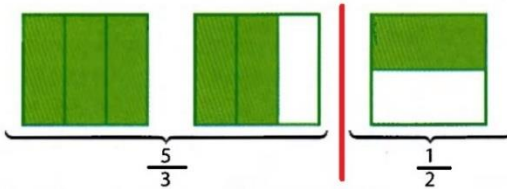
Πόσα μισά υπάρχουν στο $1/4$; Υπάρχει μισό από το $1/2$ στο $1/4$.



$1/2$: μισό

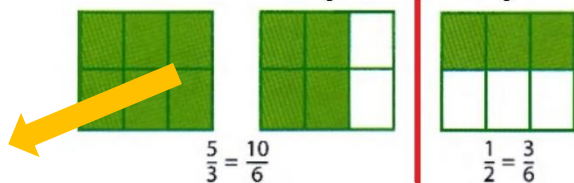
• Στη διαίρεση $5/3 \div 1/2$ έχουμε μια διαίρεση “μέτρησης”. Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του κοινού παρονομαστή που βασίζεται στην έννοια της μέτρησης ή της επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης για τη διαίρεση. Το όνομα του κλασματικού μέρους (παρονομαστής) δεν έχει πλέον σημασία και το πρόβλημα αφορά στη διαίρεση των αριθμητών. Ο εξαγόμενος κανόνας ή αλγόριθμος είναι κατ’ επέκταση ο ακόλουθος: για να διαιρέσουμε κλάσματα, τα κάνουμε ομώνυμα και έπειτα διαιρούμε τους αριθμητές. Ταυτόχρονα μπορούμε να δείξουμε³ πως το $5/3 \div 1/2$ μπορεί επίσης να γίνει $5/3 \times 2/1$, δηλαδή $10/3$:

$5/3 \div 1/2$ Σημαίνει «Πόσες ομάδες του $1/2$ υπάρχουν στα $5/3$;».

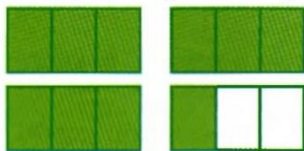


Επαναδιατυπώστε το πρόβλημα με κοινούς παρονομαστές:

«Πόσες ομάδες των $3/6$ υπάρχουν στα $10/6$;».



Κάντε ομάδες των $3/6$ από τα $10/6$



³ Σχέδια όπως παρουσιάζονται στο Van de Walle, (2007).

$$3 \frac{1}{3} \text{ ομάδες του } \frac{3}{6} \text{ ή } \frac{10}{3} \text{ ομάδες του } \frac{1}{2} \text{ στα } \frac{5}{3}.$$

$$\frac{5}{3} : \frac{1}{2} = \frac{10}{3} : \frac{3}{3} = 10 : 3 \text{ ή } \frac{10}{3}$$

• Στη διαίρεση $3/4 \div 5/6$ η διαδικασία “αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και πολλαπλασιάζουμε” μπορεί να εξηγηθεί με τον παρακάτω τρόπο:

$$\frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \square$$

Γράψτε την εξίσωση με ίδια μορφή, ως γινόμενο με ένα παράγοντα που λείπει.

$$\frac{3}{4} = \square \times \frac{5}{6}$$

Πολλαπλασιάστε και τις δύο πλευρές με το

$$\frac{6}{5}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \square \times \left(\frac{5}{6} \times \frac{6}{5} \right)$$

(Το $\frac{6}{5}$ είναι το αντίστροφο του $\frac{5}{6}$).

$$\frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \square \times 1 \Rightarrow \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \square$$

Αλλά επίσης $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \square$

Επομένως,

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \square$$

Γενικά,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

άρα:

Επιμύθιο

Όταν μαθαίνουμε μαθηματικά, μαθαίνουμε να εκτελούμε και μαθηματικές διαδικασίες. Γνωστές ως αλγόριθμοι, αυτές οι διαδικασίες επιτρέπουν να βρούμε απαντήσεις σε προβλήματα σύμφωνα με ορισμένους κανόνες. Μοιάζουν πολύ με συνταγές που έχουν επινοηθεί για να μας βοηθούν να φτάσουμε γρήγορα σε απαντήσεις όταν αντιμετωπίζουμε σαφώς καθορισμένα προβλήματα. Είναι πολύ σημαντικό να έχουμε τη δυνατότητα και γνώση να ακολουθήσουμε μια “συνταγή” για να καταλήξουμε γρήγορα και αποτελεσματικά σε ένα συγκεκριμένο είδος απάντησης, σε ένα συγκεκριμένο είδος προβλήματος. Αυτό όμως δεν αρκεί. Δεν αρκεί αν σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι ο Μαθηματικός Γραμματισμός⁴.

⁴ Μαθηματικός Γραμματισμός είναι η ικανότητα κάποιου να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα Μαθηματικά (Κολέζα, 2007). Είναι επίσης η ικανότητα κάποιου να αναλύει και ερμηνεύει τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα Μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων σε κοινωνικό πλαίσιο (στην πολιτική, την οικονομία, το περιβάλλον, την τεχνολογία κ.λπ.).

Για παράδειγμα, η διαίρεση δεν είναι απλώς μια διαδικασία, ένας αλγόριθμος. Δεν είναι απλώς το "διαιρέστε, πολλαπλασιάστε, αφαιρέστε, κατεβάστε". Το να κάνει ένα παιδί ατελείωτες ασκήσεις διαίρεσης δεν θα το βοηθήσει να καταλάβει τι σημαίνει διαίρεση. Ένα πρόβλημα διαίρεσης μπορεί να επιλυθεί με επανειλημμένη αφαίρεση, με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, με τη χρήση αριθμογραμμής ή ακόμα και με τη χρήση αντικειμένων και τη μοντελοποίηση της δράσης της διαίρεσης. Η διαδικασία "διαιρέστε, πολλαπλασιάστε, αφαιρέστε, κατεβάστε" είναι μόνο μία από τις πολλές πιθανές διαδικασίες. Η υποκείμενη ιδέα της διαίρεσης ως *δράσης* μερισμού ή μέτρησης είναι κάτι πολύ διαφορετικό από οποιαδήποτε από τις διαδικασίες για την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης. Αυτή η υποκείμενη ιδέα αποτελεί την έννοια της διαίρεσης.

Οι έννοιες και οι διαδικασίες στα Μαθηματικά, η εννοιολογική γνώση και η διαδικαστική γνώση δημιούργησαν μια αντιπαράθεση θέσεων αλλά και εκπαιδευτικών πολιτικών τις προηγούμενες δεκαετίες (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Η ικανότητα στην εκτέλεση διαδικασιών με ευελιξία, ακρίβεια και αποτελεσματικότητα υποστηρίχτηκε στο παρελθόν ως το επίκεντρο της μαθηματικής μάθησης. Η μαθηματική διαδικαστική ευχέρεια θεωρήθηκε ζωτικής σημασίας ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν βασικές δεξιότητες και να αναπτύξουν ευελιξία προκειμένου να συμμετάσχουν στον κόσμο γύρω τους. Αυτό "μεταφράστηκε" σε προγράμματα σπουδών που στόχευαν σε δεξιότητες (skills-based curricula). Στον αντίποδα, οι υποστηρικτές της εννοιολογικής κατανόησης υποβάθμιζαν την σημαντικότητα της διαδικαστικής ευχέρειας θέτοντας ως θεμελιώδες την κατανόηση των εννοιών, λειτουργιών, σχέσεων και δομών που διέπουν τα Μαθηματικά. Πρόκειται για μια διεγκυστίνδα χωρίς ερευνητική τεκμηρίωση αφού από πούθενά δεν επιβεβαιώνεται η υπόθεση ότι αυτά τα δύο είδη γνώσης είναι κατά κάποιον τρόπο αντίπαλα μεταξύ τους και ότι το ένα "ανταγωνίζεται" το άλλο. Το αντίστροφο μάλλον συμβαίνει. Δηλαδή η απουσία του ενός είδους (αυτό συνήθως συμβαίνει με την εννοιολογική γνώση), αποτελεί τροχοπέδη στην εδραίωση του άλλου.

Ο Star (2002) υποστηρίζει ότι αντί να συζητάμε για την προτεραιότητα μεταξύ των δύο προσεγγίσεων, πρέπει να εξετάσουμε τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους. Οι εννοιολογικές και διαδικαστικές γνώσεις διατελούν σε ένα μαθησιακό συνεχές και δεν μπορούν να διαχωριστούν. Στόχος της έρευνας και των διδακτικών αναζητήσεων θα πρέπει να είναι η εστίαση στον τρόπο με τον οποίο οι σχέσεις, οι συνδέσεις και οι διασταυρώσεις μεταξύ τους επηρεάζουν και εμβαθύνουν την εκμάθηση των Μαθηματικών.

Πολλές φορές η διδασκαλία των μαθηματικών διολισθαίνει σε έναν άκαμπτο φορμαλισμό στηριζόμενη μόνο στο *πως* και παραβλέποντας το *γιατί*. Αποκτά έτσι μηχανιστικά χαρακτηριστικά. Το *κάνω μαθηματικά* δεν μπορεί να είναι αποσυνδεδεμένο από το νόημα τους. Όπως αναφέρει ο Van de Walle (2007): «Είναι γενικά αποδεκτό ότι οι διαδικαστικοί κανόνες δεν πρέπει ποτέ να διδάσκονται χωρίς να γίνεται αναφορά σε κάποιες έννοιες, παρόλο που αυτό συμβαίνει, δυστυχώς, πολύ συχνά. Αυτές οι διαδικασίες χωρίς εννοιολογική βάση αποτελούν κανόνες χωρίς εκλογίκευση και οδηγούν σε λάθη και σε αίσθημα αντιπάθειας προς τα μαθηματικά. Όλες οι μαθηματικές διαδικασίες μπορούν και πρέπει, να είναι συνδεδεμένες με τις εννοιολογικές ιδέες, οι οποίες επεξηγούν το λόγο και φέρνουν το αποτέλεσμα. Οι διαδικασίες επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων, οι συμβολισμοί και οι ορισμοί, ακολουθούν πάντα μία ισχυρή εννοιολογική ανάπτυξη. Στις εννοιολογικά αναπτυγμένες διαδικασίες συχνά δεν μπορεί να γίνει διάκριση μεταξύ εννοιολογικής ή διαδικαστικής γνώσης. Αυτή η ολοκληρωμένη σχέση και ενσωμάτωση των εννοιών και των διαδικασιών θα πρέπει να είναι ο πρωταρχικός στόχος».

Βιβλιογραφία

- Arslan, S. 2010. Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 29, 94–107.
- Baroody, A. J. (2003). *The development of adaptive expertise and flexibility: the integration of conceptual and procedural knowledge*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 115–131.
- Berthold, K. & Renkl, A. (2009). Instructional aids to support a conceptual understanding of multiple representations. *Journal of Educational Psychology*, 101, 70–87.
- Canobi, K. H. (2009). Concept-procedure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102, 131–149.
- Canobi, K. H. & Bethune, N. E. (2008). Number words in young children's conceptual and procedural knowledge of addition, subtraction and inversion. *Cognition*, 108, 675–686.
- DeCaro, M. & Rittle-Johnson, B. (2011). *Preparing to learn from math instruction by solving problems first*. Paper presented at the Biennial Meeting of the Society for Research in Child Development, Montreal, QC.
- Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction*, 22 (3), 206–214.
- Haapasalo, L. & Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *JMD—Journal for Mathematic-Didaktik*, 21, 139–157.
- Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102, 395–406.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. O., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Κολέζα, Μ. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.
- Κολέζα, Ε. (2007). Σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών: Β' Μέρος: Γνωσιακή και Κοινωνιολογική ανάλυση. *Ευκλείδης Γ'*, 66, 3–24.
- LeFevre, J.-A., Smith-Chant, B. L., Fast, L., et al. (2006). What counts as knowing? The development of conceptual and procedural knowledge of counting from kindergarten through grade 2. *Journal of Experimental Child Psychology*, 93, 285–303.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell B. (2001). (Editors) *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press, Washington, DC.
- Matthews, P. G. & Rittle-Johnson, B. (2009). In pursuit of knowledge: comparing self-explanations, concepts, and procedures as pedagogical tools. *Journal of Experimental Child Psychology*, 104, 1–21.
- Παπαθεοδώρου, Ε. (2016). *Αξιολόγηση της κατανόησης των κλασμάτων μαθητών Ε' και Στ' δημοτικού με τυπική ανάπτυξη και μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες: Είδη γνώσης και Τρόποι αναπαράστασης*. Μεταπτυχιακή Εργασία, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.
- Rittle-Johnson, B. & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91, 175–189.

- Rittle-Johnson, B., Schneider, M. & Star, J. (2015). Not a one-way street: Bi-directional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, 27, pp. 587-597
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: an iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93, 346–362.
- Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101, 836–852.
- Schneider, M., Grabner, R., & Paetsch, J. (2009). Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: their interrelations in Grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, 101, 359–372.
- Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). Relations between conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology*, 47(6), 1525–1538.
- Schwartz, D. L., Chase, C. C., Chin, D. B., & Oppezzo, M. (2011). Practicing versus inventing with contrasting cases: the effects of telling first on learning and transfer. *Journal of Educational Psychology*, 103, 759–775.
- Star, J. R. (2002). Re-conceptualizing procedural knowledge: The emergence of “intelligent” performances among equation solvers. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant, & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 999-1007). Columbus,
- Van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά. Μια Αναπτυξιακή Διαδικασία* (Β. Αράπογλου, μετάφρ.). Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.
- Van de Walle, J., Karp, K., & Bay-Williams, J., (2015). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, 9th Edition, Pearson

Η επικράτεια των αλγορίθμων στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο

Κατερίνα Καλφοπούλου
M.Ed., Μαθηματικός Δ.Ε.
1^ο Γυμνάσιο Νεάπολης
kalfokat@gmail.com

Περίληψη

Η «επικράτεια των αλγορίθμων» στα Μαθηματικά του Γυμνασίου θεωρώ ότι ως κάποιον βαθμό μοιάζει με αυτό που ο φιλόσοφος-γλωσσολόγος Ρολάν Μπαρτ περιγράφει στο βιβλίο του «η επικράτεια των σημείων», όπου εξετάζει διεξοδικά τη λειτουργία του ιαπωνικού σημείου, για το οποίο μεταξύ άλλων γράφει: είναι δυνατό, θαυμάσια κανονισμένο, τακτοποιημένο. Και συνεχίζει παρακάτω: είναι κενό, το σημανόμενό του χάνεται.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο, κυρίως μέσω αλγοριθμικών διαδικασιών και κατά συνέπεια των διαδικαστικών προσεγγίσεων που αυτές συνεπάγονται, φέρνει τους μικρούς μαθητές αντιμέτωπους με τα αλγεβρικά σύμβολα, με τα «σημεία», τα οποία πρέπει οι ίδιοι να νοηματοδοτήσουν, επιλέγοντας για ένα σημαίνον εκείνο το σημανόμενο που ταιριάζει στην κάθε περίπτωση. Αρκεί όμως η διδασκαλία των αλγεβρικών διαδικασιών, για να κατανοήσουν επαρκώς οι μικροί μαθητές τις μαθηματικές έννοιες, τη λειτουργία τους και τις σχέσεις μεταξύ αυτών των εννοιών; Με άλλα λόγια, αρκεί η διαδικαστική γνώση, που κατά βάσιν επιδιώκουμε διδάσκοντας Μαθηματικά στο Γυμνάσιο, να καλύψει τις ανάγκες της εννοιολογικής γνώσης που απαιτείται για την ανταπόκριση των μαθητών στις απαιτήσεις των Μαθηματικών του Λυκείου; Στην εργασία αυτή θα εξετάσουμε θεωρητικά τις διαφορές των δύο ειδών γνώσης και μια πιθανή συσχετίσή τους με δύο διαφορετικά μοντέλα μάθησης και θα αναφέρουμε μερικά λάθη των μαθητών, τα οποία πιθανότατα οφείλονται στην επικράτηση της διαδικαστικής μάθησης σε βάρος της εννοιολογικής.

Εισαγωγή

Η διδακτική μου εμπειρία στο Γυμνάσιο είναι μικρή σε σχέση με την αντίστοιχη στο Λύκειο.

Τα ερευνητικά μου ενδιαφέροντα τα προηγούμενα χρόνια στρέφονταν γύρω από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της Α΄ Λυκείου στην εκμάθηση της Άλγεβρας και στην κατανόηση των αλγεβρικών συμβόλων. Τα τελευταία χρόνια, διδάσκοντας σε Γυμνάσιο, έχω αρχίσει εμπράκτως να αντιλαμβάνομαι μια σειρά από αίτια που προκαλούν στους μαθητές αντικειμενικές δυσκολίες στη διαχείριση και τη νοηματοδότηση των αλγεβρικών συμβόλων, τα οποία αποδίδω κυρίως στην κατά βάση διαδικαστική γνώση που αποκτούν οι μικροί μαθητές. Έχω ξεκινήσει μια καταγραφή κάποιων φαινομένων, η οποία ευελπιστώ σε βάθος χρόνου να αναδείξει εγγενή προβλήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης και να συμβάλει, έστω και λίγο, στην κατανόηση ποικίλων φαινομένων, τα οποία διδάσκοντας στις γυμνασιακές μας τάξεις συχνά για πολλούς και διαφορετικούς λόγους προσπερνάμε ασχολίαστα, ενώ θα έπρεπε να τα αντιμετωπίζουμε αποτελεσματικά, επειδή στο Γυμνάσιο με την εισαγωγή στη στοιχειώδη Άλγεβρα, αρχίζει ουσιαστικά η εκμάθηση των Μαθηματικών ως μια νέα συμβολική γλώσσα.

Κατά κοινή παραδοχή τα Μαθηματικά είναι μια γλώσσα επικοινωνίας και ταυτοχρόνως ένα εργαλείο που, αν χρησιμοποιηθεί σωστά, μπορεί να οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις. Ως γλώσσα, καίτοι τυπική, έχει όλα εκείνα τα στοιχεία που έχει και μια φυσική γλώσσα: ένα σύνολο σημείων και ένα σύνολο κανόνων οργάνωσης και διαχείρισης των σημείων αυτών. Τα σχολικά Μαθηματικά όμως, όπως έχουν διαμορφωθεί μετά την επικράτηση των φορμαλιστικών αρχών

που επέβαλαν τα Νέα Μαθηματικά, έχουν εξελιχτεί σε μια συμβολική γλώσσα, όπου το νόημα και η σημασία αποδίδονται κυρίως μέσα από τις διαδικασίες, χωρίς να σχετίζονται με κάποια φυσική ερμηνεία, πράγμα που δυσκολεύει ακόμη περισσότερο τους μαθητές και ειδικά στο Γυμνάσιο.

Προβληματισμός και Θεωρητική διερεύνηση του θέματος

Οι ανυπέρβλητες και συνεχιζόμενες δυσκολίες, που αντιμετωπίζουμε κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών και την εκμάθησή τους από τους μαθητές και τις μαθήτριες, μας εξωθούν σε συνεχείς αναζητήσεις και επεκτάσεις ή αναθεωρήσεις των κυρίαρχων εκπαιδευτικών πρακτικών, οι οποίες έχουν διαμορφωθεί εντός συγκεκριμένων θεωριών μάθησης, όπως είναι για παράδειγμα το μιχεβιοριστικό μοντέλο. Το μοντέλο αυτό φαίνεται ακόμη και σήμερα να είναι το επικρατέστερο στη σχολική τάξη, παρόλο που η επιτυχία του έχει προ πολλού αμφισβητηθεί. Η βασική αρχή της επανάληψης, της ενίσχυσης και της συσχέτισης του ερεθίσματος με τις αντιδράσεις, που βρίσκονται στον πυρήνα του μιχεβιοριστικού μοντέλου μάθησης, όταν εφαρμόζονται αποτελεσματικά, μπορεί να υποστηρίξουν και να αναδεικνύουν τη διαδικαστική κατανόηση, αλλά απέχουν πολύ από το να πετύχουν τη νοηματοδότηση των μαθηματικών αντικειμένων, δηλαδή εκείνων των νοητικών κατασκευών, που μας επιτρέπουν να δομήσουμε την εμπειρία μας. Οι διαδικασίες που επαναλαμβάνονται οδηγούν στη μηχανιστική αντίδραση των μικρών μαθητών, οι οποίοι δεν έχουν τη δυνατότητα μεταφοράς και εφαρμογής της γνώσης αυτής σε ένα διαφορετικό θεωρητικό πλαίσιο, όπου η ίδια έννοια επανεμφανίζεται. Κατά συνέπεια, η γνώση που αποκτήθηκε σε ένα πεδίο δεν χρησιμοποιείται σωστά σε ένα άλλο, όπως συχνά διαπιστώνουμε. Πρόσφατα, για παράδειγμα, δίδαξα το Πυθαγόρειο Θεώρημα στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου. Στην πλειοψηφία τους κατανόησαν και εφάρμοσαν σωστά το θεώρημα, όταν τους δόθηκαν οι δύο από τις τρεις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και ζητήθηκε να υπολογίσουν την τρίτη πλευρά. Όταν όμως, λίγες μόνο μέρες μετά, οι ίδιοι μαθητές εξετάστηκαν γραπτά στο μάθημα της Φυσικής, όπου τους ζητήθηκε να υπολογίσουν τη συνισταμένη δύναμη δύο κάθετων μεταξύ τους δυνάμεων με μέτρα 6 και 8 N, αντίστοιχα, οι περισσότεροι απάντησαν: $F_{ολ}=6+8=14$ N! Τέτοιες εσφαλμένες απαντήσεις αποδίδονται από τους ερευνητές, συνήθως, στην απουσία ερμηνευτικών δεξιοτήτων και, κυρίως, εννοιολογικής κατανόησης, η οποία βρίσκεται στον πυρήνα πιο σύγχρονων θεωριών μάθησης, όπως ο δομισμός του Bruner και ο κονστροκτουβισμός, (που διακρίνεται στον γνωστικό κονστροκτουβισμό του Piaget, τον κοινωνικό του Vygotsky και το ριζοσπαστικό κονστροκτουβισμό του Ernst von Glasersfeld, αλλά η περαιτέρω ενασχόληση με τα είδη του κονστροκτουβισμού ξεπερνά τις ανάγκες της εργασίας αυτής.). Σύμφωνα με την Κολέζα *μεταξύ των ερευνητών της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, η επικρατούσα αντίληψη σήμερα αντιμετωπίζει τα Μαθηματικά ως μια κοινωνική δραστηριότητα, ένα σύστημα κοινωνικών πρακτικών, που λαμβάνει χώρα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο και έχει κοινωνικές συνέπειες.*

Από την άλλη πλευρά έρευνες που έχουν διεξαχθεί στην Ελλάδα για τις διδακτικές πρακτικές που εφαρμόζονται στη σχολική τάξη αποκαλύπτουν ότι η συντριπτική πλειοψηφία εφαρμόζει το παραδοσιακό σχήμα “Θεωρία-Ασκήσεις”, σε μια κατά μέτωπον διδασκαλία. (Θωμάϊδης, Καλφοπούλου, 2011)

Επί πλέον, σύμφωνα με το διαγωνισμό PISA 2003, οι δεκαπεντάχρονοι μαθητές πολύ συχνά χρησιμοποιούν εκτεταμένες μεθόδους απομνημόνευσης, μαθαίνοντας από έξω παραδείγματα βήμα προς βήμα, για να μπορέσουν να εφαρμόσουν τις διαδικασίες. Σύμφωνα με την αναφορά οι χώρες στις οποίες το φαινόμενο αυτό παρατηρείται σε μεγαλύτερο βαθμό είναι: **η Ελλάδα**, η Ουγγαρία, η Πολωνία και το Ηνωμένο Βασίλειο. (Eurydice, σελ. 59)

Όπως φαίνεται από τα προηγούμενα υπάρχει απόκλιση μεταξύ των πρακτικών που εφαρμόζονται στη σχολική τάξη, αλλά και αυτών που επιλέγουν οι ίδιοι οι μαθητές για να αυξήσουν τις επιδόσεις τους, σε σχέση με την επικρατούσα θεωρητική αντίληψη των ερευνητών.

Το φαινόμενο προφανώς δεν αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα αποκλειστικά της δικής μας εποχής. Το άρθρο του R.R. Skemp με τίτλο «Relational understanding and Instrumental

Understanding», το οποίο στα Ελληνικά αποδόθηκε ως «Εννοιολογική κατανόηση και Εργαλειακή κατανόηση», δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά στο Mathematics Teaching τον Δεκέμβριο του 1976 και αφενός αποτελεί τον πρόδρομο του θέματος που συζητάμε, αφετέρου αποδίδει το πραγματικό νόημα στην «εννοιολογική κατανόηση», η οποία βασίζεται στην κατανόηση των σχέσεων. Περισσότερα σχετικά με αυτό θα δούμε στη συνέχεια.

Διαδικαστική και εννοιολογική κατανόηση

Πώς ο εκπαιδευτικός θα κάνει τη διάκριση μεταξύ των δύο ειδών κατανόησης, πώς θα επιλέξει κατάλληλες δραστηριότητες και πώς θα κρίνει την καταλληλότητά τους, προκειμένου να μην έχουν ως μοναδικό αποτέλεσμα την χωρίς κατανόηση εκμάθηση των αλγορίθμων; Βασική προϋπόθεση είναι να γνωρίζει, ο ίδιος ο εκπαιδευτικός τι καθιστά την κατανόηση εννοιολογική. Ο συνεχώς αυξανόμενος όγκος των θεωριών διδασκαλίας και μάθησης δεν αποτελεί πανάκεια για τον δάσκαλο, ακόμη και για εκείνον τον δάσκαλο που ενημερώνεται συνεχώς για τις εξελίξεις της εκπαιδευτικής έρευνας. Ωστόσο, θα συμφωνούσαμε όλοι πως για την αποτελεσματικότερη κατά το δυνατόν διδασκαλία των Μαθηματικών είναι απαραίτητη από την πλευρά του διδάσκοντος η αποσαφήνιση του δυισμού της μαθηματικής γνώσης: το *γνωρίζω πώς* (knowing how) και το *γνωρίζω γιατί* (knowing why), ή όπως διαφορετικά αποδίδεται στη βιβλιογραφία *διαδικαστική γνώση* (procedural knowledge) και *εννοιολογική γνώση* (conceptual knowledge), αντίστοιχα. Αν τη διάκριση αυτή γνωρίζουν και οι ίδιοι οι μαθητές, πιθανόν να μην αρκούνται στην ορθή εκτέλεση των αλγορίθμων, αλλά να επιδιώκουν να κατανοήσουν τους λόγους για τους οποίους εφαρμόζονται οι αλγόριθμοι, καθώς επίσης τη φύση και τη διασύνδεση των εννοιών που εμπλέκονται στους εν λόγω αλγόριθμους.

Επειδή πιστεύουμε ότι προϋπόθεση για να διορθώσουμε τα κακώς κείμενα είναι να τα εντοπίσουμε και να τα κατανοήσουμε, πρώτα θα ορίσουμε τις δύο προαναφερθείσες συνιστώσες της μαθηματικής γνώσης και μετά θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα απαντήσεων, όπου γίνεται καταφανές πως είτε απουσιάζει ολοσχερώς είτε είναι ανεπαρκής η εννοιολογική κατανόηση.

Στη βιβλιογραφία ο ορισμός της διαδικαστικής γνώσης δεν παρουσιάζει μεγάλες διαφορές και αποκλίσεις. Σε γενικές γραμμές ορίζεται ως η γνώση η οποία εστιάζει στις δεξιότητες που απαιτούνται για τις βήμα προς βήμα διαδικασίες, χωρίς ρητή αναφορά στις μαθηματικές ιδέες (Ashlock, 2001). Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό ο μαθητής γνωρίζει τι πρέπει να κάνει, χωρίς όμως να κατανοεί ούτε για ποιο λόγο κάνει ό,τι κάνει ούτε τη βαθύτερη διασύνδεση των εννοιών και των συμβόλων που διαχειρίζεται. Ένα παράδειγμα τέτοιας γνώσης είναι αυτή που αποκτούν οι μαθητές για τη διαίρεση δύο κλασμάτων, όταν μαθαίνουν ότι για να την εκτελέσουν αρκεί να *αντιστρέψουν τους όρους του δεύτερου κλάσματος και αντί για διαίρεση να κάνουν πολλαπλασιασμό*. Ένα εξ ίσου χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο κανόνας πολλαπλασιασμού ακέραιων αριθμών: $(+) (-) = (-)$ και $(-) (-) = (+)$.

Αντιθέτως η εννοιολογική κατανόηση προϋποθέτει τη συναισθηση όχι μόνο του πώς αλλά και του γιατί. Ο μαθητής αντιλαμβάνεται σαφώς για ποιο λόγο ακολουθεί τα συγκεκριμένα βήματα, όπως αντιλαμβάνεται ποια είναι η σχέση μεταξύ των εννοιών και των συμβόλων αυτών. Η εννοιολογική κατανόηση χαρακτηρίζεται από διασυνδέσεις των εννοιών και δίνει τη δυνατότητα γενικεύσεων (Hiebert & Lefevre, 1986).

Φαίνεται πως η διάκριση μεταξύ των δύο ειδών κατανόησης είναι σαφής, όπως επίσης φαίνεται ότι η δεύτερη, η εννοιολογική δηλαδή, εμπεριέχει - και σε καμία περίπτωση δεν αποκλείει - την πρώτη.

Οι λόγοι που η διαδικαστική κατανόηση, ή κατά τον Skemp τα «εργαλειακά μαθηματικά», είναι επικρατέστερη από την εννοιολογική, αναπτύσσονται στο άρθρο που προαναφέρθηκε, όπου ο R.R. Skemp υποστηρίζει - υποδυόμενος, όπως ρητά δηλώνει, τον *συνήγορο του διαόλου* - τα ακόλουθα:

1. Μέσα στο πλαίσιο τους τα «εργαλειακά μαθηματικά» είναι συνήθως ευκολότερο να κατανοηθούν.

2. Οι ανταμοιβές είναι πιο άμεσες και πιο καθαρές.
3. Εμπλέκεται λιγότερη γνώση και γι' αυτό μπορεί να πάρει κανείς τη σωστή απάντηση πιο γρήγορα και σίγουρα με την εργαλειακή σκέψη από ότι με την εννοιολογική.

Ενδεχομένως κάποιος θα μπορούσε να επικαλεστεί και άλλους λόγους, για τους οποίους επικρατεί η διαδικαστική έναντι της εννοιολογικής μάθησης και να επιμηκύνει κατά πολύ την παραπάνω λίστα, θεωρώ όμως πως η έμφαση δεν θα πρέπει να δοθεί στο “γιατί” επικρατεί, αλλά ποιες είναι οι σημαντικότερες συνέπειές της και πώς θα εξαληφθούν ή έστω θα περιοριστούν. Για το πρώτο, για ό,τι δηλαδή σχετίζεται με τις συνέπειες τις διαδικαστικής μάθησης φαίνεται πως μπορούν να δοθούν, ως ένα βαθμό, ικανοποιητικές για όλους απαντήσεις. Η δυσκολία όπως πάντα, σε ό,τι αφορά τη διδασκαλία των Μαθηματικών γίνεται σχεδόν ανυπέρβλητη, όταν φτάνουμε στο δια ταύτα, που εν προκειμένω είναι το πώς θα επιτευχθεί η εννοιολογική κατανόηση κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο, ώστε να μπορούν οι μαθητές, όταν φτάνουν στο Λύκειο να ανταποκρίνονται στην υψηλή αφαίρεση, που απαιτεί η Άλγεβρα στην τάξη αυτή. Το βέβαιο είναι πως ένα τέτοιο πρόβλημα δεν μπορεί να επιλυθεί διαισθητικά από τον διδάσκοντα, παρά μόνο αναστοχαστικά και για να επιτευχθεί αυτό, κρίνουμε απαραίτητη την καταγραφή επαναλαμβανόμενων λαθών μέσω των οποίων μπορούμε να διακρίνουμε την απουσία της εννοιολογικής γνώσης. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ορισμένα παραδείγματα.

Μερικά χαρακτηριστικά «λάθη» που οφείλονται στην έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης.

Ένα «λάθος» που αποκαλύπτει πως οι μαθητές μπορεί να γίνουν ικανοί να ακολουθήσουν βήμα προς βήμα τις οδηγίες ενός αλγορίθμου εντελώς μηχανικά, χωρίς απαραίτητα να κατανοούν τι κάνουν, φαίνεται στην επίλυση των εξισώσεων 1^{ου} βαθμού που διδάσκονται στη Β' τάξη του Γυμνασίου, όπου συχνά συναντώ λύσεις όπως η ακόλουθη:

$$\dots 2x-x=5 \Rightarrow 1x=5 \Rightarrow \frac{1x}{1} = \frac{5}{1} \Rightarrow x=5$$

Οι μαθητές, θέλοντας να ακολουθήσουν κατά γράμμα τις οδηγίες επιμένουν στο τέλος να διαιρούν με τον συντελεστή του αγνώστου, ακόμη και στην περίπτωση που ο συντελεστής είναι μονάδα, δηλαδή όταν στην πραγματικότητα δεν υπάρχει συντελεστής! Όποτε σχολιάζω ή ρωτώ για ποιο λόγο διαιρούν με το 1 (το οποίο επιμένουν να γράφουν ως συντελεστή του αγνώστου) απαντούν: «Επειδή στο τέλος διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου». Η απάντησή τους αποδεικνύει ότι γνωρίζουν τι κάνουν χωρίς καθόλου να κατανοούν για ποιο λόγο το κάνουν!

Ένα άλλο λάθος που ενδεχομένως αποκαλύπτει έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης και, επί πλέον, είναι πραγματικό λάθος σε αντίθεση με το προηγούμενο, είναι ο τρόπος που συχνά πολλαπλασιάζουν οι μαθητές της Α' Γυμνασίου ένα κλάσμα με έναν ακέραιο αριθμό.

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \gamma = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}$$

Είναι δύσκολο να απαφανθούμε με βεβαιότητα αν το παραπάνω λάθος οφείλεται σε άγνοια ή γενικά σε έλλειψη κατανόησης της έννοιας του αριθμού και ειδικότερα του ρητού αριθμού. Από την άλλη όμως, όταν στο εισαγωγικό μάθημα ρωτώ τους μαθητές τι είναι ένα κλάσμα, οι περισσότεροι απαντούν πως το κλάσμα είναι μια **διαίρεση!** Δηλαδή για τα μικρά παιδιά το κλάσμα είναι μια διαδικασία και όχι ένα μαθηματικό αντικείμενο.

Ένα ενδιαφέρον σύνολο “λαθών” στη Γ' Γυμνασίου, που ανάλογο του συχνά εμφανίζεται στο Λύκειο, τουλάχιστον στην Α', παρατηρείται κατά τη διδασκαλία της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Για την ακρίβεια στο συγκεκριμένο θέμα εκτός από τα λάθη, οι παρατηρήσεις και τα σχόλια των μαθητών κάνουν καταφανή την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης και ποιο συγκεκριμένα τις σχέσεις που συνδέουν ή τον ρόλο που παίζουν τα αλγεβρικά σύμβολα.

Αναφέρω τρία ενδεικτικά παραδείγματα, από περιστατικά στην τάξη:

1) Έδωσα σε ένα τμήμα προς λύση την εξίσωση: $a^2-3a+2=0$. Ένας καλός μαθητής, με ότι μπορεί να σημαίνει “καλός μαθητής”, είτε πως η εξίσωση αυτή δεν είναι δεύτερου βαθμού, επειδή δεν

δίνεται ότι “ $a \neq 0$ ”. Για τον συγκεκριμένο μαθητή, και σίγουρα όχι μόνο γι’ αυτόν, η δευτεροβάθμια εξίσωση δεν μπορεί παρά να είναι της μορφής: “ $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$ ”. Το ίδιο ακριβώς σχόλιο έκανε και μια μαθήτρια, επίσης καλή, στο δεύτερο τμήμα που έδωσα την ίδια εξίσωση, την επόμενη μέρα.

2) Στην άσκηση: Να λυθεί η εξίσωση $a^2-3a+2=0$, πολλές απαντήσεις ξεκινούν ως εξής:

Λύση: $a=1$, $b=-3$, $c=2$ κλπ.

Το γράμμα a στην παραπάνω λύση οι μαθητές το εκλαμβάνουν ως τον συντελεστή του αγνώστου, “εθισμένοι” στην επικρατούσα μορφή $ax^2+bx+c=0$.

3) Προσφάτως ζήτησα από τμήματα της Β΄ Γυμνασίου, όπου δύο περίπου μήνες πριν είχαν διδαχθεί κανονικά οι εξισώσεις, να σημειώσουν “ναι” ή “όχι” δίπλα στα ακόλουθα, $x=3$, $x+1=4$ και $x+2(x+1)$, ανάλογα αν πιστεύουν ότι πρόκειται ή όχι για εξίσωση.

Στη συντριπτική τους πλειοψηφία χαρακτηρίσαν τη πρώτη ως εξίσωση, ενώ υπάρχουν κάποιοι ελάχιστοι που έγραψαν: “ $x=3$, είναι η λύση μιας εξίσωσης”.

Τέλος, θα αναφέρω ένα μόνο παράδειγμα από τη Γεωμετρία, όπου φαίνεται πως γενικά η κατανόηση των εννοιών είναι μακράν πέραν των δυνατοτήτων των μικρών μαθητών, ειδικά στην Α΄ Γυμνασίου. Οι γεωμετρικές έννοιες που καλούνται οι μαθητές να μάθουν στην τάξη αυτήν, όπως είδη και σχέσεις γωνιών, κύκλος κ.λπ. φαίνεται πως προκαλούν μεγάλη σύγχυση, ακόμη και στην περίπτωση που «αναπαράγονται» ως ορισμοί σωστά. Σε πρόσφατο τεστ που έβαλα στις γωνίες, ενώ τα περισσότερα παιδιά έδωσαν σωστά τον ορισμό των παραπληρωματικών γωνιών, στην άσκηση που ζητούσε να υπολογίσουν μια γωνία που είναι διπλάσια από την παραπληρωματική της, πολλοί απάντησαν πως η ζητούμενη γωνία ισούται με $2 \times 180^\circ = 360^\circ$.

Τα παραδείγματα των λαθών που αποδεικνύουν την ανεπαρκή εννοιολογική κατανόηση είναι ανεξάντλητα και οι καθένας από εμάς που διδάσκει σε σχολική τάξη, έχει σίγουρα να προσθέσει τις δικές του περιπτώσεις.

Το βέβαιο είναι πως ειδικά στη Γεωμετρία του Γυμνασίου, όπου οι έννοιες υπερισχύουν των διαδικασιών, και ειδικότερα στις δύο πρώτες τάξεις, τα προβλήματα είναι περισσότερα από όσα μπορούν να αντιμετωπιστούν στο τυπικό πλαίσιο μαθήματος.

Σκέψεις-Προβληματισμοί

Τα παραδείγματα που αναφέρθηκαν αποτελούν μόνο ένα πολύ μικρό δείγμα της απουσίας επαρκούς εννοιολογικής κατανόησης των παιδιών στο Γυμνάσιο. Η απουσία εννοιολογικής κατανόησης όμως βρίσκεται στον πυρήνα των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν όσο φοιτούν στο Γυμνάσιο και ακόμη περισσότερο, αργότερα, στο Λύκειο. Υπάρχει τρόπος να επιτευχθεί εξ αρχής η απαιτούμενη εννοιολογική γνώση, για να έχει ο μαθητής τη δυνατότητα να δομήσει τις γνωστικές του εμπειρίες ολοκληρωμένα και συνεκτικά; Και αν ναι, πώς θα καταφέρουμε να ξεπεράσουμε τη σχετικά εύκολη διαδικαστική μάθηση, που επικρατεί; Τα ερωτήματα παραμένουν ανοιχτά και, θεωρώ πως για να απαντηθούν, αν ποτέ απαντηθούν, θα πρέπει να γίνει αντιληπτή η μεγάλη διαφορά μεταξύ της διαδικαστικής και εννοιολογικής κατανόησης και πως η δεύτερη απαιτεί πολύ μεγαλύτερη προσπάθεια από την πλευρά των εκπαιδευτικών και από την πλευρά των μαθητών και των μαθητριών. Απαιτεί όμως και γενικότερη αλλαγή κουλτούρας στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών. Αν δεν προβούμε σε ριζικές μεταρρυθμίσεις, το πιθανότερο είναι τα αλγεβρικά και γενικότερα τα μαθηματικά σύμβολα και όλα τα σημαίνοντα, τα οργανωμένα και καλά δομημένα που χρησιμοποιούμε διδάσκοντας στο σχολείο, να είναι για τα περισσότερα παιδιά εντελώς κενά, και τα σημαινόμενά τους παντελώς χαμένα.

Βιβλιογραφία

- Θωμαΐδης, Ι. Καλφοπούλου, Α. (2011) Απρόβλεπτες καταστάσεις και μαθηματικές συνδέσεις. Πρακτικά 28ου Συνεδρίου Ε.Μ.Ε.: Αθήνα
- Κολέζα, Ε. (2010) Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών. Τόπος: Αθήνα
- Ashlock, R. B. (2001). Error patterns in computation: Using error patterns to improve instruction. Columbus, OH: Merrill Prentice Hall.
- Barthes, R. (2001) Η επικράτεια των σημείων. Κέδρος: Αθήνα
- Eurydice (2011) Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies: European Commission.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Skemp, R.R. (1976) Relational Understanding and Instrumental Understanding *Mathematics Teaching*, 77, 20–26

Στοχεύοντας στην κατανόηση και την εμβάθυνση εννοιών της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

Πρόδρομος Π. Ελευθερίου
Επίτιμος Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
email: makisel@sch.g

Περίληψη

Η μάθηση των μαθηματικών είναι μια διαρκής, σπειροειδής διαδικασία, η οποία υλοποιείται κατά μήκος της διδασκόμενης ύλης μέσα στην ίδια τάξη αλλά και από τάξη σε τάξη. Όπως είναι γνωστό, το μεγαλύτερο μέρος της ύλης της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου είναι σε γενικές γραμμές επανάληψη εκείνης του Γυμνασίου. Έτσι, η Α΄ Λυκείου προσφέρεται, κυρίως, για εμβάθυνση και εννοιολογική κατανόηση παράλληλα με την εκμάθηση κανόνων, αλγορίθμων και μαθηματικών τύπων, οι οποίοι εφαρμόζονται σε μια δεδομένη σειρά προβλημάτων. Πράγματα που στο Γυμνάσιο θεωρούνταν δεδομένα μπορούν τώρα να τίθενται υπό αμφισβήτηση και να γίνονται αντικείμενο συζήτησης και αναστοχασμού. Στην παρούσα εισήγηση προτείνονται κάποια θέματα θεωρίας και ασκήσεων που αναφέρονται στους ρητούς, τους άρρητους, τη διάταξη, την απόλυτη τιμή, τις ρίζες, τις συναρτήσεις καθώς και στην αλληλοσύνδεσή τους. Θέματα που είτε, αν δεν κατανοηθούν επαρκώς, οδηγούν σε παρανοήσεις είτε είναι ιδιαίτερης αξίας για την κατανόηση της ανάλυσης.

Abstract

Learning mathematics is a continuous, spiral process, implemented along the syllabus within a certain school grade, as well as from one school grade to another. As is known, most part of the Algebra syllabus for the 1st grade of Lyceum is, in general, a repetition of that of Gymnasium. Thus, the 1st grade of Lyceum mainly serves for penetration and conceptual understanding, alongside with learning rules, algorithms and mathematic formulas that apply to a certain series of math problems. What was considered as known in Gymnasium can now be questioned and become subject of conversation and reconsideration. This proposal suggests some theory and practice issues that refer to rational and irrational numbers, order, absolute value, square roots, functions, as well as their interconnection. These issues either lead to misconceptions – if not sufficiently understood, or they are highly important for the analysis understanding.

Εισαγωγή

Κύριος και τελικός αποδέκτης της παρούσας εισήγησης είναι ο μαθητής της Α΄ Λυκείου και για το λόγο αυτό περιορίζεται στη σχολική διδακτέα ύλη της συγκεκριμένης τάξης. Οι ασκήσεις που προτείνονται είναι στο επίπεδο εκείνων του σχολικού βιβλίου, εκτός από τις ασκήσεις 3 και 4, οι οποίες έχουν συμπεριληφθεί, επειδή πιθανολογούμε ότι μαθητές με αυξημένα ενδιαφέροντα για τα μαθηματικά θα τις βρουν ενδιαφέρουσες.

Επειδή το μεγαλύτερο μέρος της ύλης της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου είναι σε γενικές γραμμές επανάληψη εκείνης του Γυμνασίου, η Α΄ Λυκείου προσφέρεται, κυρίως, για εμβάθυνση και εννοιολογική κατανόηση παράλληλα με την εκμάθηση κανόνων, αλγορίθμων και μαθηματικών τύπων. Επομένως, η Α΄ Λυκείου προσφέρεται για διδασκαλία κατάλληλα στοχευμένη, ώστε, μεταξύ των άλλων, οι μαθητές:

- Να μπορούν **να κάνουν ορθούς συλλογισμούς**. Το λάθος σε κάποιες πράξεις, η αδυναμία επίλυσης μιας εξίσωσης, η αδυναμία απόδειξης ενός ισχυρισμού δεν είναι πράγματα τραγικά. Είναι, όμως, τραγικό να γίνονται λανθασμένοι συλλογισμοί, γιατί τότε υπάρχει ο κίνδυνος από αληθείς υποθέσεις να προκύψουν ψευδή συμπεράσματα ή το αντίστροφο.

«Τα Μαθηματικά μάς βοηθούν να σκεφτόμαστε πιο λογικά. Και αν σκέφτεσαι λογικότερα, αυτό μπορεί να βοηθήσει για την ανάλυση οποιουδήποτε γενικότερου προβλήματος. Όπως όταν βλέπεις μια εικαστική έκθεση σιγά – σιγά ανεβαίνει το αισθητικό σου κριτήριο, όσο περισσότερο ασχολείσαι με τα Μαθηματικά τόσο τροχίζεται η λογική σου, είναι δηλαδή σημαντικά για την κοιλτούρα μας, ανεξάρτητα από τη χρησιμότητά τους σε οποιονδήποτε τομέα». [20].

- **Να κατανοούν σε βάθος τους ορισμούς, τις προτάσεις και τους τύπους** και φυσικά να τους χρησιμοποιούν σωστά για την επίλυση ασκήσεων. Άλλωστε, πώς μπορεί κανείς να εφαρμόζει κάτι σωστά, αν πρώτα δεν το έχει καταλάβει; Πώς μπορεί να χρησιμοποιεί τύπους, αν δεν έχει κατανοήσει τι εκφράζουν και κάτω από ποιους περιορισμούς ισχύουν; Στην κατανόηση των εννοιών μπορεί να συμβάλλει και η ενασχόληση των μαθητών με ασκήσεις που οδηγούν σε παρανοήσεις, γιατί, μέσω της συζήτησης και της ανταλλαγής απόψεων, ενεργοποιείται η τάξη και ξεκαθαρίζουν λεπτά σημεία της θεωρίας.
- **Να διατυπώνουν σωστά τα αξιώματα, τους ορισμούς, τα θεωρήματα και τα πορίσματα** και να είναι προσεκτικοί στις διατυπώσεις, γιατί, αφαιρώντας ή τροποποιώντας κάποια λέξη, μπορεί να προκύψει πρόταση που δεν ισχύει.
- Να μπορούν σε κάθε θεώρημα ή πόρισμα **να γράφουν** ποια είναι η **υπόθεση** και ποιο το **συμπέρασμα** και να **διατυπώνουν το αντίστροφο**.
- **Να αποκτήσουν ευχέρεια** στη χρήση των αποδεικτικών μεθόδων απαγωγής σε άτοπο, αντιπαραδείγματος, ευθείας απόδειξης και απόδειξης με χρήση ισοδυναμιών.
Να κατανοήσουν ότι:
 - Τα αντιπαραδείγματα τα χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε ότι κάτι **δεν ισχύει πάντοτε**, δηλαδή τα χρησιμοποιούμε, για να **απορρίπτουμε** ισχυρισμούς, και είναι η μοναδική περίπτωση όπου από το μερικό μπορούμε να συμπεράνουμε το γενικό.
 - Αν κάτι ισχύει για **μερικές** περιπτώσεις, τότε δεν είναι σίγουρο ότι ισχύει για όλες τις περιπτώσεις,
- Να μπορούν **να αναπαραγάγουν τις αποδείξεις** θεωρημάτων και πορισμάτων (όχι να τις αποστηθίζουν) και να ελέγχουν αν ισχύει το αντίστροφο.
- **Να γνωρίζουν τη σωστή χρήση** των συμβόλων ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\leq$, $\geq$), των συνδέσμων «και», «ή» και των εκφράσεων «αν και μόνο αν», «ικανή και αναγκαία συνθήκη».
- Να μπορούν **να δημιουργούν εικασίες** με, χρήση ή μη, κατάλληλων λογισμικών και να ελέγχουν αν είναι ορθές ή όχι.
- **Να κατασκευάζουν ασκήσεις**. Ας σημειωθεί ότι οι εκείνοι που αποκτούν μια τέτοια δεξιότητα, εκτός από τη χαρά της δημιουργίας εμβαθύνουν και κατακτούν τη γνώση, κατά τρόπο στέρεο και δημιουργικό.

Κλείνοντας θα ήθελα να τονίσω τα εξής:

1. Διδάσκοντας μια οποιαδήποτε ενότητα θα πρέπει να έχουμε στραμμένη την προσοχή μας στο παρελθόν (προγενέστερες γνώσεις), στο παρόν (άμεσα μαθησιακά αποτελέσματα) και στο μέλλον (τι από αυτά που σχεδιάζουμε είναι σημαντικά για αργότερα). Ας γίνουμε πιο συγκεκριμένοι. Αν η διδακτική ενότητα προσφέρεται για ανάκληση προηγούμενων γνώσεων,

τότε ξεκινάμε με αυτές και στη συνέχεια με τη συμμετοχή και κινητοποίηση της τάξης περνούμε στο νέο που έχουμε να διδάξουμε. Τονίζονται ιδιαίτερα τα σημεία εκείνα που κρίνονται ότι είναι κομβικής σημασίας για τις επόμενες ενότητες της ίδιας τάξης ή των επόμενων τάξεων. Γίνονται οι αποδείξεις θεωρημάτων ή «θεωρητικών» ασκήσεων με τρόπο αναλυτικό και κατανοητό και απαραίτητα με τη συμμετοχή των μαθητών. Για εξοικονόμηση χρόνου θα μπορούσαμε από το προηγούμενο μάθημα να προτείνουμε, για εργασία στο σπίτι, κατάλληλες ερωτήσεις οι οποίες δημιουργούν εικασίες για αυτά που πρόκειται να συζητηθούν στο αμέσως επόμενο μάθημα. Για παράδειγμα, αν σχεδιάζουμε να αποδειχθεί η συνεπαγωγή $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$, θα μπορούσαμε, για εργασία στο σπίτι, να δώσουμε στους μαθητές διάφορα ζεύγη «συγκεκριμένων» αριθμών και να τους ζητήσουμε να τοποθετήσουν πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς του κάθε ζεύγους και το ημιάθροισμά τους (κάνοντας νέο σχήμα κάθε φορά) και στη συνέχεια να μαντέψουν ποια είναι η διάταξη των αριθμών α , β και $\frac{\alpha+\beta}{2}$, οπότε εκείνο που μένει για την τάξη είναι η απόδειξη της εικασίας.

2. Δίνουμε για εργασία στο σπίτι:

- Εύκολες υπολογιστικές ασκήσεις.
- Ασκήσεις με αποδεικτική διαδικασία ανάλογη εκείνης που χρησιμοποιείται στις αποδείξεις θεωρημάτων ή εφαρμογών του σχολικού βιβλίου.
- Εύκολα ρεαλιστικά προβλήματα που να αναλύονται σε επιμέρους ερωτήματα που διευκολύνουν τον μαθητή στη λύση.
- Επιπλέον υλικό εμβάθυνσης για εκείνους που το επιζητούν...

3. Προτρέπουμε τους μαθητές να περιγράφουν με λίγα λόγια τα κύρια σημεία κάθε ενότητας που μελέτησαν.

4. Επιμένουμε στις ερωτήσεις κατανόησης του σχολικού βιβλίου και μάλιστα προτείνεται να ζητούμε αιτιολόγηση.

5. Δίνουμε έμφαση σε ασκήσεις που θα χρειαστούν σε επόμενες παραγράφους ή σε επόμενη τάξη.

6. Λύνουμε ασκήσεις με πολλούς τρόπους όπου είναι εφικτό.

7. Συνεργαζόμαστε με τον Φυσικό και τον Χημικό του σχολείου και όπου είναι εφικτό και με εκπαιδευτικούς άλλων ειδικοτήτων. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα συνεργασίας Μαθηματικού Φυσικού είναι ο ορισμός της κλίσης της ευθείας στα βιβλία Άλγεβρας και Φυσικής της Α' Λυκείου.

Κλείνοντας την εισαγωγή, θεωρώ σκόπιμο να παραθέσω ένα απόσπασμα από μία συνέντευξη που έδωσε ο κ. Γ. Δάσιος. «*Δημ.: Έπειτα από 45 χρόνια στην ανώτατη εκπαίδευση τι θα λέγατε γι' αυτά τα νέα παιδιά;*». «*Γ. Δάσιος: Ότι χρόνο με τον χρόνο οι καλοί γίνονται καλύτεροι. Από την άλλη πλευρά, όμως, χρόνο με τον χρόνο ο μέσος όρος πέφτει.*» [6].

Οι πραγματικοί αριθμοί

Οι μαθητές ήδη από το γυμνάσιο ξέρουν ότι οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από ρητούς και άρρητους και μάλιστα σε κάποιο βαθμό μπορούν και τους αναγνωρίζουν. Αρκετοί, όμως, μαθητές, ενώ αναγνωρίζουν ότι ο π , οι εκφράσεις με ριζικά π.χ. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $1 + \sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$ καθώς και οι αριθμοί της μορφής $1,010010001\dots$ (άπειρο, μη περιοδικό δεκαδικό μέρος) είναι άρρητοι, εντούτοις έχουν δυσκολία να αναγνωρίσουν ότι αριθμοί όπως $\sin 30^\circ$, η_{60° είναι επίσης άρρητοι. Θα ήταν ενδεχομένως χρήσιμο να αναφέρουμε στους μαθητές ότι οι

περισσότεροι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι άρρητοι και μάλιστα στη Β' Λυκείου θα μπορούμε να αποδείξουμε γιατί κάποιοι από αυτούς είναι άρρητοι. (π.χ. $\sin 10^\circ$, $\eta\mu 10^\circ$, $\sin 20^\circ$, $\eta\mu 20^\circ$). Στην Α' Λυκείου θα δουν για πρώτη φορά πως αποδεικνύεται ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα, θα προτείνουμε, μετά τη σχετική απόδειξη, να αναφερθεί ότι με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι ισχύει κάτι γενικότερο. Συγκεκριμένα, να τους αναφέρουμε ότι ισχύει: «Αν ο φυσικός αριθμός n δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος». Έτσι, οι μαθητές θα μπορούν να αναγνωρίζουν και να δικαιολογούν αν ένας αριθμός της μορφής $\sqrt{n}$ με $n \in \mathbb{N}$ είναι ρητός ή όχι και να «κατασκευάζουν» και άλλους άρρητους.

Ολοκληρώνοντας τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών θέτουμε ως στόχο οι μαθητές:

- Να αναγνωρίζουν αν ένας αριθμός είναι φυσικός, ακέραιος, ρητός ή άρρητος. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων, ανάλογων εκείνων που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία ή στις αντίστοιχες οδηγίες.
- Να παριστάνουν τους ρητούς με σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών.
- Να αναγνωρίζουν τους άρρητους αριθμούς ως αριθμούς που δεν μπορούν να γραφούν ως κλάσμα ακεραίων καθώς επίσης και ως αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά και, τέλος, ότι οι άρρητοι είναι το συμπλήρωμα των ρητών.



Σχήμα 1

- Να διατυπώνουν τους ορισμούς των ρητών και των άρρητων.
- Να δικαιολογούν γιατί το άθροισμα και το γινόμενο αρρήτων δεν είναι πάντα άρρητος.
- Να αποδεικνύουν ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος και με τη χρήση κανόνα και διαβήτη να τον παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών.
- Να αποδεικνύουν τη συνεπαγωγή $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$ και στηριζόμενοι σ' αυτή να δικαιολογούν ότι:

α. Ανάμεσα σε δυο πραγματικούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί.

β. Αν ένας πραγματικός αριθμός x είναι «πολύ κοντά» σε έναν άλλο πραγματικό αριθμό x_0 , τότε υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί κοντύτερα στον x_0 .

- Να αποδεικνύουν ότι ανάμεσα σε δυο ρητούς όσο «κοντά» και αν είναι, υπάρχουν άπειροι ρητοί.
- Να αποδεικνύουν ότι δεν υπάρχουν διαδοχικοί ρητοί, εκτός και αν αυτοί είναι ακέραιοι. Να αποδεικνύουν, δηλαδή ότι, αν ένας ρητός δεν είναι ακέραιος, τότε δεν έχει επόμενο.
- Να αποδεικνύουν ότι:
 - α.** Το άθροισμα ρητού άρρητου είναι άρρητος.
 - β.** Το γινόμενο μη μηδενικού ρητού με άρρητο είναι άρρητος.
- Να έχουν εξοικειωθεί με τη χρήση της απαγωγής σε άτοπο και του αντιπαραδείγματος.

Τέλος, ας σημειωθεί ότι κατά τη μελέτη των ρητών και αρρήτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν όλες οι αποδεικτικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην Α' Λυκείου, δηλαδή: Απαγωγή σε άτοπο, Μέθοδος Αντιπαραδείγματος, Ευθεία Απόδειξη και Απόδειξη με Χρήση Ισοδυναμιών.

Οι πραγματικοί αριθμοί – Ασκήσεις

Προτείνουμε την παρακάτω άσκηση 1, γιατί, εκτός του ότι έχει ιστορική αξία, η απόδειξή της είναι εύκολη και συμβάλει στην περαιτέρω εξοικείωση των μαθητών με την απαγωγή σε άτοπο.

1. Άσκηση

Το 1794 ο Γάλλος μαθηματικός Αντριέν-Μαρί Λεζάντρ (1752-1833), απέδειξε ότι ο π^2 είναι άρρητος.

Ο π είναι ρητός ή άρρητος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Προτείνουμε την παρακάτω άσκηση 2 (είναι η άσκηση 7 της Β' Ομάδας της σελίδας 55 του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας Α' Λυκείου), γιατί:

- Συμβάλλει στην εξοικείωση των μαθητών με την απαγωγή σε άτοπο.
- Τους βοηθά να «κατασκευάζουν» και άλλους άρρητους αριθμούς που δεν είναι της μορφής $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ και να δικαιολογούν γιατί αριθμοί, όπως οι $1 + \sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, είναι άρρητοι.
- Διευκολύνει στην επίλυση ασκήσεων σχετικών με ρητούς και αρρήτους.

2. Άσκηση

Να αποδείξετε ότι:

i) Το άθροισμα ρητού αρρήτου είναι άρρητος.

ii) Το γινόμενο μη μηδενικού ρητού με άρρητο είναι άρρητος.

Πυκνότητα ρητών

Μια ιδιότητα που διακρίνει τους ρητούς από τους ακεραίους είναι ότι οι ρητοί αποτελούν «πυκνό» σύνολο αριθμών. Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ρητών όσο κοντά κι αν βρίσκονται, μπορούμε να «στριμώξουμε» έναν επιπλέον, ακόμα και άπειρους άλλους ρητούς, π.χ. οι αριθμοί $1/1000000$ και $1/1000001$ βρίσκονται σίγουρα πολύ κοντά, αφού η διαφορά τους είναι περίπου ένα τρισεκατομμυριοστό. Μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε κλάσματα που βρίσκονται ανάμεσά τους, π.χ. το ενδιάμεσο κλάσμα $2/2000001$. Είναι λοιπόν φυσικό να συμπεράνει κανείς ότι αν τοποθετήσουμε όλους τους ρητούς πάνω στην ευθεία, τότε ολόκληρη η ευθεία θα καλυφθεί, δηλαδή όλα της τα σημεία θα είναι θέσεις ρητών αριθμών. Στα μαθηματικά όμως αυτό που φαίνεται να αποτελεί «φυσικό συμπέρασμα» συχνά αποδεικνύεται λανθασμένο. Ένα από τα σημαντικότερα γεγονότα στην ιστορία των μαθηματικών υπήρξε η ανακάλυψη ότι οι ρητοί αριθμοί, παρά την πυκνότητά τους, αφήνουν «κενά» πάνω στην ευθεία, δηλαδή σημεία τα οποία δεν αντιστοιχούν σε ρητούς. Αυτά τα «κενά» έρχονται να τα συμπληρώσουν οι άρρητοι. ([13], σελ.7).

Πυκνότητα ρητών στο $\mathbb{R}$

Οι ρητοί είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$, δηλαδή σε όποιο διάστημα (α, β) και αν κοιτάζουμε, οσοδήποτε «μικρό», θα δούμε μέσα έναν ρητό. [9].

Αποδεικνύεται το θεώρημα:

Θεώρημα (Πυκνότητα ρητών στο $\mathbb{R}$)

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός ρ , ώστε $\alpha < \rho < \beta$.

Πυκνότητα αρρήτων στο $\mathbb{R}$

Οι άρρητοι είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$, δηλαδή σε όποιο διάστημα (α, β) και αν κοιτάξουμε, οσοδήποτε «μικρό», θα δούμε μέσα έναν άρρητο.

Θεώρημα (Πυκνότητα αρρήτων στο $\mathbb{R}$)

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος x , ώστε $\alpha < x < \beta$.

Στην άσκηση 3 που ακολουθεί αποδεικνύουμε ότι, αν ένα τουλάχιστον από τα άκρα του διαστήματος (α, β) είναι ρητός αριθμός, τότε υπάρχει ρητός μέσα στο διάστημα αυτό. Η απόδειξη ότι ανάμεσα σε δυο αρρήτους υπάρχει ρητός ξεφεύγει από το πλαίσιο της σχολικής ύλης και, επομένως, δε θα συμπεριληφθεί στην παρούσα εισήγηση.

Στην άσκηση 4 αποδεικνύουμε την πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$.

3. Άσκηση

Να αποδείξετε ότι:

- i. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha < \beta$, τότε $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.
- ii. Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί.
- iii. Αν ένας πραγματικός αριθμός x είναι «πολύ κοντά» σε έναν άλλο πραγματικό αριθμό x_0 , τότε υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί κοντύτερα στον x_0 .
- iv. Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς, όσο «κοντά» και αν είναι:
 - α) υπάρχει ρητός.
 - β) υπάρχουν άπειροι ρητοί.
- v. Αν ένας ρητός δεν είναι ακέραιος, τότε δεν έχει επόμενο.
- vi. Αν ένα τουλάχιστον από τα άκρα του διαστήματος (α, β) είναι ρητός, τότε υπάρχει ρητός μέσα στο διάστημα αυτό.
- vii. Κάθε άρρητο μπορούμε να τον προσεγγίσουμε από μια ακολουθία ρητών.

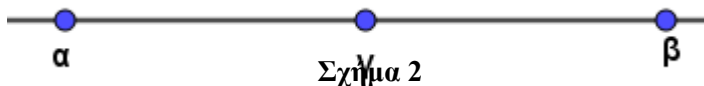
Απόδειξη

i. Αν $\alpha < \beta$, τότε:

- $\alpha + \alpha < \alpha + \beta \Rightarrow 2\alpha < \alpha + \beta \Rightarrow \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$
- $\alpha + \beta < \beta + \beta \Rightarrow \alpha + \beta < 2\beta \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$

Άρα $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.

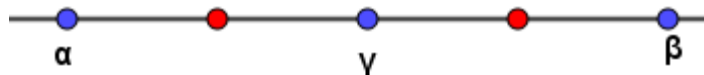
ii. Η ύπαρξη άπειρων πραγματικών αριθμών σε κάθε διάστημα (α, β) μπορεί να εξασφαλιστεί με τη λεγόμενη Μέθοδο Διχοτόμησης Διαστημάτων. Συγκεκριμένα εργαζόμαστε ως εξής: Διχοτομούμε το αρχικό διάστημα (α, β) στα διαστήματα (α, γ) και (γ, β) .



Σχήμα 2

Μέσα σε καθένα από τα δυο νέα διαστήματα θα υπάρχει, σύμφωνα με το ερώτημα (i), από ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός.

Διχοτομούμε τα δύο νέα διαστήματα, σε καθένα από τα τέσσερα νέα διαστήματα θα υπάρχει από ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός.



Σχήμα 3

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι στο διάστημα (α, β) υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί.

iii. Εργαζόμαστε με τη Μέθοδο Διχοτόμησης Διαστημάτων, όπως παραπάνω, αλλά πάντοτε διχοτομούμε διαστήματα με άκρο το x_0 .

iv. α) Έστω α, β ρητοί με $\alpha < \beta$, τότε, σύμφωνα με το ερώτημα (i), ισχύει:

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$$

Επομένως, ανάμεσα σε δυο ρητούς υπάρχει το ημίθροισμά τους το οποίο μάλιστα είναι ρητός.

β) Εργαζόμαστε με τη Μέθοδο Διχοτόμησης Διαστημάτων.

v. Άμεση συνέπεια του ερωτήματος (iv).

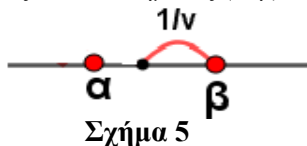
vi. Αν ο α είναι ρητός, τότε αυξάνοντας τον α κατά $\frac{1}{v}$, v θετικός ακέραιος, όπου, όμως, ο $\frac{1}{v}$ είναι μικρότερος από το μήκος του διαστήματος (α, β) . θα έχουμε:



Σχήμα 4

$\alpha < \alpha + \frac{1}{v} < \beta$. Ο αριθμός $\alpha + \frac{1}{v} = \frac{v\alpha + 1}{v}$ είναι ρητός και μάλιστα ανήκει στο διάστημα (α, β) .

• Αν ο β είναι ρητός, τότε ελαττώνοντας τον β κατά $\frac{1}{v}$, v θετικός ακέραιος, όπου, όμως, ο $\frac{1}{v}$ είναι μικρότερος από το μήκος του διαστήματος (α, β) θα έχουμε:



Σχήμα 5

$\alpha < \beta - \frac{1}{v} < \beta$. Ο αριθμός $\beta - \frac{1}{v} = \frac{v\beta - 1}{v}$ είναι ρητός και μάλιστα ανήκει στο διάστημα (α, β) .

• Αν α και β ρητοί, τότε υπάρχει ρητός ανάμεσά τους, όπως προκύπτει, είτε από όσα αναπτύχθηκαν αμέσως παραπάνω είτε από το ερώτημα (iv) της παρούσης άσκησης.

vii. Προκύπτει από το προηγούμενο ερώτημα.

4. Άσκηση

Να αποδείξετε ότι:

- i. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha < \beta$, τότε $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.
- ii. Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε άρρητους υπάρχει άρρητος.
- iii. Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε άρρητους αριθμούς, όσο «κοντά» και αν είναι, υπάρχουν άπειροι άρρητοι.
- iv. Κανένας άρρητος δεν έχει επόμενο.
- v. Ανάμεσα σε ρητό και άρρητο υπάρχει πάντοτε άρρητος.
- vi. Ανάμεσα σε ρητό και άρρητο, όσο «κοντά» και αν είναι, υπάρχουν άπειροι άρρητοι.
- vii. α) Ο αριθμός $\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος και μάλιστα βρίσκεται ανάμεσα στους 0 και 1.
β) Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς υπάρχει άρρητος.
- viii. Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς όσο «κοντά» και αν είναι υπάρχουν άπειροι άρρητοι.

Απόδειξη

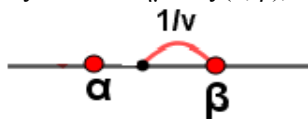
- i. Βλέπε άσκηση 3 ερώτημα (i).
- ii. 1^{ος} τρόπος. Αν ο α είναι άρρητος, τότε αυξάνοντας τον α κατά $\frac{1}{v}$, v θετικός ακέραιος, όπου, όμως, ο $\frac{1}{v}$ είναι μικρότερος από το μήκος του διαστήματος (α, β) , θα έχουμε:



$\alpha < \alpha + \frac{1}{v} < \beta$. Ο αριθμός $\alpha + \frac{1}{v}$ είναι άρρητος και μάλιστα ανήκει στο διάστημα (α, β) .

2^{ος} τρόπος.

- Αν ο β είναι άρρητος, τότε ελαττώνοντας τον β κατά $\frac{1}{v}$, v θετικός ακέραιος, όπου, όμως, ο $\frac{1}{v}$ είναι μικρότερος από το μήκος του διαστήματος (α, β) , θα έχουμε:



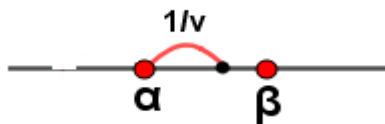
$\alpha < \beta - \frac{1}{v} < \beta$. Ο αριθμός $\beta - \frac{1}{v}$ είναι άρρητος και μάλιστα ανήκει στο διάστημα (α, β) .

- iii. Εργαζόμαστε με τη Μέθοδο Διχοτόμησης Διαστημάτων.
- iv. Είναι συνέπεια του ερωτήματος (iii).
- v. 1^{ος} τρόπος

Επειδή ο ένας από τους α, β είναι ρητός και ο άλλος άρρητος συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι άρρητος και μάλιστα, σύμφωνα με το ερώτημα (1), είναι ανάμεσα στους α και β .

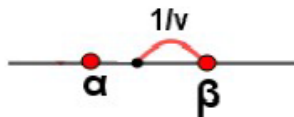
2^{ος} τρόπος

- Αν ο α είναι άρρητος, τότε αυξάνοντας τον α κατά $\frac{1}{v}$, v θετικός ακέραιος, όπου, όμως, ο $\frac{1}{v}$ είναι μικρότερος από το μήκος του διαστήματος (α, β) θα έχουμε:

**Σχήμα 8**

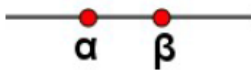
$\alpha < \alpha + \frac{1}{v} < \beta$. Ο αριθμός $\alpha + \frac{1}{v}$ είναι άρρητος και μάλιστα ανήκει στο διάστημα (α, β) .

- Αν ο β είναι άρρητος, τότε ελαττώνοντας τον β κατά $\frac{1}{v}$, v θετικός ακέραιος, όπου, όμως, ο $\frac{1}{v}$ είναι μικρότερος από το μήκος του διαστήματος (α, β) , θα έχουμε:

**Σχήμα 9**

$\alpha < \beta - \frac{1}{v} < \beta$. Ο αριθμός $\beta - \frac{1}{v}$ είναι άρρητος και μάλιστα ανήκει στο διάστημα (α, β) .

- vi. Η ύπαρξη άπειρων αρρήτων σε κάθε διάστημα (α, β) με άκρα ρητό και άρρητο μπορεί να εξασφαλιστεί με τη Μέθοδο Διχοτόμησης Διαστημάτων.
- vii. β) Έστω α, β ρητοί με $\alpha < \beta$.

**Σχήμα 10**

Για να εξασφαλίσουμε ότι ανάμεσα στους α και β υπάρχει άρρητος, αρκεί να αυξήσουμε τον α κατά ένα θετικό άρρητο μικρότερο, όμως, από το μήκος του (α, β) . Ένας τέτοιος άρρητος είναι ο $\frac{\sqrt{2}}{2}(\beta - \alpha)$, και επειδή $\alpha < \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}(\beta - \alpha) < \beta$, συμπεραίνουμε ότι ανάμεσα στους ρητούς α και β υπάρχει άρρητος.

- viii. Εργαζόμεστε με τη Μέθοδο Διχοτόμησης Διαστημάτων.

Σχόλιο

Η ύπαρξη θετικού ακεραίου v για το οποίο ισχύει $\frac{1}{v} < \beta - \alpha$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$, δεν προβληματίζει μεν τους μαθητές, όμως, για να είμαστε συνεπείς η ύπαρξή του v προκύπτει από την Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{Q}$, «Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $v \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{v} < \varepsilon$ », η οποία δε διδάσκεται στο Λύκειο.

Απόλυτη τιμή

Γενικά, η πιο άμεση προσέγγιση σε οποιοδήποτε πρόβλημα που έχει να κάνει με απόλυτες τιμές απαιτεί να διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις χωριστά, γιατί οι απόλυτες τιμές ορίζονται και αυτές με περιπτώσεις. Μάλιστα, μερικές φορές είναι η μόνη δυνατή μέθοδος. Ας σημειωθεί ότι σε

αρκετές περιπτώσεις υπάρχουν απλούστερες μέθοδοι που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε. ([19] σελ. 10,11).

- Στο σχολικό βιβλίο καμία από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών δε γίνεται με διάκριση περιπτώσεων. Υπάρχουν όμως ασκήσεις, π.χ άσκηση 5 της σελ. 66 του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, που για την επίλυση τους η μόνη δυνατή μέθοδος είναι η διάκριση περιπτώσεων. Γι' αυτό προτείνουμε η ιδιότητα $|ab|=|a|\cdot|b|$ να αποδειχθεί και με διάκριση περιπτώσεων. Στη συνέχεια να γίνει συζήτηση και σύγκριση των δυο αποδεικτικών διαδικασιών:

«της διάκρισης περιπτώσεων και της απόδειξης του σχολικού βιβλίου».

Ως εθελοντική εργασία στο σπίτι να ζητηθεί η απόδειξη της ιδιότητας:

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

να γίνει και με διάκριση περιπτώσεων.

- Στην εφαρμογή 2, της σελίδας 219 του Σχολικού Βιβλίου Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου Ομ. Προσ/σμού Θετικών Σπουδών /Οικονομίας & Πληροφορικής, ζητείται να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^5 |x-2|dx$$

Η προτεινόμενη λύση ξεκινά ως εξής:

$$\text{Επειδή } |x-2| = \begin{cases} 2-x, & \text{αν } x \leq 2 \\ x-2, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}, \text{ έχουμε.....}$$

Επομένως, δε θα ήταν κακή ιδέα κατά τη διδασκαλία της απόλυτης τιμής να ζητούσαμε να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός:

$$\text{«Για κάθε } a \in \mathbb{R} \text{ ισχύει: } |a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a \leq 0 \end{cases} \text{»}$$

και, τέλος, κατά τη διδασκαλία της συνάρτησης $f(x)=|x|$, (σχολικό βιβλίο Α΄ Λυκείου σελ. 163), να συζητηθεί γιατί στο βιβλίο γράφεται ότι:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \text{ και όχι } f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x \leq 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases};$$

Ρίζες πραγματικών αριθμών

Για να συνδέσουμε τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών:

- $\sqrt{a^2}=|a|, a \in \mathbb{R}$,
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, a, b μη αρνητικοί.

με τις ιδιότητες, των απολύτων τιμών ίσως να είναι σκόπιμο, η ιδιότητα $|ab|=|a|\cdot|b|$ να αποδειχθεί και ως εξής:

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|$$

Ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών

Αφού δοθεί η απόδειξη της ιδιότητας «Αν $a, b \geq 0$, τότε $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ », που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, προτείνουμε να δοθεί και εκείνη που υπάρχει στην 1^η στήλη του πίνακα που ακολουθεί. Η πρόταση αυτή γίνεται, γιατί όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί οι αποδείξεις στις δυο στήλες είναι ουσιαστικά της ίδιας τεχνικής, οπότε προετοιμάζουμε τους μαθητές για κάτι

που θα συναντήσουν στην επόμενη τάξη και, επιπλέον, κατανοούν ότι οι τρόποι απόδειξης δεν είναι μονοσήμαντοι.

Σχολικό βιβλίο Α΄ Λυκείου σελ. 71 Ιδιότητες των ριζών Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε: $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$ ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι είναι: $\sqrt[n]{\alpha} = x_1 \text{ και } \sqrt[n]{\beta} = x_2 \quad (1)$ Τότε έχουμε $\alpha = x_1^n, x_1 \geq 0 \text{ και } \beta = x_2^n, x_2 \geq 0$ οπότε: $\alpha \cdot \beta = x_1^n \cdot x_2^n, \text{ δηλ. } \alpha \cdot \beta = (x_1 \cdot x_2)^n, x_1 \cdot x_2 \geq 0.$ Από τον ορισμό όμως της νιοστής ρίζας, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με $\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} = x_1 \cdot x_2$ από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά: $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$	Σχολικό βιβλίο Β΄ Λυκείου σελ. 175 Ιδιότητες των λογαρίθμων Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\log_a(\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$ ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι είναι: $\log_a \theta_1 = x_1 \text{ και } \log_a \theta_2 = x_2 \quad (1)$ Τότε έχουμε $a^{x_1} = \theta_1 \text{ και } a^{x_2} = \theta_2$ οπότε: $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = \theta_1 \theta_2, \text{ δηλαδή } a^{x_1 + x_2} = \theta_1 \theta_2$ Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με $\log_a(\theta_1 \theta_2) = x_1 + x_2$ από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά: $\log_a(\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$
---	---

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας των δυνάμεων με ρητό εκθέτη, ίσως να ήταν μια καλή ιδέα να ζητηθεί από τους μαθητές να γράψουν τις παραστάσεις:

$$\sqrt[3]{x} \text{ και } \sqrt[3]{x^2}$$

υπό μορφή δυνάμεων με ρητό εκθέτη.

Μια τέτοια ενέργεια αποτελεί πρόδρομο για την ισότητα ή μη των συναρτήσεων f και g με:

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ και $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$.
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = |x|^{\frac{2}{3}}$.

Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$

Δίνεται στους μαθητές για εργασία στο σπίτι η παρακάτω άσκηση 5.

5. Άσκηση

i) Αν $a \geq 1$ και $\beta \geq 2$, τότε να βρείτε για ποιες τιμές των a, β ισχύει $ab=2$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

ii) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x)=3x^2-6x+5 \text{ και } g(x)=5x^2-10x+6$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$(3x^2-6x+5)(5x^2-10x+6) = 2$$

Ακολουθεί η λύση του ερωτήματος (iii), όπως παρουσιάστηκε στον πίνακα από κάποιον μαθητή.

Λύση (Μαθητή)

iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$3x^2 - 6x + 5 \geq 2 \quad (1) \quad \text{και} \quad 5x^2 - 10x + 6 \geq 1 \quad (2)$$

Οι (1) και (2) ισχύουν ως ισότητες μόνο για $x=1$.

Λόγω των (1) και (2)

συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

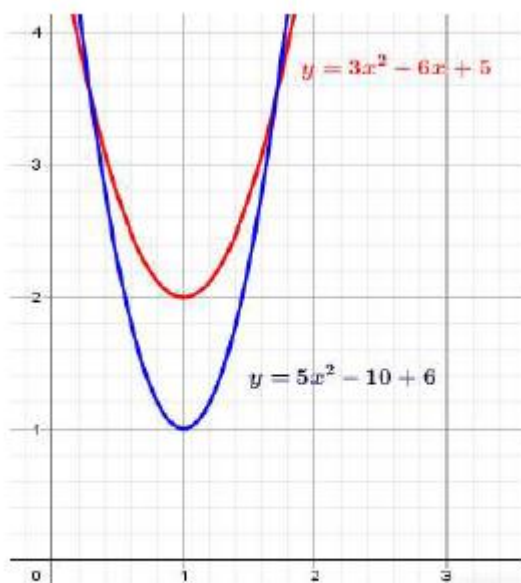
$$(3x^2 - 6x + 5)(5x^2 - 10x + 6) \geq 2 \quad (3)$$

Σύμφωνα με το ερώτημα (i), η (3) ισχύει ως ισότητα μόνο όταν

$$3x^2 - 6x + 5 = 2 \quad \text{και} \quad 5x^2 - 10x + 6 = 1$$

δηλαδή όταν $x=1$.

Επομένως, η αρχική εξίσωση έχει μια μόνο λύση την $x=1$. ■

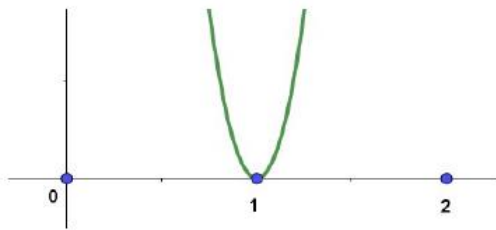


Σχήμα 11: Γραφ. παρ. f, g

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το Geogebra προβλήθηκε στο διαδραστικό πίνακα η

η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = (3x^2 - 6x + 5)(5x^2 - 10x + 6) - 2$$



Σχήμα 12: Γραφική παράσταση της g

και κλήθηκαν οι μαθητές, να απαντήσουν αν ο ισχυρισμός ότι η εξίσωση:

$$(3x^2 - 6x + 5)(5x^2 - 10x + 6) = 2$$

έχει μια μόνο λύση την $x=1$ είναι πλήρης και αν επιβεβαιώνεται από το παραπάνω σχήμα.

Δόθηκαν διάφορες απαντήσεις. Ας σταθούμε σε δύο.

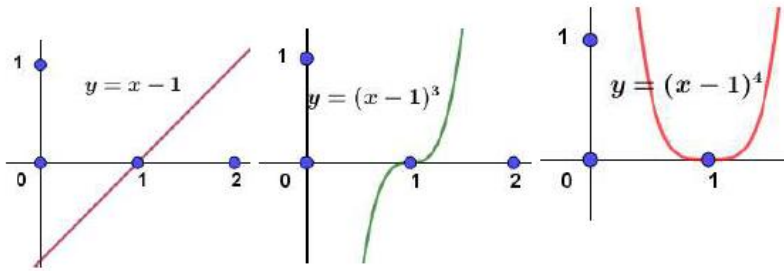
1^η απάντηση. Η εξίσωση έχει μια μόνο ρίζα, την $x=1$, αφού το σημείο $(1,0)$ είναι το μόνο κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $x'x$.

2^η απάντηση. Η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα, την $x=1$, αφού η γραφική παράσταση της g εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1,0)$.

Τελικά οι μαθητές συμφώνησαν ότι μάλλον η 2^η απάντηση είναι η ενδεδειγμένη.

Μετά προβλήθηκαν στον πίνακα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f_1(x) = x-1, \quad f_2(x) = (x-1)^3, \quad f_3(x) = (x-1)^4$$



Σχήμα 13: Γραφικές παραστάσεις των f_1, f_2, f_3

και κλήθηκαν οι μαθητές, να απαντήσουν πόσες και ποιες λύσεις έχουν οι εξισώσεις:

$$x-1=0, \quad (x-1)^3=0 \quad \text{και} \quad (x-1)^4=0$$

Έγραψαν:

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ Η εξίσωση έχει μια μόνο λύση, το 1.
- $(x-1)^3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=1$ ή $x=1$.
Αρα η εξίσωση έχει τρεις λύσεις ίσες με 1.
- Αντίστοιχα η εξίσωση $(x-1)^4=0$ έχει τέσσερις λύσεις ίσες με 1.

Μετά από όλα αυτά οι μαθητές ισχυρίστηκαν ότι από τη γραφική παράσταση δεν μπορούν να συμπεράνουν αν μια εξίσωση έχει ίσες λύσεις και στην περίπτωση που έχει πόσες είναι αυτές. Επομένως, είναι αναγκαίο η εξίσωση να επιλυθεί «αλγεβρικά».

Αλγεβρική λύση της εξίσωσης $(3x^2-6x+5)(5x^2-10x+6) = 2$

Η εξίσωση γράφεται $(3(x^2-2x)+5) \cdot (5(x^2-2x)+6) = 2$ και θέτοντας $x^2-2x = t$ έχουμε: $(3t+5) \cdot (5t+6) = 2$ ή ισοδύναμα $15t^2+43t+28=0$. Βρίσκουμε ότι: $t = -1$ ή $t = -28/15$

- Αν $t = -1$, τότε $x^2-2x = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$, $x=1$ διπλή ρίζα.
- Αν $t = -28/15$ τότε $x^2-2x = -28/15 \Leftrightarrow x^2-2x+28/15=0$ αδύνατη.

Επομένως η αρχική εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την $x=1$.

Βιβλιογραφία

1. Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α. (2017). *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α' Γενικού Λυκείου*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
2. Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α. (2017). *Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου Ομ. Προσ/μού Θετικών Σπουδών /Οικονομίας & Πληροφορικής*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
3. Αργυράκης, Α. κ.α. (2017). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
4. (2015) *ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Τάξεις: Α', Β', Γ') ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ*, ΙΕΠ.
5. Βλάμος, Π. κ.α. (2017). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
6. Δάσιος, Γ., (2017). *Δε θα καταλάβουμε ποτέ πλήρως τον ανθρώπινο εγκέφαλο*
<https://www.newsbeast.gr/greece/arthro/3136812/de-tha-katalavoume-pote-pliros-ton-anthropino-egkefalo>
7. Π.Ι. (2011) «*ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21^{ου} αιώνα)-Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη*» ΜΙΣ:295450, Αθήνα.
8. Θωμάδης, Ι., Καλφοπούλου, Α. (2011) *ΑΠΡΟΒΛΕΠΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ...Ανάλυση μιας δραστηριότητας επίλυσης προβλήματος στην Άλγεβρα της Α' Λυκείου*. Αθήνα: 28^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ε.Μ.Ε.
9. Κολουτζάκης, Μ. *Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς*.
<https://www.youtube.com/watch?v=MagQaaGpMMo>.
10. Λάππας, Δ. (2017). «Σχολικά Μαθηματικά και Μαθηματικά: η απόδειξη στην "Σχολική" Γεωμετρία» Θεσσαλονίκη: 7^η ΗΜΕΡΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ Καλαμαρί.
11. Νεγρεπόντης, Σ. κ. α. (1993). *Απειροστικός Λογισμός τόμος Ι*. Αθήνα: Συμμετρία.
12. Ντούγιας, Σ. (2007). *Απειροστικός Λογισμός Ι*. Αθήνα: Leader Books.
13. Ντριάνκος, Σ. (2011). *Άρρητοι αριθμοί και συνεχή κλάσματα: Παραστάσεις Προσεγγίσεις, Εξισώσεις και Διδακτικές Εφαρμογές*. Αθήνα: Διπλωματική Εργασία.
http://blogs.sch.gr/sntriankos/2015/03/27/diplomatiki_sokratis-2/
14. Παντελίδης, Γ. (2006). *ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΔΙΑΔΑΣΚΟΝΤΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ*, Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
15. Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής*, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα: www.kallipos.gr
16. Π. Ι. (2007). *Οδηγίες για τη διδασκεία ύλη και τη διδασκαλία των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ του ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ κατά το σχολικό έτος 2007 – 2008*, Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.
17. Συγκελάκης, Α. (2017). *Αξιοποίηση της αποδεικτικής διαδικασίας με στόχο την αναβάθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών του Λυκείου*. Θεσσαλονίκη: 7^η ΗΜΕΡΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ Καλαμαρί.
18. Skemp, R. *Εννοιολογική Κατανόηση και Εργαλειολογική Κατανόηση*. Ευκλείδης Γ', Τόμος 13, Τεύχος 46, 1996.
19. Spivak, Michael. (2013). *Διαφορικός & Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
20. Φωκάς, Α. <http://www.haniotika-nea.gr/ta-mathimatika-voithoun-ti-logiki/>

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ «ΑΝΟΙΧΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ» ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Βασίλης Καρκάνης
vkarkan@yahoo.gr

Περίληψη εισήγησης

Στην παρούσα εισήγηση αφού ορίζεται τι είναι ανοιχτό πρόβλημα, διατυπώνεται θέση υπέρ της ένταξης και της «διδασκαλίας» αυτών, στη διδακτική πρακτική της σύγχρονης σχολικής τάξης. Παρατίθεται εμπειρικός τρόπος εισαγωγής αυτών στη διδακτική διαδικασία, που να προσελκύει το ενδιαφέρον των μαθητών για την ενασχόλησή τους με αυτά. Γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στα ανοιχτά προβλήματα της Γεωμετρίας, παρουσιάζοντας ορισμένα από αυτά, μαζί με τρόπους επίλυσης που προτάθηκαν από μαθητές στη σχολική τάξη.

Εισαγωγή

Οι μαθητές του Λυκείου αντικειμενικά λόγω ηλικίας (και ιδιαίτερα σε μια περίοδο κρίσης όπως η σημερινή) βρίσκονται μπροστά στην αντιμετώπιση των ανοιχτών οικογενειακών προβλημάτων. Πόσα είναι τα έσοδα της οικογένειας; Πόσα είναι τα πάγια έξοδα; Πόσο είναι το δάνειο του σπιτιού; Τα παιδιά θα κάνουν φροντιστήριο; Θα πάμε, και πού, διακοπές; κλπ. είναι μερικά από τα προβλήματα αυτά.

Προβλήματα και η Επίλυσή τους

Γενικά στο σημερινό σχολείο οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με Μαθηματικά προβλήματα τα οποία προσπαθούν να επιλύσουν. Αν παρατηρήσουμε τα βιβλία των Μαθηματικών από το Δημοτικό μέχρι το Λύκειο, θα δούμε ότι περιέχουν τέτοια προβλήματα. Λίγα σε σχέση με το σύνολο των ασκήσεών τους. Βέβαια αν προσθέσουμε και αυτά που υπάρχουν στο βιβλίο του δασκάλου και του καθηγητή γίνονται περισσότερα. Ανεξάρτητα με την κριτική που μπορεί να κάνει κάποιος για την ποιότητα των προβλημάτων αυτών, σημασία έχει αν οι δάσκαλοι και οι καθηγητές τα διδάσκουν. Φυσικά αυτό έχει να κάνει και με την απουσία προβλημάτων από τα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων. Οι εκπαιδευτικοί σκέφτονται και λειτουργούν κάτω από την πανίσχυρη επιρροή του πλαισίου εφαρμογής των Πανελλαδικών Εξετάσεων και του ευρύτερου εκπαιδευτικού και κοινωνικού πλαισίου, με αντίκτυπο να παραμελούν στη διδασκαλία τους την ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων και την καλλιέργεια της μαθηματικής επιχειρηματολογίας (Κόσσυβας Γ., Καρκάνης Β., Μπερσίμης Φ., 2017).

Πρόβλημα είναι μια κατάσταση η οποία χρήζει αντιμετώπισης και απαιτεί λύση η οποία δεν είναι γνωστή ούτε προφανής. Θα σταθούμε στα μαθηματικά προβλήματα και στους τρόπους αντιμετώπισής τους. Ο G. Polya που ασχολήθηκε συστηματικά, στον πρόλογο της πρώτης έκδοσης του περίφημου βιβλίου του «Πώς να το λύσω» αναφέρει: «Το πρόβλημά σας μπορεί να είναι απλό, αν όμως προκαλεί το ενδιαφέρον σας και ενεργοποιεί τις εφευρετικές σας ικανότητες και μπορείτε να το λύσετε με τα δικά σας μέσα, τότε θα δοκιμάσετε την ένταση και το συναίσθημα της θριαμβευτικής χαράς που γεννάει μια ανακάλυψη. Τέτοιες εμπειρίες σε μια κρίσιμη ηλικία, μπορούν να δημιουργήσουν διάθεση για πνευματική εργασία και να αφήσουν τα ίχνη τους στο πνεύμα και το χαρακτήρα για ολόκληρη τη ζωή» (Polya G., 1945). Επιπλέον είναι από τους πρώτους που διακρίνει για την επίλυση ενός προβλήματος τέσσερις φάσεις. Στην πρώτη, πρέπει να κατανοήσουμε το πρόβλημα, πρέπει να δούμε καθαρά τι ζητείται. Στη δεύτερη, πρέπει να δούμε με ποιο τρόπο συνδέονται τα διάφορα σημεία, με ποιο τρόπο τα ζητούμενα συνδέονται με τα δεδομένα, για να αποκτήσουμε έτσι μια ιδέα της λύσης, για να κάνουμε ένα σχέδιο. Στην τρίτη εκτελούμε το σχέδιό μας και στην τέταρτη κάνουμε ανασκόπηση της λύσης που βρήκαμε, αναθεώρηση και διερεύνηση.

Στο βιβλίο που έχει εκδώσει το KEE για το πρόγραμμα PISA (2007), τα προβλήματα κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με τις ικανότητες που απαιτούνται από το μαθητή για να λυθούν.

- Προβλήματα αναπαραγωγής: είναι τα προβλήματα κλειστού τύπου, που η λύση τους γίνεται με την εφαρμογή κατάλληλου τύπου ή αλγορίθμου. Γενικότερα με εφαρμογή κατάλληλης αλλά γνωστής διαδικασίας.
- Προβλήματα συσχετισμού: είναι τα προβλήματα στα οποία εξετάζεται η αφομοίωση, η ικανότητα σύνδεσης καθώς και η επέκταση της διδαχθείσας ύλης.
- Προβλήματα αφομοίωσης: είναι τα προβλήματα στα οποία εξετάζεται η πλήρης αιτιολόγηση, η τεκμηρίωση, η αφαίρεση, η γενίκευση και η εφαρμογή γνωστών μοντέλων σε νέα πλαίσια-συνθήκες.

Οι συγκεκριμένες κατηγοριοποιήσεις αναφέρθηκαν γιατί σε αυτές περιέχονται και τα ανοιχτά προβλήματα. Όσον αφορά την εξέλιξη και αντιμετώπιση των Μαθηματικών προβλημάτων από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα έχουμε:

- Τα άλυτα προβλήματα. Είναι αυτά για τα οποία έχουμε φτάσει στην παραδοχή ότι δεν επιδέχονται λύση. Για παράδειγμα το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.
- Τα επιλύσιμα προβλήματα. Ως τέτοια χαρακτηρίζουμε τα προβλήματα για τα οποία η λύση τους είναι ήδη γνωστή και υπάρχει. Για κάποια από αυτά η λύση προέρχεται από μια αυτοματοποιημένη διαδικασία όπως για παράδειγμα η επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού με το γνωστό αλγόριθμο. Για κάποια άλλα η λύση επιχειρείται στα πλαίσια ενός εύρους πιθανών λύσεων. Για παράδειγμα το πρόβλημα που αντιμετωπίζει ένας ταξιδιώτης που αναζητά να επιλέξει μεταφορικό μέσο για να μεταβεί από την Θεσσαλονίκη στην Αθήνα. Θα ταξιδέψει με το δικό του αυτοκίνητο; Με λεωφορείο; Με τρένο; Με καράβι ή αεροπλάνο; Ήδη με το παράδειγμά μας, περνάμε σε αυτά τα προβλήματα, που ονομάζουμε στα μαθηματικά ανοιχτά και αποτελούν το αντικείμενο της εισήγησης αυτής.

Τα Ανοιχτά Προβλήματα

Στην διεθνή βιβλιογραφία για τα ανοιχτά προβλήματα χρησιμοποιείται ο όρος ανοιχτόκλειστα, (open-ended), γιατί ο όρος ανοιχτά προβλήματα χρησιμοποιείται κυρίως για άλυτα προβλήματα, όπως η υπόθεση Riemann ή η εικασία του Goldbach (Φερεντίνος, Σ., Γαλάνη, Ι., 2012) κ.λ.π. . Στην ελληνική βιβλιογραφία, με τον όρο «ανοιχτά προβλήματα», έχει επικρατήσει να ορίζουμε αυτά που έχουν πολλές σωστές λύσεις και πολλούς τρόπους για να φτάσει κανείς σε αυτές.

Η εισαγωγή του όρου ανοιχτά προβλήματα ξεκίνησε από την Ιαπωνία (Shimada 1977-Becker et κ.α., 1997) και είχε σκοπό τη μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών με ανοιχτές προσεγγίσεις στη διδακτική πράξη. Σύμφωνα με τους ερευνητές, στα προβλήματα αυτά εντάσσονται οι ακόλουθες δραστηριότητες: διερευνήσεις, διατύπωση προβλήματος, ερευνητικές εργασίες (projects), προβλήματα χωρίς ερωτήσεις, προβλήματα με ποικιλία απαντήσεων, προβλήματα έρευνας πεδίου (Nohda, 1995-Pehkonen, 1997). Είναι προβλήματα με ανοιχτές κατευθύνσεις και ερμηνείες, τα οποία αντίκειται στις ακριβείς και αυστηρές μαθηματικές διατυπώσεις (Κόσυβας, Γ., 2013).

Στη Διδακτική των Μαθηματικών ο όρος ανοιχτό πρόβλημα παραπέμπει σε πρόβλημα έρευνας, το οποίο δεν δεσμεύει τους μαθητές προς μία συγκεκριμένη μέθοδο λύσης. Δεν αποτελεί πρόβλημα καθημερινής ρουτίνας της σχολικής τάξης, αλλά ασυνήθιστο πρόβλημα, στο οποίο οι μαθητές μπορούν να κάνουν επιλογές στα δεδομένα, τις υποθέσεις καθώς και τη στρατηγική επίλυσης η οποία με βάση τους επιδιωκόμενους στόχους θα τους οδηγήσει και σε διαφορετικές λύσεις (Κόσυβας, Γ., 2013). Με την εισαγωγή- διδασκαλία των ανοιχτών προβλημάτων επιδιώκεται η βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών. Τέτοια προβλήματα έχουν χρησιμοποιηθεί σε συγκρίσεις των επιδόσεων των μαθητών, όπως είναι οι διεθνείς αξιολογήσεις TIMSS και PISA. Κατά τις τρεις τελευταίες δεκαετίες έχει συγκεντρωθεί πλήθος ερευνών για τη διδακτική αξιοποίηση των ανοιχτών προβλημάτων. Από πολλούς ερευνητές υποστηρίζεται ότι το

ανοιχτό πρόβλημα πρέπει να κατέχει κεντρική θέση στη διδασκαλία των μαθηματικών (Silver, 1995; Stacey, 1995; Pehkonen, 1997).

Πρέπει να σημειωθεί ότι από τις αρχές της δεκαετίας του 70 διατυπώθηκαν νέες θεωρίες μάθησης οι οποίες εστιάζουν αποκλειστικά στο μαθητή ως ιδιαίτερη οντότητα, στα συναισθήματά του, στον τρόπο με τον οποίο ο συγκεκριμένος μαθητής μαθαίνει, καθώς και στους τρόπους με τους οποίους θα βελτιώσει την ικανότητά του αυτή. Πρόκειται για αυτό που χαρακτηρίστηκε ως «μαθητοκεντρικού τύπου μάθηση» (Χατζηθεολόγου, 2000) και αποτέλεσε το θεμέλιο λίθο, με τον οποίο κτίστηκε μια νέα θεωρία μετάδοσης της γνώσης, από το δάσκαλο στο μαθητή. Ο κονστρουκτιβισμός ή δομητισμός ή οικοδομισμός (Von Glaserfeld, 1991; Steffe 1991 κ.α.). Ο Davis (1992) πιστεύει ότι μια επιτυχημένη διδασκαλία μαθηματικών δεν πρέπει να ξεκινά από την παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών και στη συνέχεια τα προβλήματα να προκύπτουν ως εφαρμογές των συγκεκριμένων εννοιών, αλλά να ακολουθεί ακριβώς την αντίθετη πορεία. Δηλαδή ξεκινώντας από ένα πρόβλημα η διδακτική διαδικασία να στοχεύει στην κατάκτηση της έννοιας. Σύμφωνα με τον Pehkonen (1995) τα ανοιχτά προβλήματα αποτελούν ένα καλό εργαλείο για την επίτευξη των στόχων του κονστρουκτιβισμού.

Τα Ανοιχτά Προβλήματα στη Διδακτική Πράξη

Για το σχεδιασμό μιας δραστηριότητας επίλυσης ενός ανοιχτού προβλήματος έχουν προταθεί διάφορα μοντέλα (Κόσυβας, Γ., 2013) αλλά και κάποιες γενικές κατευθύνσεις.

Σύμφωνα με τις γενικές κατευθύνσεις σημαντικό για το διδάσκοντα είναι:

- Η περιγραφή του προβλήματος, η οποία παρέχει ένα περιβάλλον διερεύνησης και τονίζει τη σημασία του προβλήματος για το μαθητή.
- Η αξιολόγηση της προηγούμενης γνώσης, η οποία παρέχει στο διδάσκοντα την δυνατότητα να αντιληφθεί διάφορες παρανοήσεις των μαθητών του και να σχεδιάσει κατάλληλες δραστηριότητες με σκοπό να τις διορθώσει.
- Η ομαδική εργασία η οποία ενθαρρύνει τους μαθητές να συνεργάζονται και να συζητούν, εξηγώντας με κατανοητό τρόπο τις έννοιες και τον τρόπο σκέψης τους, στους συμμαθητές τους. Με αυτόν τον τρόπο κατανοούν τις απόψεις των άλλων, αμφισβητούν αν χρειαστεί το κύρος των δικών τους απόψεων και αναθεωρούν και αναδιαμορφώνουν τις αντιλήψεις τους.
- Η ατομική εργασία, η οποία καλλιεργεί την προσωπική ευθύνη του μαθητή να εκτελέσει σωστά την εργασία του.
- Η επέκταση των δραστηριοτήτων με εφαρμογή όσων έμαθαν οι μαθητές σε νέα ή συγγενικά περιβάλλοντα.

Σύμφωνα με το προτεινόμενο μοντέλο του Γ. Κόσυβα (2013), προτείνεται δίωρη (δίωρο συνεχόμενο) ομαδοσυνεργατική μέθοδος αξιοποίησης ενός ανοιχτού προβλήματος που πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

- Παρουσίαση και κατανόηση του προβλήματος.
- Ομαδική έρευνα και γραφή μιας λύσης σε «αφίσα συνέργειας».
- Η μαθηματική συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη.
- Η συγκεφαλαίωση από τον εκπαιδευτικό.

Σε συνέχεια των παραπάνω αυτό που προτείνεται ως πρόταση (και έχει εφαρμοστεί από εμάς), ακολουθεί και τις γενικές κατευθύνσεις όπως εκτέθηκαν, καθώς και το μεγαλύτερο μέρος της φιλοσοφίας και λογικής της πρότασης Κόσυβα (2013).

Συγκεκριμένα με το υπάρχον θεσμικό πλαίσιο και τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, προτείνεται:

- η επίλυση ανοιχτού προβλήματος ως δραστηριότητα, να γίνεται δύο φορές στη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, για κάθε ένα από τα μαθήματα Άλγεβρα και Γεωμετρία και για τις τάξεις Α' και Β' Λυκείου

- η εργασία να είναι ομαδοσυνεργατική και ειδικότερα από ομάδες των πέντε μαθητών, που θα ορίζει ο εκπαιδευτικός, ώστε να υπάρχει ισόρροπη κατανομή καλών και λιγότερων καλών μαθητών στην κάθε ομάδα
- ως κατάλληλος χρόνος για τις δύο δραστηριότητες προτείνεται το τέλος του 1^{ου} τετραμήνου και τα μέσα του 2^{ου} τετραμήνου, ώστε η ύλη κάθε τάξης και για το κάθε μάθημα να έχει προχωρήσει
- ως διάρκεια για την κάθε δραστηριότητα προτείνονται οι δύο ώρες. Επειδή πρακτικά (πρόγραμμα) δεν μπορεί να είναι συνεχόμενες, θα είναι δύο διαδοχικές ώρες του κάθε μαθήματος
- να γίνεται με την ολοκλήρωση της ύλης του τρέχοντος κεφαλαίου (της Άλγεβρας ή Γεωμετρίας)
- την 1^η ώρα και ειδικότερα τα πρώτα 25 λεπτά ο εκπαιδευτικός κάνει με όλους τους μαθητές της τάξης μια γρήγορη ανακεφαλαίωση στην ύλη του κεφαλαίου που βρίσκεται (της Άλγεβρας ή της Γεωμετρίας ανάλογα με το μάθημα στο οποίο θα γίνει η δραστηριότητα). Στη συνέχεια (στο υπόλοιπο του χρόνου της 1^{ης} ώρας) τους ενημερώνει γι' αυτό που θα επακολουθήσει την επόμενη διδακτική ώρα. Ορίζει και καταγράφει τις ομάδες εργασίας και με σαφήνεια πληροφορεί την τάξη για το χρόνο και τον τρόπο με τον οποίο θα συνεργαστούν οι μαθητές μεταξύ τους. Εμφανίζει τη διαδικασία ως project και την απενοχοποιεί πλήρως από διαδικασία εξέτασης με βαθμό. Επιπλέον τους ενημερώνει ότι μπορεί να έχουν δίπλα τους το βιβλίο του μαθήματος ανοιχτό
- την 2^η ώρα με την είσοδο του εκπαιδευτικού στην τάξη, οι ομάδες είναι έτοιμες και απλωμένες σε διάφορα σημεία της τάξης (κάθε 5-αδα έχει ενώσει δύο θρανία και κάθεται γύρω γύρω). Ο εκπαιδευτικός μοιράζει σε κάθε μαθητή από ένα φύλλο εργασίας A4 όπου στην κορυφή της μιας σελίδας υπάρχει η διατύπωση του προβλήματος-δραστηριότητας. Ορίζει το χρόνο εργασίας 20-25 λεπτά και επιτηρεί την εργασία των ομάδων από απόσταση παροτρύνοντας τις να ακούγεται η γνώμη όλων. Φροντίζει να υπάρχει λογικός θόρυβος και επικέντρωση του ενδιαφέροντος όλων στο πρόβλημα. Παρατηρεί από απόσταση τη δουλειά όλων και σχηματίζει μια καταρχήν εικόνα για τη δουλειά της κάθε ομάδας. Προσπαθεί να δει ποιοι έφτασαν σε λύση, ποιοι σε διαφορετική λύση και ποιοί βρίσκονται ακόμη στα πρώτα βήματα της λύσης του προβλήματος. Τρία λεπτά πριν τη λήξη του χρόνου ζητάει από την κάθε ομάδα να καταγράψει καθαρά τις ιδέες που τέθηκαν στο τραπέζι της, καθώς και τη λύση ή την πορεία της λύσης μέχρι τη στιγμή εκείνη. Δίνει τη λήξη του χρόνου εργασίας.
- Από όσα έχει παρατηρήσει καλεί την ομάδα που έχει προχωρήσει αλλά δεν έχει φτάσει στη λύση να εκφράσει τις ιδέες της στην ολομέλεια. Ζητά από τους υπόλοιπους μαθητές να τις κρίνουν, με αιτιολόγηση όμως της γνώμης τους. Συνήθως στη φάση αυτή οι μαθητές που έχουν λύσει το πρόβλημα επεμβαίνουν θέλοντας να προτάξουν τη σωστή λύση. Ο εκπαιδευτικός με σωστή διαχείριση φροντίζει να ακουστούν όλες οι απόψεις. Με έλεγχο του χρόνου θα περάσει στην ομάδα που έχει καταλήξει σε ξεκάθαρη λύση και θα επιδιώξει μέσα από τη συζήτηση που θα αναπτυχθεί (όπως και στην προηγούμενη φάση) να έρθουν στην επιφάνεια και οι λύσεις των άλλων ομάδων
- στα τελευταία 3-4 λεπτά της ώρας ο εκπαιδευτικός κάνει μια ανασκόπηση της όλης διαδικασίας αναδεικνύοντας το κέρδος για όλους. Στο σημείο αυτό έχουν παρατηρηθεί θετικές κρίσεις από όλους τους μαθητές, που εκφράζονται μάλιστα με ιδιαίτερη θέρμη και σχόλια (ιδίως από τους πιο αδύναμους). Με το κουδούνι της ώρας αυτής ο εκπαιδευτικός ζητά από όσους μαθητές θέλουν να σκεφτούν τη δραστηριότητα και στο σπίτι τους και αν έχουν κάποια καινούργια ιδέα ή λύση να την φέρουν την επόμενη φορά. Αρκετές φορές έχουν προκύψει επιπλέον προσεγγίσεις στη λύση του προβλήματος

Έναντι Επιλόγου

Τα πλεονεκτήματα των ανοικτών προβλημάτων σύμφωνα με τον Shimada (1977) είναι πέντε.

α) Οι μαθητές συμμετέχουν περισσότερο ενεργητικά στο μάθημα και εκφράζουν τις ιδέες τους πιο συχνά, γιατί η λύση ανοικτών προβλημάτων παρέχει ελεύθερο, υπεύθυνο και υποστηρικτικό περιβάλλον, όπου η υπαρξη πολλών σωστών λύσεων δίνει στον κάθε μαθητή την ευκαιρία να φτάσει στη δική του σωστή απάντηση. Επιπλέον οι μαθητές είναι περίεργοι για τις άλλες λύσεις τις οποίες μπορούν να συγκρίνουν με τις δικές τους και αργότερα να συζητήσουν πάνω σε αυτές.

β) Οι μαθητές έχουν περισσότερες ευκαιρίες να κάνουν συνειδητή χρήση της μαθηματικής τους γνώσης και των δεξιοτήτων τους. Εφόσον υπάρχει πληθώρα λύσεων οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν τον δικό τους δρόμο προς την απάντηση, δημιουργώντας έτσι ο καθένας τη μοναδική του λύση.

γ) Κάθε μαθητής - μαθήτρια μπορεί να ανταποκριθεί στο πρόβλημα με το δικό του αποκλειστικό τρόπο

δ) Το μάθημα μπορεί να προσφέρει στους μαθητές μια εμπειρία συλλογισμού. Η σύγκριση των διαφορετικών λύσεων και η συζήτηση πάνω σε αυτές κινητοποιεί τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν υπέρ των λύσεων τους, με αποτέλεσμα να αναπτύσσουν την μαθηματική τους σκέψη.

ε) Παρέχονται πολλές ευκαιρίες στους μαθητές να βιώσουν την ευχαρίστηση της ανακάλυψης και την επιδοκιμασία των συμμαθητών τους.

Η διδασκαλία ανοικτών προβλημάτων μπορεί να συνεισφέρει στην ανάπτυξη πολλών προσωπικών δεξιοτήτων, όπως:

- Ανάπτυξη κριτικής σκέψης μέσα από την αναζήτηση της σωστής ερώτησης για την εύρεση λύσης
- Ανάπτυξη δημιουργικής σκέψης μέσα από την εύρεση πολλαπλών λύσεων
- Σωστή διαχείριση του χρόνου, όταν ζητείται η ολοκλήρωση της λύσης μέσα στον προβλεπόμενο χρόνο.

Δυστυχώς ο ωφέλιμος χρόνος διδασκαλίας και η ύλη κάθε τάξης λειτουργούν απαγορευτικά στο να έρθουν οι μαθητές σε επαφή και να προσεγγίσουν την λύση

«ανοικτών προβλημάτων». Επομένως στερούμε από τους μαθητές την δυνατότητα να διαχειριστούν αυτού του είδους τα προβλήματα που απαιτούν απλές και ταυτόχρονα σύνθετες διαδικασίες μαθηματικής σκέψης.

Η Διδακτική Σημασία των Ανοικτών Προβλημάτων της Γεωμετρίας

Σύμφωνα με τη Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια, η εμφάνιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας συνδέεται στενά με τις διαισθητικές αντιλήψεις του ανθρώπου για τον κόσμο που τον περιβάλλει (ευθείες- τεντωμένες χορδές, ακτίνες φωτός κτλ). Η παρατεταμένη διαδικασία εμβάθυνσης στις έννοιες αυτές οδήγησε σε μια πιο αφηρημένη αντίληψη της Γεωμετρίας. Η ανακάλυψη από τον Ν. Ι. Lobachevski μιας Γεωμετρίας διαφορετικής από την Ευκλείδεια απέδειξε ότι οι ιδέες μας για το χώρο δεν είναι *a priori*. Με άλλα λόγια δεν είναι δυνατόν να ισχυριστεί κανείς ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η μόνη Γεωμετρία που περιγράφει τις ιδιότητες του χώρου που μας περιβάλλει. Η ανάπτυξη των φυσικών επιστημών, πρωτίστως της Φυσικής και της Αστρονομίας, απέδειξε ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρίας περιγράφει τη δομή του χώρου που μας περιβάλλει με ακρίβεια που φτάνει μόνο μέχρι ενός ορισμένου βαθμού, ενώ δεν μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά τις ιδιότητες του χώρου ως προς τις μετακινήσεις των σωμάτων και ως προς τις ταχύτητες που προσεγγίζουν την ταχύτητα του φωτός. Έτσι, η Ευκλείδεια Γεωμετρία μπορεί να θεωρηθεί σαν μια πρώτη προσέγγιση μιας περιγραφής της δομής του πραγματικού φυσικού κόσμου (χώρου).

Ζώντας στον τρισδιάστατο χώρο, έχουμε ανάγκη, σαν ανθρώπινα πλάσματα, να γνωρίσουμε τα στερεά που υπάρχουν σ' αυτόν (σχήμα, επιφάνεια, όγκος, διάταξη αυτών στο χώρο, ομοιότητες,

διαφορές μεταξύ τους). (Κερασσιρίδης Γ. 2013). Αν σκεφτούμε πως η Ευκλείδεια Γεωμετρία, πρώτη αυτή, ενσωμάτωσε στο σύστημά της την ανθρώπινη ιδιότητα- ανάγκη για απόδειξη ισχυρισμών, μπορούμε να καταλάβουμε την άποψη ότι η συμβολή της Ευκλείδεια Γεωμετρία στην προαγωγή της σκέψης ήταν επαναστατική. Οι αρχαίοι γεωμέτρες παρέλαβαν μια διαδικασία εμπειρική και την μετασχημάτισαν σε θεωρητική επιστήμη. Ακριβώς, αυτό το επίτευγμα, ήταν η ανεπανάληπτη προσφορά τους στην ανθρώπινη κοινωνία.

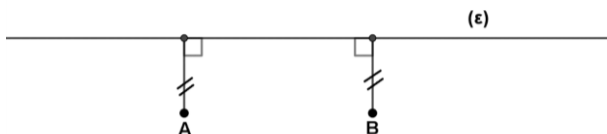
Οι έννοιες και οι γνώσεις που κατακτούν οι μαθητές από την Ευκλείδεια Γεωμετρία τους βοηθούν να αντιλαμβάνονται συνειδητά τον οικείο χώρο και να λύνουν προβλήματα που σχετίζονται με αυτόν. Αυτές οι ικανότητες δεν μπορούν να αποκτηθούν χωρίς ειδική εξάσκηση ή μέσα από άλλα μαθήματα. Στην υποβάθμιση της Γεωμετρίας στα αναλυτικά προγράμματα οφείλονται πολλές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε επόμενα στάδια των σπουδών τους ή στη μελλοντική τους απασχόληση. Αναφέρεται το πεδίο της Γεωμετρίας, γιατί οι μάχιμοι εκπαιδευτικοί, κάθε χρονιά εκπλήσσονται ευχάριστα, όταν διορθώνουν τα γραπτά της Γεωμετρίας, των μαθητών της Α' και Β' Λυκείου, στις τελικές εξετάσεις. Υπάρχουν πολλές και διαφορετικές προσεγγίσεις-λύσεις από τους μαθητές τους στα περισσότερα ερωτήματα.

Κλείνοντας την εισήγηση αυτή, θα παραθέσουμε ενδεικτικά ανοιχτά προβλήματα Γεωμετρίας που έχουν προταθεί στη σχολική τάξη ως δραστηριότητες (Α' και Β' Λυκείου) με τον τρόπο που εκτέθηκε ποιο πάνω.

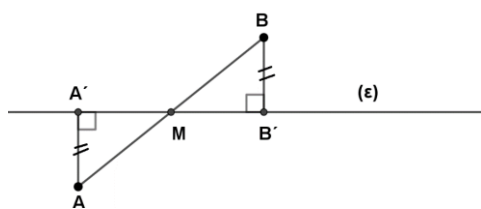
Πρόβλημα 1

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία Α και Β. Να βρεθεί ευθεία του επιπέδου από την οποία ισαπέχουν τα Α, Β.

1^η Λύση: Προφανώς από κάθε ευθεία ε του επιπέδου που είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τα σημεία Α, Β ισαπέχουν.



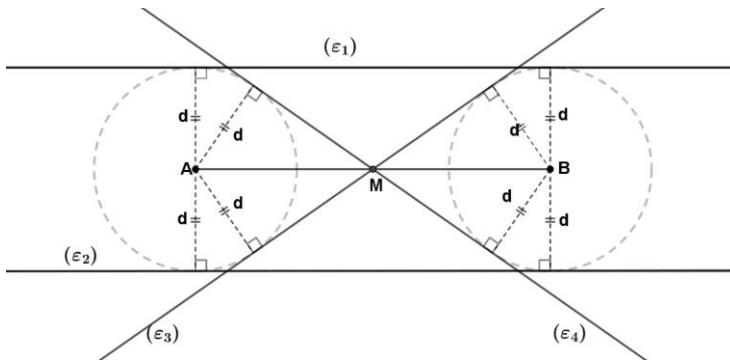
2^η Λύση: Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε ευθεία ε του επιπέδου που να διέρχεται από το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και φέρουμε $AA', BB' \perp \varepsilon$ τότε τα τρίγωνα MAA', MBB' είναι ίσα οπότε $AA' = BB'$.



Αυτό ισχύει ακόμη και στην περίπτωση που η ευθεία ε είναι κάθετη στο ΑΒ στο μέσον του Μ.

Εφαρμογή: Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία Α και Β. Να βρεθούν οι ευθείες του επιπέδου από τις οποίες τα σημεία Α, Β απέχουν απόσταση d.

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες είναι τέσσερις. Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ και ε_4 .

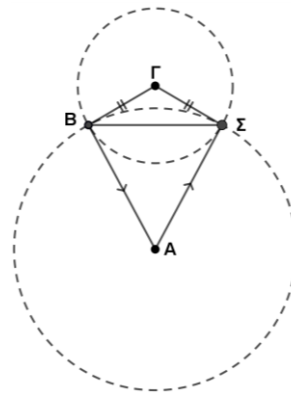
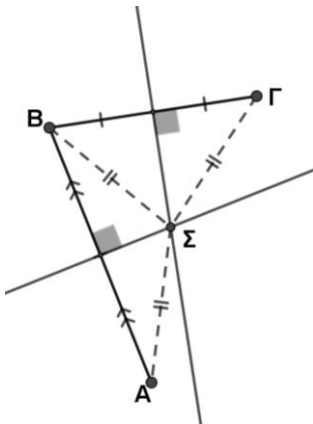


Πρόβλημα 2

Δίνονται τρία σημεία A, B, Γ μη συνευθειακά. Να βρείτε σημείο Σ του επιπέδου, ώστε τα τρίγωνα ΣAB και $\Sigma B\Gamma$ να είναι ισοσκελή.

1^η Λύση: Αν φέρουμε τις μεσοκαθέτους των τμημάτων AB και $B\Gamma$ αυτές τέμνοντα σε σημείο Σ και προφανώς είναι $\Sigma A = \Sigma B$ καθώς και $\Sigma B = \Sigma \Gamma$ οπότε τα τρίγωνα ΣAB και $\Sigma B\Gamma$ είναι ισοσκελή

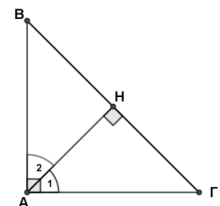
2^η Λύση: Αν γράψουμε τους κύκλους (A, AB) και $(\Gamma, \Gamma B)$ αυτοί είναι τεμνόμενοι και εκτός του κοινού τους σημείου B έχουν κοινό και ένα ακόμη σημείο το Σ . Αυτό είναι το ζητούμενο γιατί $AB = A\Sigma$ ως ακτίνες του κύκλου (A, AB) καθώς και $\Gamma B = \Gamma\Sigma$ ως ακτίνες του κύκλου $(\Gamma, \Gamma B)$.



Πρόβλημα 3

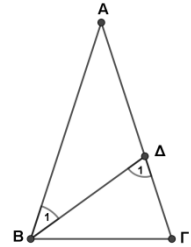
Να βρεθεί το ισοσκελές τρίγωνο και ο τρόπος με τον οποίο αυτό μπορεί να διαιρεθεί σε δύο άλλα ισοσκελή τρίγωνα.

1^η Λύση: Έστω το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$. Φέρνουμε το ύψος του AH που είναι και διάμεσος άρα και διχοτόμος οπότε



$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 45^\circ = \hat{B} = \hat{\Gamma}$ άρα τα τρίγωνα AHB και AHG είναι ισοσκελή.

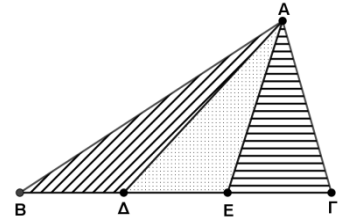
2^η Λύση: Έστω το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 36^\circ$ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 72^\circ$. Φέρνουμε τη $B\Delta$ διχοτόμο της $\hat{B}$ τότε η $\hat{A}$ άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές. Επίσης η $\hat{\Delta}_1 = 72^\circ$ (εξωτερική στο τρίγωνο $AB\Delta$) άρα $\hat{\Delta}_1 = 72^\circ = \hat{\Gamma}$ οπότε το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.



Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε τρόπο ώστε να το διαιρέσετε σε τρία ισοδύναμα σχήματα.

1^η Λύση: Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία Δ, E ώστε $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$ τότε τα τρίγωνα $AB\Delta, A\Delta E, A\Gamma E$ είναι ισοδύναμα (έχουν ίσες βάσεις και κοινό ύψος από την κορυφή A). Το ίδιο μπορούμε να επαναλάβουμε και με τις πλευρές AB και $A\Gamma$.

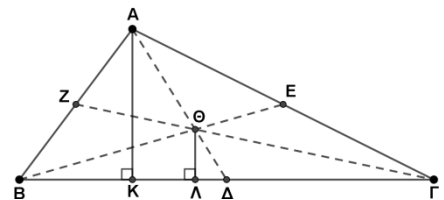


2^η Λύση: Φέρνουμε τις διαμέσους $A\Delta, BE, \Gamma Z$ που τέμνονται στο σημείο Θ βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ με την ιδιότητα να απέχει τα $\frac{2}{3}$ της διαμέσου από την αντίστοιχη κορυφή και το

$\frac{1}{3}$ της διαμέσου από το μέσον της αντίστοιχης πλευράς. Φέρνουμε $AK, \Theta\Lambda \perp B\Gamma$ οπότε για

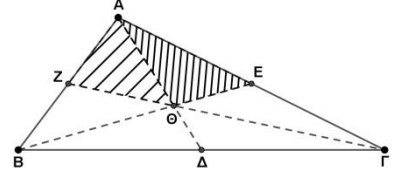
τα τρίγωνα $\Theta B\Gamma, AB\Gamma$ που έχουν κοινή βάση τη $B\Gamma$ θα ισχύει: $\frac{(\Theta B\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Theta\Lambda}{AK}$. Όμως

$\hat{\Theta\Lambda\Delta} \approx \hat{AK\Delta}$ (ορθογώνια και η $\hat{\Delta}$ κοινή) άρα $\frac{\Theta\Lambda}{AK} = \frac{\Theta\Lambda}{A\Delta} = \frac{1}{3}$ οπότε $\frac{(\Theta B\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}$ άρα



$(\Theta B\Gamma) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$. Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $(\Theta AB) = \frac{1}{3}(AB\Gamma) = (\Theta A\Gamma)$ οπότε $(\Theta B\Gamma) = (\Theta AB) = (\Theta A\Gamma)$ και έχουμε ένα ακόμη τρόπο να πετύχουμε το ζητούμενο.

3^η Λύση: Φέρνουμε τις διαμέσους $AD, BE, \Gamma Z$ που τέμνονται στο σημείο Θ βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$. Στο τρίγωνο ΘAB η ΘZ είναι διάμεσος άρα $(\Theta AZ) = \frac{1}{2}(\Theta AB)(1)$. Επίσης $\hat{A\Theta B} + \hat{A\Theta E} = 180^\circ$



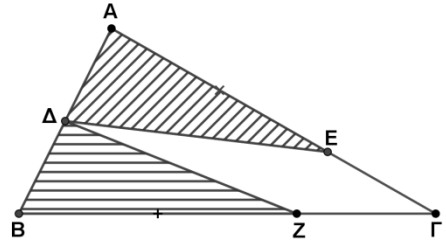
$$\text{οπότε } \frac{(A\Theta E)}{(A\Theta B)} = \frac{A\Theta \cdot \Theta E}{A\Theta \cdot \Theta B} = \frac{\Theta E}{\Theta B} = \frac{\frac{1}{3}BE}{\frac{2}{3}BE} = \frac{1}{2} \quad \text{άρα} \quad (A\Theta E) = \frac{1}{2}(\Theta AB)(2). \text{ Με}$$

πρόσθεση των (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε: $(\Theta AZ) + (A\Theta E) = (\Theta AB)$

$$\Rightarrow (AZ\Theta E) = (\Theta AB) = \frac{1}{3}(AB\Gamma) \text{ και όμοια } (BZ\Theta \Delta) = (\Gamma \Delta \Theta E) = \frac{1}{3}(AB\Gamma) \quad \text{άρα}$$

$$(AZ\Theta E) = (BZ\Theta \Delta) = (\Gamma \Delta \Theta E).$$

4^η Λύση: Έστω Δ το μέσον της πλευράς AB , E σημείο της πλευράς $A\Gamma$ ώστε $AE = \frac{2}{3}A\Gamma$ και Z σημείο της πλευράς $B\Gamma$ ώστε $BZ = \frac{2}{3}B\Gamma$. Τα τρίγωνα $A\Delta E$



$$\text{και } AB\Gamma \text{ έχουν κοινή τη γωνία } A \quad \text{άρα} \quad \frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{2}{3}A\Gamma}{AB \cdot A} = \frac{1}{3} \quad \text{οπότε}$$

$$(A\Delta E) = \frac{1}{3}(AB\Gamma). \quad \text{Όμοια δείχνεται ότι } (B\Delta Z) = \frac{1}{3}(AB\Gamma) \quad \text{οπότε και}$$

$$(\Delta Z\Gamma E) = \frac{1}{3}(AB\Gamma) \quad \text{άρα} \quad (A\Delta E) = (B\Delta Z) = (\Delta Z\Gamma E).$$

Βιβλιογραφία

- Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια, Ε. Γ. Πόζνιακ, Τόμος 12, σελ. 150
- Κερασσιρίδης Γ. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία στην εκπαίδευση και την κοινωνία. 30^ο πανελλήνιο συνέδριο Ε.Μ.Ε. Καρδίτσα, 2013.
- Κόσυβας Γ., Καρκάνης Β., Μπερσίμης Φ. Πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τα θέματα των μαθηματικών των πανελλαδικών εξετάσεων και αλλαγή της διδασκαλίας. 34^ο πανελλήνιο συνέδριο Ε.Μ.Ε. Λευκάδα, 2017.
- Κόσυβας Γ. Αξιοποίηση ανοιχτών προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. 30^ο πανελλήνιο συνέδριο Ε.Μ.Ε. Καρδίτσα, 2013.
- Φερεντίνος Σ., Γαλάνη Ι. Τα ανοιχτά προβλήματα στη Μαθηματική Εκπαίδευση. 29^ο πανελλήνιο συνέδριο Ε.Μ.Ε. Καλαμάτα, 2012.
- Χατζηθεολόγου. Α. (2000). Μάθηση: Προσωπικός ρυθμός και μαθησιακό στυλ. Παιδαγωγικός Λόγος, 1, 128-138.
- Becker, J. & Shimada, L. 1997. The open-ended approach. Reston (VA): NCTM.
- Becker, J., Shimada, S. (1997). The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Davis, R. B. (1992). Understanding “understanding”. Journal of Mathematical Behavior, 11(3), 225-242.
- Nohda, N. 1991. Paradigm of the “open-approach” method in mathematics teaching: Focus on mathematical problem solving. International Reviews on Mathematical Education 23(2), 32-37.
- Nohda, N. (1995). Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. In Nakahara, T. & Koyama, M. (Eds.), Proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 1, pp. 39-53). Hiroshima, Japan: PME.
- Pehkonen, E. (1995). Introduction: Use of Open-ended Problems. International Reviews on Mathematical Education 27(2), 55-57.
- Pehkonen, E. (Ed.) (1997). Use of open-ended problems in mathematics classroom. Department of Teacher Education, Research Report 176. University of Helsinki.
- PISA. (2007). Διεθνές Πρόγραμμα για την αξιολόγηση των Μαθητών. Αθήνα: ΚΕΕ
- Polya, G. (1945). Πώς να το λύσω. Εκδόσεις Σηλιώτη.
- Shimada, S. (1997). Open-ended approach in arithmetic and mathematics. A new proposal towards teaching improvement. Tokyo, Mizuumishobo.
- Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. ZDM, 95(2), 67-72.
- Stacey, K. (1995). The challengers of keeping open problem-solving open in school mathematics. ZDM, 95(2), 62-67.
- Steffe, L. P. (1991). Epistemological foundations of mathematical experience. New York : Springer-Vergal.
- Von Glaserfeld, E. (Ed.) (1991). Radical constructivism in mathematics education. Dortrecht: Kluwer

Η εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών ως βασικό προαπαιτούμενο στη διδασκαλία και μάθηση της Ανάλυσης

Γιάννης Θωμαΐδης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

**Εισήγηση στην 8^η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί
Σάββατο 10 Μαρτίου 2018**

Περίληψη

Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν ένα διαχρονικό αντικείμενο διδασκαλίας και μάθησης στη μαθηματική εκπαίδευση, το οποίο εξελίσσεται διαδοχικά στο Δημοτικό, το Γυμνάσιο και το Λύκειο σύμφωνα με μια σπειροειδή επέκταση των βασικών υποσυνόλων που συγκροτούν το σύνολο των πραγματικών (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί και άρρητοι αριθμοί).

Υπάρχουν όμως ισχυρές ενδείξεις (από τη διόρθωση των γραπτών των πανελλαδικών εξετάσεων στα βαθμολογικά κέντρα μέχρι τα αποτελέσματα εμπειρικών ερευνών), ότι η διδασκαλία των στοιχείων Ανάλυσης που γίνεται στην Γ' Λυκείου απευθύνεται σε μαθητές, η μεγάλη πλειοψηφία των οποίων έχει ελλιπέστατη γνώση του συνόλου των πραγματικών αριθμών και ιδιαίτερα στα ζητήματα εκείνα που υπερβαίνουν εννοιολογικά το επίπεδο των αριθμητικών πράξεων (όπως είναι π.χ. η διάκριση των δεκαδικών αναπαραστάσεων ρητών και άρρητων αριθμών, οι έννοιες της πυκνότητας και της διαδοχικότητας ή του αριθμήσιμου και του συνεχούς που διαφοροποιούν μεταξύ τους τα βασικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$).

Στην εισήγηση θα παρουσιάσουμε σχετικά ευρήματα από την ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία και θα σκιαγραφήσουμε ορισμένες διδακτικές παρεμβάσεις που μπορούν να υλοποιηθούν σε ολόκληρο το φάσμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ώστε να αποκτήσουν οι μαθητές βαθμιαία τη γνώση εκείνη του συνόλου των πραγματικών αριθμών που είναι απολύτως αναγκαία για τη διδασκαλία και μάθηση των βασικών εννοιών της Ανάλυσης.

1. Οι πραγματικοί αριθμοί στα σχολικά Μαθηματικά

Η πρώτη ουσιαστική επαφή των μαθητών με την έννοια του πραγματικού αριθμού επιχειρείται στη Β' Γυμνασίου, στο 2^ο κεφάλαιο του βιβλίου Μαθηματικών που επιγράφεται «Πραγματικοί Αριθμοί» και διαπραγματεύεται τις έννοιες της τετραγωνικής ρίζας και του άρρητου αριθμού. Όπως χαρακτηριστικά τονίζεται στις «Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο» ([1], σ.28):

Το περιεχόμενο του κεφαλαίου είναι νέο για τους μαθητές και υπάρχουν πολλές πτυχές που είναι πηγή δυσκολιών (δεκαδική αναπαράσταση αρρήτων, έννοια πραγματικών αριθμών, κ.ο.κ.).

Η κατάσταση γίνεται βέβαια λίγο πιο περίπλοκη αν λάβουμε υπόψη ότι ορισμένα βασικά ζητήματα που αφορούν τη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών αριθμών προβλέπεται να διδαχθούν στο τέλος της Α' ή στην αρχή της Β' Γυμνασίου. Αυτά όμως είτε δεν διδάσκονται καθόλου είτε διδάσκονται πολύ συνοπτικά, με αποτέλεσμα οι γνώσεις που αποκτούν τελικά οι μαθητές να είναι ελλιπείς και μετέωρες. Για τη σχετική ενότητα στο 7^ο κεφάλαιο του βιβλίου Μαθηματικών της Α' Γυμνασίου (§7.7) οι «Οδηγίες» αναφέρουν τα εξής ([1], σ.12):

Σε συνδυασμό με την μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό ή περιοδικό δεκαδικό (που εντοπίζεται στην §3.1) η αντίστροφη διαδικασία είναι σημαντική για τη συγκρότηση της έννοιας του ρητού αριθμού.

Πρέπει βέβαια να τονίσουμε ότι ορισμένες σημαντικές ευκαιρίες για την εξοικείωση των μαθητών με την έννοια του άρρητου αριθμού όχι μόνο δεν αξιοποιούνται στα σχολικά βιβλία, αλλά γίνονται φορείς για τη δημιουργία παρανοήσεων. Έτσι στην §3.3 του βιβλίου

Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου, η πρώτη εμφάνιση του αριθμού π συνοδεύεται από το ακόλουθο σχόλιο(σ.187):

Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός π είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία, **τα οποία δεν προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία** (η έμφαση δική μου).

Αυτή η ατυχής διατύπωση (αντί να γίνει άμεση αναφορά στη μη περιοδικότητα του δεκαδικού αναπτύγματος) οδηγεί σε εσφαλμένα συμπεράσματα, αν λάβουμε υπόψη ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί των οποίων τα δεκαδικά ψηφία **προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία**. Ένας τέτοιος είναι π.χ. ο απειροψηφίος 6,1010010001... που ορθώς αναφέρεται ως παράδειγμα άρρητου αριθμού στο βιβλίο Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου (σ.12). Μπορούμε βέβαια να κατασκευάσουμε πολλούς τέτοιους άρρητους αριθμούς, όπως για παράδειγμα τους επόμενους:

0,123456789101112131415 ...

0,411182532394653606774 ...

Υπάρχουν πολλές και ισχυρές ενδείξεις ότι οι μαθητές του Γυμνασίου συνεχίζουν τις σπουδές τους στο Λύκειο έχοντας πολύ συγκεκριμένες ιδέες για τις έννοιες του ρητού ή του άρρητου αριθμού καθώς και τις λεπτές έννοιες της διαδοχικότητας, της πυκνότητας, του αριθμήσιμου κ.λπ. που συγκροτούν βαθμιαία το θεωρητικό υπόβαθρο των πραγματικών αριθμών και διαφοροποιούν το σύνολο $\mathbb{R}$ από τα διάφορα υποσύνολά του. Αυτές οι ενδείξεις δεν εδράζονται μόνο σε πολυετή και καθημερινή διδακτική εμπειρία, αλλά και σε ερευνητικά δεδομένα που θα παρουσιάσουμε στην επόμενη ενότητα.

Η επίγνωση αυτής της κατάστασης οδήγησε προφανώς τους συντάκτες του προγράμματος σπουδών της Α΄ Λυκείου να συμπεριλάβουν στη διδακτέα ύλη ένα κεφάλαιο με τίτλο «Οι Πραγματικοί Αριθμοί». Παρουσιάζει ενδιαφέρον η περιγραφή των στόχων που καλείται να υλοποιήσει η διδασκαλία του συγκεκριμένου κεφαλαίου στην Α΄ Λυκείου και αξίζει να παραθέσουμε αυτούσια τα σχετικά αποσπάσματα από το πρόγραμμα σπουδών ([2], σ.16674–77):

Πραγματικοί αριθμοί. Οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις έχουν αναπτύξει την έννοια του πραγματικού αριθμού σταδιακά, μέσα από την εισαγωγή των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών και των άρρητων αριθμών. Στο κεφάλαιο αυτό επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του.

Πραγματικοί αριθμοί (Πρ) (14 ώρες)		
Πρ 1. Διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και ταξινομούν με ευχέρεια συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$) που ανήκουν.	Οι πράξεις και οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών (5 ώρες)	Γιατί ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος;
Πρ 2. Διερευνούν τις ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών. Αναγνωρίζουν τη σημασία της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή», «και» στις ιδιότητες. Αιτιολογούν με αντιπαράδειγματα γιατί δεν ισχύει η ισοδυναμία σε ορισμένες ιδιότητες.		Συζητούν το νόημα της συνεπαγωγής ($\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$) και διερευνούν την ισχύ του αντιστρόφου [π.χ. $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow (\alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta)$, ή αντιπαράδειγμα για $\alpha = 2$, $\beta = -2$]
Πρ 3. Αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες αναλογιών στην επίλυση προβλημάτων.		Προβληματίζονται σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους αποδεικνύεται ότι ένας ισχυρισμός δεν ισχύει.
Πρ 4. Εφαρμόζουν διάφορες αποδεικτικές μεθόδους (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο, αντιπαράδειγμα κ.λπ.) για να δείξουν την ισχύ απλών αλγεβρικών προτάσεων.		Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.9

Πρ 5. Διερευνούν την έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Αναπαριστούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών σύνολα που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις και τα συμβολίζουν χρησιμοποιώντας διαστήματα.		
---	--	--

Πρ 6. Διερευνούν και προσδιορίζουν ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας.	Διάταξη των πραγματικών αριθμών (4 ώρες)	Αποδεικνύουν με κατάλληλο αντιπαράδειγμα, ότι η διαίρεση κατά μέλη ανισοτήτων (με θετικούς όρους) δεν ισχύει. Διαπιστώνουν τη σημασία του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη μαθηματικών ισχυρισμών.
Πρ 7. Χρησιμοποιούν την έννοια της διάταξης των πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων της για να επιλύσουν προβλήματα αναπτύσσοντας κατάλληλες στρατηγικές.		

Πρ 8. Ορίζουν αλγεβρικά την απόλυτη τιμή συνδέοντάς τη με τη γεωμετρική της ερμηνεία.	Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού (3 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.10
Πρ 9. Διερευνούν και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής, τις ερμηνεύουν γεωμετρικά και τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.		

Πρ 10. Ορίζουν τη ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού και μέσω αυτής τη δύναμη θετικού αριθμού με ρητό εκθέτη.	Ρίζες πραγματικών αριθμών (2 ώρες)	Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.11
Πρ 11. Αποδεικνύουν και χρησιμοποιούν τις βασικές ιδιότητες των ριζών και δυνάμεων.		

Η σημασία των στόχων Πρ.1 και Πρ.5 που αναφέρονται ειδικά στη διάκριση των βασικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι εύλογη, αν λάβουμε υπόψη ότι στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου θα οριστούν έννοιες όπως «Δύναμη με ρητό και άρρητο εκθέτη» και «Εκθετική συνάρτηση», και θα δημιουργηθεί γενικά η υποδομή για τα στοιχεία της (πραγματικής) Ανάλυσης που διδάσκονται στην Γ' Λυκείου.

Οι διδάσκοντες Άλγεβρα στην Α' Λυκείου τις τελευταίες δεκαετίες⁵ γνωρίζουν βέβαια πολύ καλά ότι η διδασκαλία του μαθήματος είναι ανέφικτη αν οι μαθητές δεν διαθέτουν ορισμένες στοιχειώδεις ικανότητες στον αλγεβρικό λογισμό. Τα διαγνωστικά τεστ που γίνονται στην αρχή αυτής της τάξης, αλλά και έρευνες που έχουν δημοσιευτεί (βλ. π.χ. τα [4] και [5]) δείχνουν ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών που αρχίζουν το Λύκειο αγνοεί σε πολύ μεγάλο βαθμό τα βασικά στοιχεία του αλγεβρικού λογισμού που διδάσκονται στο Γυμνάσιο (ιδιότητες δυνάμεων, ταυτότητες, παραγοντοποίηση, απλοποίηση ρητών παραστάσεων). Έτσι λοιπόν οι διδάσκοντες της Α' Λυκείου δίνουν απόλυτη προτεραιότητα στην κάλυψη αυτών των κενών, ώστε να δημιουργηθεί έγκαιρα η αναγκαία υποδομή που θα διασφαλίσει την ομαλή συνέχεια της

⁵ Το εν χρήσει σχολικό βιβλίο συμπληρώνει φέτος 29 έτη κυκλοφορίας και γίνεται ένα από τα μακροβιότερα στην Ελληνική μαθηματική εκπαίδευση. Μια αναδρομή στην εξέλιξη αυτού του βιβλίου υπάρχει στο [3].

διδασκαλίας (η οποία περιλαμβάνει βέβαια επιπλέον αλγεβρικό λογισμό για τις ανισότητες, τις απόλυτες τιμές και τις ρίζες). Σε αυτό το πλαίσιο, οι στόχοι του προγράμματος σπουδών που αναφέρονται στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών και εκτέθηκαν παραπάνω, μένουν αναγκαστικά στο περιθώριο.

2. Μερικά δεδομένα για τη μάθηση των πραγματικών αριθμών

Υπάρχουν επαρκείς ενδείξεις ότι το πρόβλημα που δημιουργείται από την αδυναμία να διδαχθούν στο Λύκειο οι βασικές γνώσεις για τη δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών και των βασικών υποσυνόλων του, έχει μακροχρόνιες συνέπειες τις οποίες αδυνατούν να αντιμετωπίσουν ακόμη και οι εξειδικευμένες μαθηματικές σπουδές στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Θα αναφέρουμε δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα που επιβεβαιώνουν αυτό τον ισχυρισμό. Το ένα προέρχεται από το διαγωνισμό του ΑΣΕΠ για την πρόσληψη εκπαιδευτικών και το άλλο από μια έρευνα που πραγματοποιήθηκε στον Καναδά σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς, κατά το τελικό στάδιο των σπουδών για τη λήψη πιστοποιητικού διδασκαλίας των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ένα από τα θέματα που τέθηκαν στο διαγωνισμό του ΑΣΕΠ το 2007 στο αντικείμενο της Ειδικής Διδακτικής των Μαθηματικών ήταν το εξής:

Μετά την ολοκλήρωση της ύλης των μαθηματικών της Β΄ Λυκείου θετικής κατεύθυνσης, στην ώρα των ασκήσεων παρακολουθήσατε τον επόμενο διάλογο μεταξύ δύο μαθητών, που συζητούν για τη σύγκριση μεταξύ των αριθμών 1,23999... και 1,24:

Μαθητής Α: Ξέρουμε ότι, για να συγκρίνουμε δύο δεκαδικούς αριθμούς, συγκρίνουμε πρώτα τα ακέραια μέρη. Μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο ακέραιο μέρος. Αν αυτά είναι ίσα, συνεχίζουμε συγκρίνοντας τα ψηφία μετά την υποδιαστολή. Μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο το πρώτο διαφορετικό δεκαδικό ψηφίο. Επομένως ο 1,24 είναι μεγαλύτερος από τον 1,23999...

Μαθητής Β: Μπορείς να μου πεις έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα σε αυτούς;

Μαθητής Α: (μετά από σκέψη). Ο αριθμός 1,23999...1

Μαθητής Β: Πόσα 9 υπάρχουν πριν το 1;

Μαθητής Α: (Σκέφτεται και δεν απαντά)

Μαθητής Β: Μήπως ο 1,24 είναι ο αμέσως επόμενος του 1,23999....;

Μαθητής Α: (μετά από σκέψη). Μάλλον.

Οι δύο μαθητές σας κοιτάζουν με απορία, ζητώντας βοήθεια.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ:

Α) Ποια γνωστικά προβλήματα κρίνετε ότι έχουν οι μαθητές αυτοί, με βάση την παραπάνω συζήτηση;

Β) Πως θα τους βοηθούσατε να τα ξεπεράσουν;

Στο θέμα αυτό οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί καλούνται να διαχειριστούν ένα ζήτημα που συνδέεται με την εννοιολογική κατανόηση της δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών αριθμών (ρητοί με διπλή δεκαδική αναπαράσταση). Η διαπραγμάτευση θα μπορούσε να γίνει είτε με τη μετατροπή του δεκαδικού αναπτύγματος 1,23999... στον αντίστοιχο ρητό αριθμό (που ανήκει στη διδακτέα ύλη του Γυμνασίου) είτε με τον υπολογισμό του αθροίσματος των απείρων όρων της αντίστοιχης γεωμετρικής προόδου (που ανήκει στη διδακτέα ύλη του Λυκείου).

Όπως έδειξαν όμως τα αποτελέσματα, οι περισσότεροι υποψήφιοι συνάντησαν σημαντικές δυσκολίες. Ο μέσος όρος επίδοσης των επιτυχόντων του διαγωνισμού στην Ειδική Διδακτική

ήταν 51,2/100, ενώ των αποτυχόντων 27,18/100.⁶ Το πλέον εντυπωσιακό όμως είναι ότι, σύμφωνα με τις μαρτυρίες των βαθμολογητών, πολλοί υποψήφιοι (δηλαδή πτυχιούχοι μαθηματικοί) φάνηκε ότι είχαν τις ίδιες παρανοήσεις με αυτές που εκδηλώνει ο μαθητής Α στο διδακτικό σενάριο!

Αυτά τα αποτελέσματα δεν εκπλήσσουν ιδιαίτερα, αν λάβουμε υπόψη τα δεδομένα δημοσιευμένων εμπειρικών ερευνών οι οποίες μελέτησαν τις αντιλήψεις που έχουν πολλοί φοιτητές και καθηγητές των Μαθηματικών για τη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών (βλ. π.χ. τα [6] και [7]).

Ακόμη πιο εντυπωσιακά είναι τα ευρήματα της έρευνας που πραγματοποιήθηκε στον Καναδά. Σε 46 υποψήφιους καθηγητές Μαθηματικών δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο που περιείχε τις εξής ερωτήσεις ([8], σσ.57-58):

Θέμα 1^ο

- (α) Ποιο σύνολο θεωρείτε ότι είναι «πλουσιότερο», των ρητών ή των άρρητων (δηλ. σε ποιο έχουμε περισσότερους αριθμούς);
- (β) Υποθέστε ότι επιλέγετε στην τύχη ένα αριθμό από το διάστημα $[0, 1]$ (της ευθείας των πραγματικών αριθμών). Ποια είναι η πιθανότητα να πάρετε ένα ρητό αριθμό;

Θέμα 2^ο

- (α) Είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε ένα ρητό αριθμό ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε άρρητους αριθμούς. Προσδιορίστε Σωστό ή Λάθος και εξηγήστε τη σκέψη σας.
- (β) Είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε έναν άρρητο αριθμό ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε άρρητους αριθμούς. Προσδιορίστε Σωστό ή Λάθος και εξηγήστε τη σκέψη σας.
- (γ) Είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε έναν άρρητο αριθμό ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς. Προσδιορίστε Σωστό ή Λάθος και εξηγήστε τη σκέψη σας.
- (δ) Είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε έναν ρητό αριθμό ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς. Προσδιορίστε Σωστό ή Λάθος και εξηγήστε τη σκέψη σας.

Θέμα 3^ο

- (α) Όταν προσθέτουμε δύο θετικούς άρρητους αριθμούς το αποτέλεσμα είναι πάντοτε άρρητος. Σωστό ή λάθος; Εξηγήστε τη σκέψη σας.
- (β) Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο διαφορετικούς άρρητους αριθμούς το αποτέλεσμα είναι πάντοτε άρρητος. Σωστό ή λάθος; Εξηγήστε τη σκέψη σας.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι, σε γενικές γραμμές, λιγότεροι από τους μισούς υποψήφιους εκπαιδευτικούς ήταν σε θέση να δώσουν ορθές απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα. Για να μη μακρηγορήσουμε ιδιαίτερα αλλά και επειδή συνδέεται άμεσα με το θέμα που εξετάζουμε, θα μεταφέρουμε ένα μικρό απόσπασμα από αυτά που γράφουν οι δύο ερευνήτριες ([8], σ.72):

Με βάση το γραπτό ερωτηματολόγιο και τις συνεντεύξεις, διαπιστώσαμε μόνο έξι περιπτώσεις όπου οι συμμετέχοντες έδειξαν να αντιλαμβάνονται τους άρρητους αριθμούς ως αντικείμενα. Ερμηνεύουμε την εκπληκτικά φτωχή επίδοση στο 3^ο θέμα ως ένδειξη ότι η έννοια του άρρητου αριθμού, όπως για παράδειγμα ο $5 + \sqrt{2}$, προσλαμβάνεται συνήθως λειτουργικά (ως μια διαδικασία) και όχι δομικά (ως ένα αντικείμενο) ... Είναι ενδιαφέρον ότι κανείς δεν έδωσε ως αντιπαράδειγμα ένα γινόμενο συζυγών με το οποίο αποδεικνύεται εύκολα ότι το γινόμενο δύο διαφορετικών άρρητων μπορεί πράγματι να είναι ρητός. Παρά το

⁶ Το άλλο θέμα της Ειδικής Διδακτικής αφορούσε το σχεδιασμό μιας δίωρης διδασκαλίας σε μαθητές της Γ' Λυκείου για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Αυτό ήταν ένα αναμενόμενο θέμα και η διαπραγμάτευση του από τους περισσότερους υποψήφιους υπήρξε ικανοποιητική (σύμφωνα με μαρτυρίες των βαθμολογητών).

γεγονός ότι όλοι οι συμμετέχοντες γνώριζαν την εκτέλεση αλγορίθμων όπως «ρητοποίηση του παρονομαστή», 30 από τους 46 υποψήφιους εκπαιδευτικούς είτε απάντησαν λανθασμένα είτε δεν απάντησαν καθόλου όταν ρωτήθηκαν αν το γινόμενο δύο άρρητων αριθμών θα μπορούσε να είναι ποτέ ρητός (θέμα 3β). Και από εκείνους που απάντησαν κανείς δεν χρησιμοποίησε αυτή την οικεία διαδικασία. Το γεγονός αυτό αποκαλύπτει ότι η αλγοριθμική γνώση μπορεί να γίνει εξαιρετικά διαδικαστική και μηχανιστική για το μαθητή, σε βαθμό που ο ίδιος ο σκοπός της χρήσης τέτοιων διαδικασιών να χάνεται τελείως.⁷

Όλα τα προηγούμενα καθιστούν αυτονόητη τη διαπίστωση ότι η διδασκαλία των στοιχείων (πραγματικής) Ανάλυσης που γίνεται στην Γ' Λυκείου απευθύνεται σε μαθητές οι οποίοι έχουν σχεδόν πλήρη άγνοια των κρίσιμων διαφορών ανάμεσα στα διάφορα υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Δεδομένου μάλιστα ότι οι μαθητές ασχολούνται αποκλειστικά με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τίθενται επιτακτικά ορισμένα βασικά ερωτήματα:

Πόσοι μαθητές κατανοούν το θεμελιώδες γεγονός ότι στο ίδιο διάστημα της πραγματικής ευθείας υπάρχουν δύο άπειρα σύνολα αριθμών διαφορετικού είδους;

Πόσοι μαθητές κατανοούν ότι τα συμπεράσματα βασικών θεωρημάτων της Ανάλυσης που χρησιμοποιούν στην επίλυση ασκήσεων (όπως π.χ. το θεώρημα Bolzano), δεν ισχύουν αν το θεώρημα εφαρμοστεί στο άπειρο και πυκνό σύνολο των ρητών αριθμών ενός διαστήματος;

Πόσοι μαθητές κατανοούν ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης μπορεί να μηδενίζεται σε άπειρα, αριθμήσιμοι πλήθους σημεία ενός διαστήματος χωρίς η συνάρτηση να είναι σταθερή;

Αυτά και πολλά άλλα ζητήματα που θα μπορούσαμε να αναφέρουμε, καθιστούν επιτακτική την ανάγκη επινόησης διδακτικών παρεμβάσεων και δραστηριοτήτων που μπορούν να συμβάλουν σε μια βαθύτερη, εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αρχικά όμως πρέπει να συζητήσουμε και να απαντήσουμε το επόμενο ερώτημα.

3. Είναι δυνατή η εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση;

Το διδακτικό πρόβλημα που περιγράφει ο τίτλος αυτής της ενότητας είναι δυσεπίλυτο, επειδή συνδέεται στενά με το θεμελιώδη χαρακτήρα και τη μεγάλη διάδοση των σχετικών παρανοήσεων αλλά και με τη χαμηλή (όπως δείξαμε στην πρώτη ενότητα) κατάταξη του συγκεκριμένου ζητήματος στις προτεραιότητες των διδασκόντων.

Εξετάζοντας τη θέση των πραγματικών αριθμών στα σχολικά Μαθηματικά, διαπιστώσαμε ότι ένα σημαντικό μέρος της προσπάθειας για την κατανόησή τους προβλέπεται να γίνει στο Γυμνάσιο. Όλα τα εμπειρικά δεδομένα όμως, αλλά και τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά των αντίστοιχων εννοιών δεν επιτρέπουν αισιοδοξία ότι η κατανόηση αυτή είναι εφικτή στη συγκεκριμένη εκπαιδευτική βαθμίδα. Εξίσου ανέφικτη όμως φαίνεται να είναι η επιδίωξη αυτού του στόχου στην Α' Λυκείου, αν λάβουμε υπόψη τις διδακτικές πρακτικές που υιοθετούν οι διδάσκοντες για το σχετικό κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου.

Μοναδική διέξοδος, για μια καταφατική απάντηση στο ερώτημα του τίτλου, είναι κατά την άποψή μας η σύνδεση της διδασκαλίας των πραγματικών αριθμών με τη διδασκαλία της Ανάλυσης. Αυτή η σύνδεση θα είναι μάλιστα πιο αποτελεσματική αν συμπεριληφθεί σε ένα σώμα βασικών προαπαιτούμενων γνώσεων που θα διδάσκεται στα τμήματα Θετικού Προσανατολισμού της Β' Λυκείου.

Ο βαθειά εννοιολογικός χαρακτήρας των γνώσεων που συνδέονται με τους πραγματικούς αριθμούς επιβάλλει μια διδακτική προσέγγιση διαφορετική από το καθιερωμένο δίπολο «θεωρία – ασκήσεις» που χαρακτηρίζει την παραδοσιακή διδασκαλία των Μαθηματικών. Στην κατεύθυνση

⁷ Αντίστοιχα ερευνητικά αποτελέσματα σχετικά με την εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών έχουν καταγραφεί και σε άλλες έρευνες που πραγματοποιήθηκαν στην Ελλάδα και το εξωτερικό (βλ. π.χ. στα [9], [10] και [11]).

αυτή μπορούν να παίζουν καθοριστικό ρόλο οι διδακτικές δραστηριότητες που αναδεικνύουν τις διαδεδομένες παρανοήσεις των μαθητών (και όχι μόνο ...), μέσα από τη μελέτη και συζήτηση προβλημάτων όπως αυτό που τέθηκε στο διαγωνισμό του ΑΣΕΠ ή των θεμάτων του ερωτηματολογίου της έρευνας των Sirotic & Zazkis.

Η πρότασή μας θέτει ως μοναδικό προαπαιτούμενο τις διαδικαστικές γνώσεις που αποκτούν οι μαθητές στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο, δηλαδή κάποια σχετική ευχέρεια στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων με φυσικούς αριθμούς, κλάσματα και δεκαδικές αναπαραστάσεις. Πάνω σε αυτές τις γνώσεις και τις αναπόφευκτες παρανοήσεις στις οποίες οδηγούν, θα επιχειρήσει η διδασκαλία να οικοδομήσει τις λεπτές έννοιες της διαδοχικότητας, της πυκνότητας, της ασυμμετρίας και της πληρότητας. Η θεμελιώδης διαφορά από την παραδοσιακή διδασκαλία είναι ότι η εισαγωγή αυτών των εννοιών δεν θα γίνει μέσα από μια θεωρητική διαπραγμάτευση ορισμών και αποδείξεων, αλλά θα προκύψει ως αποτέλεσμα ενασχόλησης των μαθητών με δραστηριότητες για τη μορφή και τη λειτουργία των δεκαδικών αναπαραστάσεων στα βασικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Σε αυτές τις δραστηριότητες⁸ οι μαθητές θα εργαστούν με φύλλα εργασίας και θα κληθούν να εφαρμόσουν τους γνωστούς κανόνες των πράξεων, για να απαντήσουν σε ερωτήσεις που αναδεικνύουν τον πλούτο των εννοιολογικών διαφοροποιήσεων ανάμεσα στα στοιχεία του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Βιβλιογραφικές παραπομπές

- [1] Υπουργείο Παιδείας: *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο για το σχολικό έτος 2017 – 2018* (Υ.Α. 164264/Δ2/03–10–2017)
- [2] Υπουργείο Παιδείας: *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α' τάξης Γενικού Λυκείου*. (Υ.Α. 59614/Γ2, ΦΕΚ Β' 1168, 8 Ιουνίου 2011).
- [3] Θωμάϊδης, Γ. Λογική και Διδακτική στην Άλγεβρα της Α' Λυκείου. *Ευκλείδης γ'* τεύχος 73, σσ.102–121 (2010).
- [4] Μάκρας, Σ. & Σαλίχος, Μ. Αξιολόγηση των γνώσεων των μαθητών στα Μαθηματικά κατά την είσοδο τους στο Λύκειο. *Ευκλείδης Γ'*, τεύχος 30–31, σσ.42–60 (1991).
- [5] Κουφός, Ε. & Ευαγγελόπουλος, Α. Η μαθηματική υποδομή των μαθητών που εγγράφονται στην Α' τάξη του Γενικού Λυκείου. Μια εμπειρική έρευνα. *Πρακτικά 4^{ης} Μαθηματικής Εβδομάδας*, σσ.360–383. Θεσσαλονίκη: Παράρτημα Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 2012.
- [6] Ζωϊτσάκος, Σ. Αντιλήψεις μελλοντικών καθηγητών των Μαθηματικών για τους ρητούς αριθμούς με διπλή δεκαδική αναπαράσταση. *Πρακτικά 27^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 276–288. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 2010.
- [7] Ζωϊτσάκος, Σ. & Ζαχαριάδης, Θ. Αντιλήψεις καθηγητών Μαθηματικών για τις περιοδικές δεκαδικές αναπαραστάσεις ρητών αριθμών. *Πρακτικά 4^{ου} Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών*, σσ.135–141. Ιωάννινα, 2011.
- [8] Sirotic, N. & Zazkis, R. Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 65(1), 49–76 (2007).
- [9] Βόσκογλου, Μ. & Κόσσυβας, Γ. Η κατανόηση των άρρητων αριθμών. *Πρακτικά 26^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Ε.Μ.Ε.*, σσ.305–314. Θεσσαλονίκη, 2009.
- [10] Βόσκογλου, Μ. & Κόσσυβας, Γ. Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών. *Ευκλείδης γ'* τεύχος 76, σσ.11–49 (2012).
- [11] Fischbein, E., Jehiam, R. & Cohen. D. The concept of irrational numbers in High-School students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics* 29(1), 29–44 (1995).

⁸ Σχετικά παραδείγματα θα δοθούν κατά τη διάρκεια της παρουσίασης.

Η σημασία της εννοιολογικής κατανόησης κατά τη μετάβαση από το Λύκειο στο Πανεπιστήμιο

**Θεοδόσιος Ζαχαριάδης
Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ**

Περίληψη

Οι πρωτοετείς φοιτητές αντιμετωπίζουν σημαντικά προβλήματα κατά τη μετάβαση τους από το Λύκειο στο Πανεπιστήμιο. Τα προβλήματα αυτά έχουν δύο βασικές αιτίες. Η μια αφορά στην αλλαγή του κοινωνικού και του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος. Όπως προκύπτει από πολλές μελέτες, οι νέοι φοιτητές αντιμετωπίζουν πολλά προβλήματα προσαρμογής στο νέο κοινωνικό και ακαδημαϊκό περιβάλλον στο οποίο εντάσσονται και αυτά τα προβλήματα επιδρούν σημαντικά στις σπουδές τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Η δεύτερη αιτία αφορά στο αντικείμενο το οποίο σπουδάζουν. Ειδικότερα όσον αφορά στα Μαθηματικά, η μαθηματική εκπαίδευση που αποκτούν οι μαθητές στο σχολείο έχει σημαντικές ποιοτικές διαφορές από τη μαθηματική εκπαίδευση η οποία απαιτείται στο Πανεπιστήμιο. Σε αυτές τις διαφορές βρίσκεται η ρίζα πολλών προβλημάτων που αντιμετωπίζουν πολλοί πρωτοετείς φοιτητές, ιδιαίτερα σε τμήματα Μαθηματικών. Μια τέτοια διαφορά είναι η ανάγκη για εννοιολογική κατανόηση. Στην παρουσίαση, θα αναφερθούν στοιχεία από τη διεθνή και την ελληνική βιβλιογραφία, καθώς και από την εμπειρία μου από τη διδασκαλία σε πρωτοετείς φοιτητές του τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, τα οποία δείχνουν ότι η έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης και πολύ περισσότερο η μη συνειδητοποίηση της ανάγκης για εννοιολογική κατανόηση, βρίσκεται πίσω από πολλά προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές κατά τη μετάβαση τους από το σχολείο στο Πανεπιστήμιο.

Εισαγωγή

Η μετάβαση από το σχολείο στο Πανεπιστήμιο είναι μια ιδιαίτερα πολύπλοκη διαδικασία. Σε αυτή τη μετάβαση συντελούνται τρεις μεγάλες αλλαγές στη ζωή του φοιτητή. Η κοινωνική αλλαγή, η αλλαγή του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος στο οποίο σπουδάζει και η αλλαγή στον τρόπο που πρέπει να «αντιμετωπίσει» τα μαθηματικά. Οι τρεις αυτές αλλαγές συνδέονται. Θετικά βήματα στη μια κατεύθυνση επηρεάζουν θετικά και τις άλλες και καθυστερήσεις στη μια επηρεάζουν αρνητικά τις άλλες. Η προσαρμογή στις νέες συνθήκες έχει μεγάλο κόστος για πολλούς φοιτητές.

Πολλές διεθνείς έρευνες μελετάνε το πρόβλημα της μετάβασης εστιάζοντας στη μια ή στην άλλη από τις παραπάνω αλλαγές. Στην ομιλία αυτή θα εστιάσουμε στη μετάβαση από τα μαθηματικά του σχολείου στα μαθηματικά του Πανεπιστημίου. Έχει διαπιστωθεί η ύπαρξη ασυνέχειας, ενός κενού, μεταξύ των μαθηματικών του σχολείου και του πανεπιστημίου (Luk, 2005, Kajander & Lovric, 2005, Winslow, 2013). Ο τρόπος που οι μαθητές μαθαίνουν να μελετάνε τα μαθηματικά στο σχολείο και αυτός που πρέπει να τα μελετάνε στο πανεπιστήμιο είναι ποιοτικά διαφορετικός. Στο πανεπιστήμιο απαιτείται από τους φοιτητές να κατανοούν τις έννοιες ώστε να μπορούν να τις χρησιμοποιήσουν στις αποδείξεις. Να κατανοούν τις αποδείξεις των θεωρημάτων ώστε να μπορούν να αξιοποιήσουν τις ιδέες κλειδιά που υπάρχουν σε αυτές για να αποδείξουν άλλες ιδιότητες και να λύσουν ασκήσεις. Αντίθετα στο σχολείο η μελέτη εστιάζει στην εκμάθηση διαδικασιών και μεθόδων. Αν παρατηρήσει κάποιος προσεκτικά πώς σκέφτονται αρκετοί μαθητές, ακόμη και μαθητές που θεωρούνται καλοί στα Μαθηματικά, όταν προσπαθούν να αντιμετωπίσουν μαθηματικά προβλήματα, βλέπει ότι έχουν σοβαρές παρανοήσεις σε βασικά θέματα. Αυτό οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης. Αυτοί οι μαθητές έχουν αποκτήσει μια υπολογίσιμη μαθηματικά γνώση καθώς και την ικανότητα να

αντιμετωπίζουν ασκήσεις συγκεκριμένου τύπου. Δεν έχουν αποκτήσει όμως την ικανότητα να χρησιμοποιούν τη γνώση τους ευέλικτα, ώστε να μπορούν να λύσουν προβλήματα που δεν είναι παρόμοια με άλλα, γνωστά σε αυτούς από πριν. Δηλαδή, δεν έχουν αποκτήσει ουσιαστική μαθηματική σκέψη.

Οι Hoyles, Newman και Noss (2001) εντοπίζουν την έλλειψη μαθηματικής σκέψης ως μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες των μαθητών κατά τη μετάβαση τους από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Εννοιολογική κατανόηση και προβλήματα πρωτοετών φοιτητών

Η βάση μιας μαθηματικής θεωρίας είναι τα αξιώματα. Τα αξιώματα αφορούν σε ιδιότητες πρωταρχικών εννοιών, δηλαδή εννοιών για τις οποίες δεν έχουμε τυπικό ορισμό αλλά τις αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά. Αυτές τις ιδιότητες τις δεχόμαστε χωρίς απόδειξη. Συνδιάζοντας τα αξιώματα με βάση λογικούς κανόνες αποδεικνύουμε νέες ιδιότητες. Τα μαθηματικά αναπτύσσονται με νέες ιδιότητες που προκύπτουν από τις ήδη γνωστές με βάση λογικούς κανόνες και με νέες έννοιες, οι ορισμοί των οποίων βασίζονται στις ήδη γνωστές έννοιες και στις ιδιότητες που έχουμε ήδη αποδείξει.

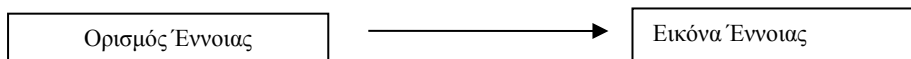
Τα βασικά στοιχεία της μαθηματικής σκέψης είναι οι ορισμοί, γιατί μέσω αυτών δημιουργούνται οι έννοιες, και οι αποδείξεις οι οποίες, με χρήση λογικών κανόνων, μας οδηγούν από την υπάρχουσα γνώση στη νέα γνώση.

Στη συνέχεια θα εστιάσουμε σε αυτά τα στοιχεία και θα δούμε το ρόλο τους στη μάθηση των μαθηματικών, πως αυτά χρησιμοποιούνται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και τι προβλήματα δημιουργούνται από αυτή τη χρήση στους πρωτοετείς φοιτητές.

Η σημασία των ορισμών στη μαθηματική εκπαίδευση

Στα μαθηματικά κάθε έννοια καθορίζεται πλήρως από τον ορισμό της και η διάκριση μεταξύ δύο μαθηματικών αντικειμένων γίνεται με βάση τον ορισμό τους. Για την κατανόηση όμως μιας έννοιας δεν αρκεί μόνο η γνώση του ορισμού της. Για να την κατανοήσουμε πρέπει να διαθέτουμε μια σωστή εικόνα της έννοιας. Σύμφωνα με τους D. Tall και S. Vinner (1981), με τον όρο «εικόνα έννοιας» (concept image) περιγράφουμε ολόκληρη τη γνωστική δομή η οποία σχετίζεται με την έννοια. Αυτή η γνωστική δομή περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες, διαδικασίες και ιδιότητες που συνδέονται με την έννοια. Η εικόνα μιας έννοιας που έχει διαμορφώσει ένα άτομο δομείται μέσα από τις εμπειρίες του και μεταβάλλεται καθώς το άτομο αυτό ωριμάζει μαθηματικά και συναντά νέα ερεθίσματα που συνδέονται με την έννοια. Η εικόνα αυτή περιλαμβάνει τον ορισμό της έννοιας (concept definition) που γνωρίζει το άτομο (αν γνωρίζει), αλλά είναι κάτι ευρύτερο. Η γνώση μόνο του τυπικού ορισμού της δεν εγγυάται την κατανόηση της.

Ο Vinner (1991), για να περιγράψει τον τρόπο που συνδέονται ο ορισμός μιας έννοιας με την εικόνα της έννοιας, απομόνωσε τον ορισμό από τα υπόλοιπα συστατικά της εικόνας και θεώρησε την ύπαρξη δύο διαφορετικών «κελιών» στη γνωστική δομή που έχει διαμορφώσει ένα άτομο για την έννοια. Το ένα κελί αφορά στον *ορισμό της έννοιας* και το δεύτερο στην *εικόνα της έννοιας* (χωρίς να περιλαμβάνεται σε αυτό ο ορισμός). Ένα από τα κελιά ή ακόμα και τα δύο μπορεί να είναι κενά. Το κελί της εικόνας της έννοιας θεωρείται κενό, εφ' όσον δεν αποδίδεται νόημα στο όνομα της έννοιας. Αυτό μπορεί να συμβεί στις περιπτώσεις που απλά απομνημονεύεται ο ορισμός της έννοιας. Πολλοί θεωρούν ότι η εικόνα έννοιας θα διαμορφωθεί με τη βοήθεια του ορισμού έννοιας και θα ελέγχεται πλήρως από αυτόν. Δηλαδή, θεωρούν ότι τα δύο κελιά συνδέονται με μια διαδικασία μονής κατεύθυνσης για το σχηματισμό έννοιας, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Γνωστική ανάπτυξη μιας τυπικής έννοιας

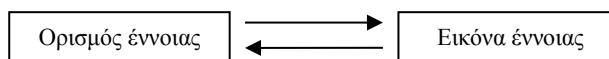
Η διαμόρφωση των δύο κελιών όμως μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Μπορεί να διαμορφωθούν παράλληλα με αλληλεπίδραση μεταξύ των κελιών αλλά μπορούν να διαμορφωθούν και ανεξάρτητα. Ο Vinner (1991) αναφέρει το ακόλουθο σχετικό παράδειγμα. Ένας μαθητής μπορεί να έχει σχηματίσει εικόνα για τα συστήματα συντεταγμένων, ως αποτέλεσμα της παρατήρησης και μελέτης πολλών γραφικών παραστάσεων. Σύμφωνα με αυτή την εικόνα, οι δύο άξονες ενός συστήματος συντεταγμένων είναι μεταξύ τους κάθετοι. Στην περίπτωση αυτή, ο μαθητής μπορεί να διαμορφώσει ως ορισμό του συστήματος συντεταγμένων ότι είναι δύο κάθετοι άξονες. Αργότερα μπορεί να μάθει στο μάθημα ότι ένα σύστημα συντεταγμένων αποτελείται από δύο τεμνόμενους (όχι υποχρεωτικά κάθετους) άξονες, οπότε το περιεχόμενο του κελιού που περιλαμβάνει τον ορισμό της έννοιας θα διαφοροποιηθεί. Στη συνέχεια τρία είναι τα δυνατά ενδεχόμενα που μπορεί να συμβούν:

i) Η εικόνα της έννοιας μπορεί να μεταβληθεί ώστε να συμπεριλάβει και τα συστήματα συντεταγμένων των οποίων οι άξονες δεν σχηματίζουν ορθή γωνία. Αυτό αποτελεί μια ικανοποιητική ανακατασκευή της εικόνας.

ii) Η εικόνα της έννοιας μπορεί να παραμείνει αμετάβλητη και το κελί του ορισμού για ένα μικρό διάστημα να περιέχει τον ορισμό που έμαθε ο μαθητής, αλλά σύντομα αυτός ο ορισμός να ξεχαστεί. Στην περίπτωση αυτή, όταν ο μαθητής θα κληθεί να ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων θα αναφερθεί πάλι σε σύστημα με κάθετους άξονες. Σε αυτή την περίπτωση ο ορισμός όχι μόνο δεν επηρέασε την εικόνα αλλά γρήγορα ξεχάστηκε.

iii) Και τα δύο κελιά να παραμείνουν αμετάβλητα. Όταν ζητηθεί από τον μαθητή να ορίσει τι είναι σύστημα συντεταγμένων θα επαναλάβει τον ορισμό που έμαθε στο μάθημα, αλλά σε όλες τις άλλες καταστάσεις θα σκεφτεί το σύστημα συντεταγμένων ως δύο κάθετους άξονες.

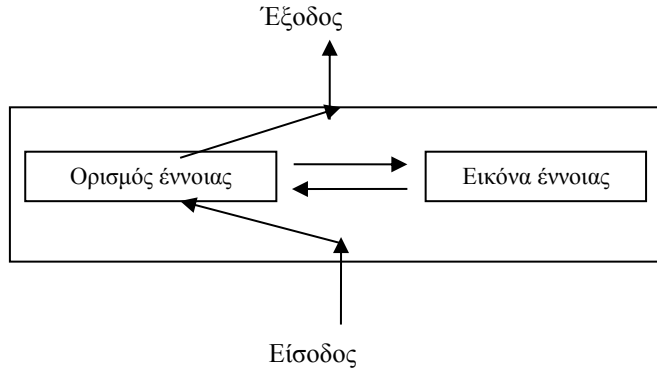
Μια παρόμοια διαδικασία ενδέχεται να εμφανιστεί όταν μια έννοια εισάγεται αρχικά μέσω ενός ορισμού. Εδώ, το κελί της εικόνας της έννοιας είναι κενό αρχικά. Μετά από πολλά παραδείγματα και επεξηγήσεις γεμίζει βαθμιαία.



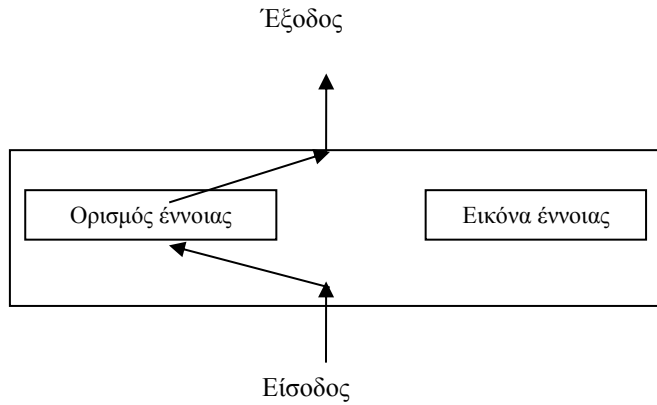
Σχήμα 2: Αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας έννοιας & ορισμού έννοιας

Το σχήμα 2 αναφέρεται στις μακροχρόνιες διαδικασίες του σχηματισμού μιας έννοιας μέσω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των περιεχομένων των δύο κελιών. Η εννοιολογική κατανόηση προϋποθέτει τη συμπλήρωση και τη σωστή σύνδεση των δύο κελιών. Ο μαθητής όχι μόνο πρέπει να γνωρίζει τον ορισμό της έννοιας αλλά πρέπει να έχει δημιουργήσει σωστές αναπαραστάσεις της έννοιας και να μπορεί να τις συνδέει μεταβαίνοντας από τη μια στην άλλη. Αυτό απαιτείται ιδιαίτερα κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Όταν τίθεται ένα πρόβλημα σε ένα μαθητή, τα κελιά της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας υποτίθεται ότι πρόκειται να ενεργοποιηθούν. Οι μαθηματικά σωστές διανοητικές διαδικασίες για την επίλυση του προβλήματος θα πρέπει σχηματικά να εκφράζονται με ένα από τα τρία παρακάτω σχήματα. (Τα σχήματα αντιπροσωπεύουν μόνο την πτυχή της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας που εμπλέκονται στη διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος και τα βέλη στα σχήματα

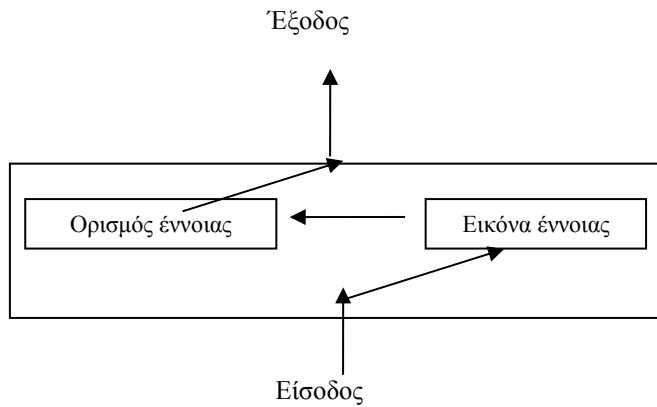
αντιπροσωπεύουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους ένα γνωστικό σύστημα ενδέχεται να λειτουργήσει.)



Σχήμα 3 : Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού και της εικόνας.

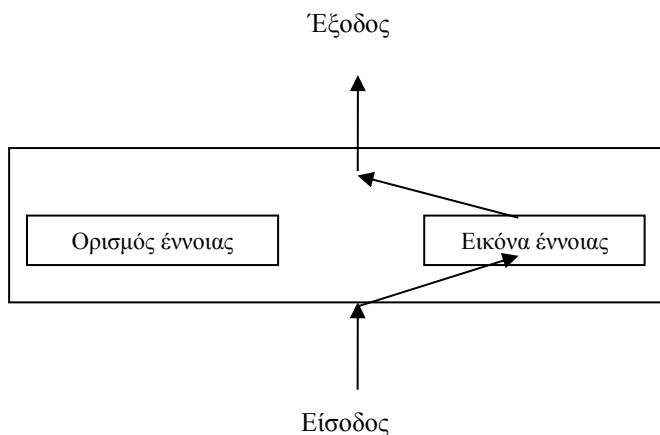


Σχήμα 4: Καθάρá τυπική αφαίρεση



Σχήμα 5: Αφαίρεση μετά από διαισθητική σκέψη

Το κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα όλων των παραπάνω σχημάτων είναι ότι για την επίλυση ενός προβλήματος οι διανοητικές διαδικασίες που συντελούνται περιλαμβάνουν οπωσδήποτε και τον ορισμό της έννοιας και η τελική απάντηση προκύπτει από την χρήση αυτού. Αυτό είναι και η μαθηματικά σωστή διαδικασία. Όπως όμως έχει προκύψει από αρκετές έρευνες, στη πράξη με τους μαθητές δε συμβαίνει πάντοτε αυτό. Ερευνητικά αποτελέσματα, όπως θα αναφέρουμε παρακάτω, δείχνουν ότι ένα πιο κατάλληλο πρότυπο για τις διαδικασίες που ακολουθούν στη πράξη οι περισσότεροι μαθητές είναι το ακόλουθο:

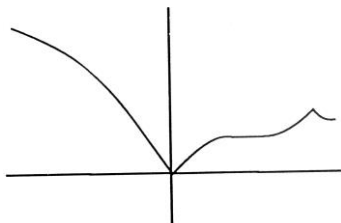


Σχήμα 6: Διαισθητική απάντηση.

Εδώ το κελί του ορισμού έννοιας, αν και μπορεί να μην είναι κενό, δεν ενεργοποιείται κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

Για να υποστηρίξουμε τον ισχυρισμό ότι η πλειονοφία των μαθητών δεν χρησιμοποιεί τους τυπικούς ορισμούς κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος θα παρουσιάσουμε τα δεδομένα μιας έρευνας που αφορά στην έννοια της συνάρτησης (Vinner, 1991). Το δείγμα της έρευνας ήταν 147 πρωτοετείς φοιτητές ενός πανεπιστημίου στην Αγγλία οι οποίοι είχαν τα Μαθηματικά βασικό μάθημα στις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στους φοιτητές αυτούς δόθηκε το παρακάτω ερωτηματολόγιο.

1. Υπάρχει συνάρτηση στην οποία κάθε αριθμός διάφορος του μηδενός αντιστοιχίζεται στο τετράγωνό του και το 0 αντιστοιχίζεται στο -1;
2. Υπάρχει συνάρτηση στην οποία κάθε θετικός αριθμός αντιστοιχίζεται στο 1, κάθε αρνητικός αντιστοιχίζεται στο -1 και το 0 στο 0;
3. Υπάρχει συνάρτηση η γραφική παράσταση της οποίας να είναι η ακόλουθη;



Σχήμα 7: Προκύπτει αυτή η γραφική παράσταση από μια συνάρτηση;

4. Κατά την άποψή σας τι είναι συνάρτηση;

Στις πρώτες τρεις ερωτήσεις οι φοιτητές έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ «ναι» ή «όχι» και να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους. Ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης που είχε διδαχθεί σε όλους τους φοιτητές ήταν ότι, συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων που σε κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο του δεύτερου. Παρά ταύτα, μόνο το 57% των φοιτητών έδωσε αυτόν ή κάτι ισοδύναμο με αυτόν τον ορισμό ως απάντηση στην ερώτηση 4. Το 14% των φοιτητών είπε ότι μια συνάρτηση είναι ένας κανόνας αντιστοίχισης και απέρριψαν τη δυνατότητα μιας αντιστοιχίας η οποία δεν βασίζεται σε κάποιο κανόνα. Ένα επιπλέον 14% υποστήριξε ότι μια συνάρτηση είναι ένας τύπος ή μια εξίσωση. Το υπόλοιπο ποσοστό δεν έδωσε ικανοποιητική απάντηση ή δεν απάντησε. Σε ότι αφορά στις εικόνες έννοιας προέκυψε ότι σε συγκεκριμένες καταστάσεις (στις ερωτήσεις 1 και 2) μεταξύ του ενός τρίτου και των δύο τρίτων των φοιτητών θεωρούσαν ότι μια συνάρτηση θα πρέπει να δίνεται από έναν ενιαίο τύπο ή, εάν δίνονται δύο τύποι, τότε θα πρέπει τα επιμέρους πεδία ορισμού για τον κάθε τύπο να είναι διαστήματα. Ένας κανόνας για ένα μόνο σημείο (όπως στην ερώτηση 1) δεν δίνει συνάρτηση. Μερικοί φοιτητές θεώρησαν ότι οι αντιστοιχίες οι οποίες δεν δίνονται από έναν αλγεβρικό τύπο δεν είναι συναρτήσεις, εκτός αν η μαθηματική κοινότητα τις έχει θεωρήσει ως συναρτήσεις με το να τους δώσει ένα όνομα ή μια ειδική αναφορά. (Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις της ερώτησης 2). Άλλοι φοιτητές (περίπου τα 2/5) πίστευαν πως η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να είναι κανονική, να αυξάνει μέσα σε λογικά πλαίσια κ.α. (Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις της ερώτησης 3.) Έτσι, πολλοί φοιτητές που όρισαν τη «συνάρτηση» σωστά δεν χρησιμοποιούσαν τον ορισμό της όταν απαντούσαν τις ερωτήσεις 1-3. Μόνο το ένα τρίτο των φοιτητών που έδωσαν το σωστό ορισμό της συνάρτησης απάντησε επίσης σωστά στις ερωτήσεις 1-3. Κανένας φοιτητής από αυτούς που έδωσαν λανθασμένο ορισμό δεν απάντησε στις ερωτήσεις 1-3 σωστά. Αντίστοιχες έρευνες στην Ελλάδα δείχνουν αντίστοιχα αποτελέσματα. Πολλοί μαθητές τελειώνοντας τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν έχουν μάθει τη σημασία που έχουν οι ορισμοί στα μαθηματικά. Σε συζήτηση πρωτοετής φοιτητής του τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ στο τέλος του πρώτου έτους των σπουδών του, ανέφερε ότι πολλά προβλήματα που αντιμετώπισε με τα μαθήματα στο πρώτο εξάμηνο των σπουδών του οφείλονταν στο ότι δεν έδινε τη σημασία που έπρεπε στην κατανόηση των ορισμών. Συγκεκριμένα είπε

«Στο σχολείο μαθαίναμε τους ορισμούς αλλά μετά δεν τους χρησιμοποιούσαμε ουσιαστικά στις ασκήσεις. Έτσι και στο πανεπιστήμιο στην αρχή δεν έδινα ιδιαίτερο βάρος στην κατανόηση των ορισμών. Μου πήρε χρόνο να συνειδητοποιήσω ότι αν δεν γνωρίζεις καλά τους ορισμούς δεν μπορείς να λύσεις ασκήσεις»

Αυτός ο φοιτητής είχε πάρει στις Πανελλαδικές Εξετάσεις περίπου 19000 μόρια. Φυσικά, όταν συνειδητοποίησε πως έπρεπε να διαβάσει δεν είχε πρόβλημα με τις σπουδές του.

Η σημασία των αποδείξεων στη μαθηματική εκπαίδευση

Η απόδειξη στα μαθηματικά είναι απαραίτητη για να συμπεράνουμε την αλήθεια ενός ισχυρισμού. Συνεπώς ένας στόχος της διδασκαλίας αποδείξεων στο σχολείο είναι να γίνει σαφές στους μαθητές ότι στα μαθηματικά μόνο η απόδειξη μας πείθει για την ισχύ ενός θεωρήματος. Πολλοί θεωρούν ότι αυτός ο στόχος είναι και ο μοναδικός. Από εκεί και πέρα σημασία έχει ο μαθητής να ξέρει το θεώρημα για να μπορεί να λύνει ασκήσεις. Αυτή η αντίληψη οδηγεί σε μια συγκεκριμένη διδακτική προσέγγιση στη διδασκαλία των αποδείξεων στο σχολείο. Μια προσέγγιση που έχει μοναδικό σκοπό να δείξει γιατί οι επιμέρους ισχυρισμοί που περιέχονται σε μια απόδειξη είναι σωστοί, χρησιμοποιώντας την ήδη γνωστή θεωρία. Δηλαδή, να καταλάβουν οι μαθητές ότι η ακολουθία των μαθηματικών συλλογισμών η οποία ξεκινάει από κάτι που ισχύει και, χρησιμοποιώντας γνωστή θεωρία, καταλήγει στο συμπέρασμα του θεωρήματος, είναι σωστή. Αυτή η διδακτική προσέγγιση των αποδείξεων, η οποία στη βιβλιογραφία ονομάζεται *συντακτική απόδειξη* (syntactic proof) (Weber and Alcock, 2004), δημιουργεί στους μαθητές μια συγκεκριμένη στάση όσον αφορά στις αποδείξεις θεωρημάτων. Πιστεύουν ότι, γνωρίζω μια απόδειξη σημαίνει ότι μπορώ να την γράψω σωστά. Αυτή η στάση έχει ως συνέπεια, όταν μελετούν μια απόδειξη να προσπαθούν να μάθουν τα διαδοχικά βήματα που οδηγούν στο συμπέρασμα και, στην καλύτερη περίπτωση, γιατί αυτά είναι σωστά.

Αυτός όμως πρέπει να είναι ο μοναδικός στόχος της διδασκαλίας της απόδειξης; Να πειστούν οι μαθητές ότι το θεώρημα είναι σωστό; Ένας τέτοιος αποκλειστικός στόχος περιορίζει ασφυκτικά τη σημασία της διδασκαλίας της απόδειξης και δεν συμβάλλει ουσιαστικά στην εννοιολογική κατανόηση και στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Μια απόδειξη περιέχει κάποιες σημαντικές ιδέες κλειδιά, η ανάδειξη των οποίων πρέπει να είναι βασικό στοιχείο της διδασκαλίας της. Και πρέπει να είναι βασικό στοιχείο γιατί αυτές τις ιδέες κλειδιά, ο μαθητής που θα τις κάνει κτήμα του θα μπορεί να τις αξιοποιήσει και σε άλλες περιπτώσεις. Σε μαθηματικά προβλήματα που αυτές οι ιδέες βοηθάνε στην επίλυση τους.

Αλλά και αυτό δεν είναι αρκετό. Η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης συνδέεται και με την επινόηση αυτών των ιδεών. Μέσα από ποιες νοητικές διαδικασίες προέκυψαν αυτές οι ιδέες; Πώς οι προηγούμενες γνώσεις αξιοποιήθηκαν και οδήγησαν σε αυτές τις ιδέες. Αυτά είναι στοιχεία που πρέπει να περιέχονται στη διδασκαλία μιας απόδειξης, γιατί αυτά είναι τα στοιχεία που “φωτίζουν” την απόδειξη. Που αναδεικνύουν το ουσιαστικό περιεχόμενο της και που συντελούν στην μαθηματική ανάπτυξη του μαθητή.

Μια διδακτική προσέγγιση της απόδειξης με τα παραπάνω χαρακτηριστικά στη βιβλιογραφία ονομάζεται *σημασιολογική απόδειξη* (syntactic proof) (Weber and Alcock, 2004).

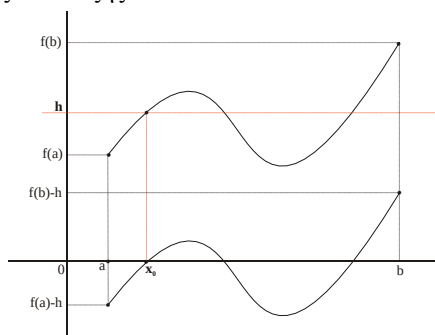
Θα προσπαθήσω να αναδείξω την διαφορά που έχουν οι δύο παραπάνω προσεγγίσεις μέσα από την απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών:

“Αν $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και $h \in \mathbb{R}$, ώστε $f(a) < h < f(b)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) = h$.”

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού, η οποία υπάρχει στα σχολικά βιβλία, προκύπτει εύκολα από την ειδική περίπτωση για $h=0$, η οποία είναι γνωστή ως θεώρημα του Bolzano και υπάρχει στα σχολικά βιβλία χωρίς απόδειξη.

Πράγματι, αν θέσουμε $g:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x)=f(x)-h$ για κάθε $x \in [a, b]$, είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano και άρα υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $g(x_0)=0$. Άρα $f(x_0)=h$.

Η παραπάνω απόδειξη είναι μια απλή απόδειξη. Εύκολα μπορεί να μάθει ένας μαθητής τα βήματα της απόδειξης ώστε να είναι σε θέση να την γράψει σωστά όταν του ζητηθεί. Μια διδακτική προσέγγιση που απλώς περιγράφει την παραπάνω διαδικασία αποτελεί μια συντακτική προσέγγιση της απόδειξης του παραπάνω θεωρήματος. Ποια είναι όμως η ιδέα κλειδί στην παραπάνω απόδειξη; Πόσοι κατανοούν μέσα από την τυπική περιγραφή ότι η ιδέα είναι η κατακόρυφη μεταφορά της συνάρτησης g κατά $-h$, ώστε το πρόβλημα να αναχθεί στην ύπαρξη σημείου μηδενισμού μιας συνάρτησης με ετερόσημες τιμές στα άκρα, το οποίο αντιμετωπίζεται με το γνωστό από πριν θεώρημα του Bolzano; Η περιγραφή της παραπάνω απόδειξης με τη χρήση οπτικής αναπαράστασης (σχήμα 8) αναδεικνύει αυτή την ιδέα και βοηθάει στην εννοιολογική κατανόηση της απόδειξης.



Σχήμα 8

Οι δύο προσεγγίσεις που περιγράψαμε παραπάνω δεν αφορούν μόνο τις αποδείξεις των θεωρημάτων αλλά και τις αποδείξεις ασκήσεων και προβλημάτων. Η απλή γνώση μεθοδολογιών για τη λύση συγκεκριμένου τύπου ασκήσεων συνδέεται με τη συντακτική προσέγγιση των αποδείξεων. Ο μαθητής μαθαίνοντας μια μεθοδολογία μαθαίνει τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει όταν έχει να αντιμετωπίσει συγκεκριμένου τύπου προβλήματα. Όταν όμως έχει να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα που δεν εντάσσεται σε αυτόν τον τύπο προβλημάτων, αλλά κάποια ιδέα που περιέχεται στη μεθοδολογία που γνωρίζει ή μια τροποποίηση αυτής μπορεί να αξιοποιηθεί για την επίλυση του, το πιθανότερο είναι να μην το καταλάβει και να αξιοποιήσει τη γνώση που έχει.

Στο πανεπιστήμιο απαιτείται η σημαντική προσέγγιση των αποδείξεων. Ο φοιτητής πρέπει να κατανοήσει ουσιαστικά μια απόδειξη ώστε, όχι μόνο να μπορεί να την γράψει αν του ζητηθεί, αλλά να είναι σε θέση να αξιοποιήσει τις ιδέες που υπάρχουν σε αυτήν και σε άλλες περιπτώσεις. Η συντακτική κατανόηση μιας απόδειξης και η προσπάθεια ομαδοποίησης ασκήσεων και ανάπτυξης συγκεκριμένης μεθοδολογίας δεν έχει πρακτική αξία. Αυτό οφείλεται στο ότι οι ασκήσεις στο πανεπιστήμιο είναι κυρίως θεωρητικές και οι διαδικασίες στις αποδείξεις δεν είναι απλές. Ακόμη και η ίδια διαδικασία για να εφαρμοστεί σωστά απαιτεί εννοιολογική κατανόηση. Εύκολα μπορεί να κάνει κάποιος λάθος σε κάτι που δεν το έχει κατανοήσει πλήρως. Για παράδειγμα, στο μαθημα του Απειροστικού Λογισμού στο πρώτο έτος, οι φοιτητές διδάσκονται ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας ρητών αριθμών. Για την απόδειξη αυτής της ιδιότητας κατασκευάζουμε με επαγωγική διαδικασία την ακολουθία, επιλέγοντας τους όρους της έτσι ώστε αφενός να προσεγγίζουν τον αριθμό με τέτοιο τρόπο που να εξασφαλίζεται ότι η ακολουθία που θα δημιουργηθεί θα συγκλίνει σε αυτόν, αφετέρου κάθε όρος να είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενο. Η διαδικασία αυτή αν δεν κατανοηθεί δεν είναι εύκολο να αποδοθεί σωστά. Ίδια διαδικασία απαιτείται και για την απόδειξη του ισχυρισμού ότι το ελάχιστο άνω φράγμα ενός άνω φραγμένου και μη κενού συνόλου, αν δεν ανήκει στο σύνολο είναι όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας στοιχείων του συνόλου. Σε πρόσφατες εξετάσεις που ζητήθηκε από τους φοιτητές να αποδείξουν τον παραπάνω ισχυρισμό, μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό (λιγότερο του 10%) απάντησε σωστά. Οι περισσότεροι δεν μπόρεσαν να γράψουν σωστά τη διαδικασία που είχαν διδαχθεί. Από τις απαντήσεις των περισσότερων ήταν σαφές ότι είχαν διαβάσει τη διαδικασία κατασκευής μιας ακολουθίας με τις παραπάνω ιδιότητες, αλλά δεν την είχαν κατανοήσει εννοιολογικά ώστε να μπορούν να την αναπαράξουν σωστά.

Για την εννοιολογική κατανόηση μιας απόδειξης αναγκαία προϋπόθεση είναι η σωστή κατανόηση των λογικών κανόνων που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά. Σε πολλά γραπτά φοιτητών φαίνεται η σύγχυση που υπάρχει στη χρήση των όρων «συνεπάγεται» και «ισοδύναμο» καθώς και των αντίστοιχων συμβόλων. Οι μαθητές στο σχολείο έχουν μάθει ότι για να αποδείξουν μια σχέση μπορούν να ξεκινήσουν από αυτή και με ισοδυναμίες να καταλήξουν σε μία σχέση που ισχύει. Αν αυτή η διαδικασία δεν έχει γίνει εννοιολογικά κατανοητή, δηλαδή τι σημαίνει ισοδυναμία και γιατί η ισχύ της σχέσης που καταλήγουμε μας εξασφαλίζει την ισχύ της αρχικής, τότε ο μαθητής μπορεί να εφαρμόζει αυτή τη διαδικασία και σε περιπτώσεις που δεν υπάρχει ισοδυναμία. Πολύ συχνά, φοιτητές θέλοντας να αποδείξουν μια σχέση ξεκινούν από αυτή και με απλές συνεπαγωγές, που πολλές φορές δεν αντιστρέφονται, καταλήγουν σε κάτι που ισχύει και θεωρούν ότι έχουν αποδείξει το ζητούμενο. Υπάρχουν και περιπτώσεις που οι συνεπαγωγές αντιστρέφονται οπότε η απόδειξη θα ήταν σωστή αν αντί του συμβόλου " $\Rightarrow$ " χρησιμοποιείτο το σύμβολο " $\Leftrightarrow$ " αλλά αυτός που γράφει φαίνεται ότι δεν καταλαβαίνει τη διαφορά.

Συμπεράσματα

Ο τρόπος μελέτης των μαθηματικών που αναπτύσσουν οι μαθητές στο σχολείο, ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια της προετοιμασίας τους για τις εξετάσεις εισαγωγής στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, δεν είναι αποτελεσματικός για τις σπουδές τους στο πανεπιστήμιο. Για την επιτυχή πορεία τους στις πανεπιστημιακές τους σπουδές, απαιτείται ποιοτικά διαφορετικός τρόπος μελέτης ο οποίος έχει βάση την εννοιολογική κατανόηση. Οι φοιτητές πρέπει να κατανοούν ουσιαστικά τις έννοιες, τα θεωρήματα και τις αποδείξεις που μελετούν, ώστε να μπορούν να τα αξιοποιήσουν στις ασκήσεις και στα προβλήματα που αντιμετωπίζουν. Η έλλειψη της ανάγκης για τέτοιου τύπου κατανόηση στις σχολικές σπουδές τους δημιουργεί πεποιθήσεις οι οποίες αποτελούν εμπόδιο στη συνειδητοποίηση της αλλαγής που πρέπει να κάνουν στον τρόπο μελέτης των μαθηματικών. Αυτό είναι ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα κατά τη μετάβαση από τη δευτεροβάθμια στη τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Βιβλιογραφία

- Hoyles, C., Newman, K., Noss, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2001, vol. 32, no. 6, 829-845.
- Kajander, A. & Lovric, M. (2005). Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 149-160.
- Luk, H. S. (2005). The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 161-174.
- Tall, D.O. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Vinner, S.: 1991, 'The role of definitions in teaching and learning', in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer, Dordrecht, pp. 65-81.
- Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209-234.
- Winslow, C. (2013). The transition from university to high school and the case of exponential functions. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2476-2485). Ankara: ERME.

ΣΥΝΕΧΗΣ & ΟΥΣΙΑΣΤΙΚΗ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ

για όλους όσοι βρίσκονται στο σχολείο ή στο φροντιστήριο.

ΝΕΕΣ συνθέσεις Προτεινόμενων θεμάτων για τις ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2018

θα αναρτώνται στην ιστοσελίδα μας μέχρι και την παραμονή των εξετάσεων!

www.kandylas.eu

